Le 12 vie alla felicità enumerativa
Funzioni con dominio finito

Frank Sullivan

9 settembre 2008

0.1 Introduzione al problematica

Si ricorda, (o si impara or'ora) che una funzione f da un insieme N ad un insieme X è una "regola" che ad ciascuno elemento di ν di N associa un elemento $f(\nu) \in X$. Dunque, una tale funzione è una collezione di coppie ordinate $f = \{(\nu, \xi)\}$ con $\nu \in N$ e $\xi = f(\nu) \in X$ tale che ogni $\nu \in N$ compare una e solo una volta come primo componente di una coppia della collezione f. Spesso la funzione f viene indicato con un diagramma

$$\begin{array}{rccl} f: & N & \longrightarrow & X \\ & \nu & \longmapsto & \xi = f(\nu) \end{array}$$

Nel caso che si studia in scuola media si prende $N = X = \Re$, i numeri reali (o, talvolta, N è solo un sottoinsieme di $\Re$), e poi la funzione f si identifica con suo **grafico**. Tale grafico, per essere il grafico di una funzione deve avere la proprietà geometrica che incontra ogni retta verticale solo una volta. In effetti, questa è propria la traduzione **geometrica** della condizione che ogni primo componente compare solo una volta nella collezione di coppia che costituisce la funzione: infatti, ciascuno $r \in \Re$ compare come primo componente solo del punto $(r, f(r))$ sul grafico della funzione f. Ad esempio, la funzione $f(r) = r^2$ ha grafico che è una parabola con vertice nel punto $(0,0)$ ed asse verticale.

Si nota che NON imponiamo nessuna condizione sulle rette orizontali rispetto il grafico della funzioni: una retta orizontale può incontrare il grafico della funzione mai, oppure una volta, oppure un numero finito di volte, oppure infinite volte. Addirittura, il grafico della funzione può consistere in una sola retta ORIZONTALE (e in tale caso la funzione si dice "funzione costante").

Torniamo alla situazione generale in cui X ed N sono insieme arbitrari, i quali però vogliamo "interpretare" in modo particolare.

La definizione stessa di funzione $f : N \longrightarrow X$ esige che nella collezione delle coppie (ν, ξ) che costituiscono una funzione f non troviamo mai due ξ associati con la stessa ν. Se si pensa ad N come la collezioni delle "Nubili" ed X come coloro dotati di cromosoma maschile χ, ossia come maschi, allora la funzione f diventa una sorta di "agenzia matrimoniale" nel senso che essa impone una stretta legge di monogamia (veramente mono-andria, ogni donno deve avere uno ed uno solo marito), addirittura con "matrimonio obbligato": ogni bella nubile ν deve per forza essere "fidanzata" (o se preferisci "sposata") sotto l'egida di f con qualche rozzo ξ di X: in simboli $f(\nu) = \xi$, che si può pensare come esprimendo la frase "ξ è il fidanzato (marito) di ν".

Dunque ogni nubile ν ha il suo unico "fidanzato" ("marito") ξ secondo f.

Invece la funzione f NON impone vincoli particolari sugli ξ: possiamo benissimo avere

- "uno stesso ξ" può essere il "fidanzato" di due (o persino molte) ν (e dunque per gli ξ la poligamia è permessa,
- ma anche la triste possibilità di restare scapolo, ossia di non essere accoppiato con nessuna nubile $\nu \in N$).

Per tradurre nel linguaggio austero di simboli, si può benissimo avere

- $f(\nu_1) = f(\nu_2) = \xi$ con $\nu_1 \neq \nu_2$,
- oppure $\xi_0 \in X$ tale che non c'è nessuna $\nu \in N$ tale che $f(\nu) = \xi_0$.

Per tornare al grigio caso scolastico in cui $N = X = \Re$ e la funzione $f(r) = r^2$ come sopra, allora ogni numero $r < 0$ resta scapolo, ogni numero $r > 0$ è bigamo, e solo $r = 0$ gode della felice monogamia (con unica sposa 0)

Oggi come oggi tale iniquità sociale potrebbe destare scandalo, e dovremmo dunque considerare funzioni che in qualche modo trattano le "ν" e gli "ξ" in modo più simmetrico (e si suppone perciò più equo).

Diciamo che la funzione $f : N \longrightarrow X$ è **iniettiva** se $f(\nu_1) = f(\nu_2)$ comporta che $n_1 = n_2$ (e questo, nella nostra terminologia matrimoniale, vuole dire che ora vige anche monogamia vera e propria: se un gagliardo $\xi \in X$ è accoppiato con una bella $\nu_1 \in N$ – cioè se $f(\nu_1) = \xi$ – allora non ci può essere un'altra $\nu_2 \in N$ che si accoppia con ξ secondo la regola (funzione) f.

D'altra parte, si può anche considerare le funzioni, che senza necessariamente imporre monogamia, almeno vietano che una $\xi \in X$ resti "scapolo". In modo preciso, possiamo richiedere che la funzione $f : N \longrightarrow X$ sia **suriettiva** nel senso che per ogni $\xi \in X$ esiste almeno una $\nu \in N$ tale che $f(\nu) = \xi$. Mettendo insieme queste due idee, diciamo che una funzione $f : N \longrightarrow X$ è **bi-iettiva** se essa è iniettiva e suriettiva. Funzioni bi-iettive talvolta si chiamano **corrispondenze biunivoche** o **corrispondenza** 1–1 perchè per tali f ogni ν in N corrisponde ad 1 ed 1 solo $\xi \in X$ (perchè f è funzione) e, vice versa, ogni $\xi \in X$ corrisponde ad una $\nu \in N$ (perchè f è suriettiva) ed una solo tale ν (perchè f è iniettiva).

Se torniamo, per l'ultima volta oggi, al "grigio caso scolastico" $N = X = \Re$ si vede che le traduzioni di questi concetti "astratti" in termini geometrici è

- f è **iniettiva** se e solo se ogni retta orizzontale incontra il grafico di f **al più una volta**;
- f è **suriettiva** se e solo se ogni retta orizzontale incontra il grafico di f **al meno una volta**;
- f è **bi-iettiva** se e solo se ogni retta orizzontale incontra il grafico di f **esattamente una volta**.

Dunque la funzione $f(r) = r^2$ da $\Re \longrightarrow \Re$ non è nè iniettiva nè suriettiva, ma le funzioni $g(r) = r^3$ ed $\ell(r) = 2r + 5$ sono iniettive e suriettive e dunque bi-iettive. Tramite schizzi di grafici (ma anche con formule "scolastiche") è facile trovare esempi di funzioni $f : \Re \longrightarrow \Re$ che sono suriettive ma non iniettive ed iniettive ma non suriettive. (Esercizio.)

Iniettiva ma NON suriettiva:

Surettiva ma NON iniettiva:

Tanto per entrare nel vivo della materia per oggi, consideriamo tutto già detto nel caso in cui sia l'insieme N che l'insieme X siano insiemi **FINITI**. Possiamo supporre che il numero di elementi dell'insieme N sia n e il numero di elementi di X sia x. Tre domande sorgono subito:

- Quante sono le funzioni (di tutte le specie) da N ad X?
- Quante sono le funzioni iniettive da N ad X?
- Quante sono le funzioni suriettive da N ad X.

È interessante, e forse un po' sorprendente, che mentre le prime due domande hanno risposta semplice, dare una resposta "ragionevole" alla terza questione richiede un po' di lavoro serio.

Non si può non accennare che il matematico che ci ha proveduto con lo strumento analitico adatto per analizzare il terzo problema era uno scozzese, James Stirling, che ha pure lavorato qui all'Università di Padova verso 1721 con N. Bernoulli.

Per dettagli biografici su Stirling si veda
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stirling.html

Per adesso, però, diamo la risposta solo ai primi due quesiti:

- Il numero di funzioni da un insieme N con n elementi in un insieme X con x elementi è $\quad x^n$.
  In effetti, si ha x scelte per la "destinazione" (o "fidanzato") del primo elemento di N, poi x scelte indipendenti di quella già fatta per la destinazione del secondo elemento di N, e così via, fino ad x scelte indipendenti di quelle già fatte, per la destinazione del n-esimo (ed ultimo) elemento di N: dunque un totale di $x \times x \times \cdots \times x$ con n fattori.

- Il numero di funzioni **iniettive** da N a X è $\quad x(x-1)\cdots(x-n+1)$.
  In effetti si ragiona come prima, solo che addesso ogni scelta successiva non è indipendente di quelle precedenti, ma vincolata dal non essere uguale a nessuna delle scelte già fatte. Si nota, in particolare, che se $n > x$ uno dei fattori nel prodotto è zero onde il numero di funzioni iniettive risulta zero (fatto, si spera, rassicurante sulla bontà del nostro ragionamento). Invece se $n = x$ troviamo che il numero di funzioni iniettive è $n!$, e che **in questo caso** una funzione è iniettiva se e solo se essa è suriettiva.

0.2 Giocando a "Stesso o Differente"

È risaputo che anche da fanciulli, ai ragazzi ed alle ragazze piace indagare quando due cose sono "veramente lo stesso" e quando sono "veramente differenti". Noi vogliamo fare lo stesso riguardo alle nostre funzioni tra insiemi finiti. A tale scopo possiamo, in partenza, considerare gli insiemi N ed X (dominio e codominio delle funzioni) di consistere di elementi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ed $u_1, u_2, \ldots, u_x$. Scegliamo le lettere p ed u perché ora vogliamo concepire gli elementi di N come "palle" e gli elementi di X come urne. Allora $f : N \longrightarrow X$ non è altro che una regola (o ricetta) che specifica un particolare modo in inserire le n palle nelle x urne. Ad esempio, quando $N = [3]$ (e perciò $n = 3$) ed $X = \{a, b, c, d\}$ (e perciò $x = 4$) possiamo contemplare le quattro funzioni seguenti

$$f(1) = f(2) = a, \qquad f(3) = b$$

$$g(1) = g(3) = a, \qquad g(2) = b$$

$$h(1) = h(2) = b, \qquad h(3) = d$$

$$i(2) = i(3) = b, \qquad i(1) = c.$$

Questi sono visibilmente funzioni distinte, ma sono VERAMENTE diverse? Naturalmente, la risposta dipende da che cosa intendiamo per “VERAMENTE diverse”.

Se, ad esempio, consideriamo i numeri 1, 2, e 3 come etichette sulle palle, e le lettere a, b, c, e d come etichette sulle urne, allora abbiamo quattro possibilità per il modo di imporre questo problema e problemi simili:

1. Le palle e le urne sono entrambe distinguibili fra di loro. Questa è l'impostazione originale.

2. Cancelliamo le etichette sulle palle, ma non sulle urne, di modo che le palle diventano indistinguibili, mentre le urne restano distinguibili fra di loro.

3. Cancelliamo le etichette sulle urne, ma non sulle palle, di modo che le urne diventano indistinguibili, mentre le palle restano distinguibili fra di loro.

4. Cancelliamo le etichette sia su le palle, sia sulle urne, di modo che entrambi le collezioni consistono di oggetti indistinguibili fra di loro.

È facile formalizzare queste idee, ma non lo facciamo in modo dettagliato oggi (dopo tutto, si deve pure aver qualcosa da studiare nei prossimi anni). Diciamo solo per coloro che sanno già che cos'è una **relazione di equivalenza** che

(INIZIO ZONA SONNO PERMESSO)

- La relazione che corrisponde a "cancellazione delle etichette sulle palle" è quello che decreta che $f : N \longrightarrow X$ e $g : N \longrightarrow X$ sono equivalenti se e solo se esiste un bi-iezione $\phi : N \longrightarrow N$ tale che $g = f \circ \phi$. In questo caso scriviamo $f \sim_N g$.

- La relazione che corrisponde a "cancellazione delle etichette sulle urne" è quello che decreta che $f : N \longrightarrow X$ e $g : N \longrightarrow X$ sono equivalenti se e solo se esiste un bi-iezione $\theta : X \longrightarrow X$ tale che $g = \theta \circ f$. In questo caso scriviamo $f \ {}_X\!\sim g$.

- La relazione di equivalenza che corrisponde a "cancellazione delle etichette sia sulle palle che sulle urne" è quella che decreta che $f : N \longrightarrow X$ e $g : N \longrightarrow X$ sono equivalenti se e solo se esistono bi-iezioni $\theta : X \longrightarrow X$ ed $\phi : N \longrightarrow N$ tale che $g = \theta \circ f \circ \phi$. In questo caso scriviamo $f \ {}_X\!\sim_N g$.

(FINE ZONA SONNO PERMESSO)

Ora si può provare ad enumerare le funzioni che sono veramente diverse secondo ciascuna di queste quattro ottiche, ed anzi potremmo provare ad enumerare o

- tutte le funzioni,
- oppure tutte le funzioni iniettive,
- oppure tutte le funzioni suriettive

secondo ciascuno di questi quattro schemi.

Ci sono, dunque, 12 casi da considerare. Taluni sono facilissimi, ma altri richiedono un certo impegno, e offrono l'occasione di incontrare delle classiche funzioni aritmetiche. Nelle prossime sezioni introduciamo questi "cavalli di battaglia" allo scopo di risolvere i 12 casi del problema.

Prima, però, dobbiamo accennare che le tre relazioni di equivalenza introdotta sopra, si ripresentano spesso in altri contesti di matematica, contesti che sicuramente saranno subiti da chi studia anche un po' di matematica.

Ad esempio, in algebra lineare le relazioni analoghe per applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita corrispondono ad operazioni elementari sulle righe o colonne della matrice che rappresenta la applicazione (rispetto basi opportune).

In modo simile (e più semplice) in analisi classica, se si restringe, ad esempio, a biiezioni che sono funzioni affini invertibili, si recupera la equivalenza tra funzioni che "differiscono solo per un cambio di variabile lineare" (sia dominio sia nel codominio). Dunque, sebbene proponiamo questo discorsetto a cuor leggero, le tecniche usate non sono "mera combinatorica".

Inoltre, in fisica queste considerazioni sono intimamente legate alla diversità tra "la statistica tipo Bose-Einstein" e quello di tipo "Fermi-Dirac" in connessione con il principio di esclusione di Pauli.

0.3 Nomenclatura

Oggi non avremo tempo per una discussione dettagliata di tutti i 12 casi. Ma possiamo almeno introdurre certi “cavalli di battaglia” che servono per risolvere le diverse questioni.

Inanzitutto, un po’ di notazione e nomenclatura.

1. Usiamo $[n]$ per indicare l’insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. $(x)_n$ indica il “fattoriale cadente” o “simbolo di Pochhammer”

$$
\begin{aligned}
(x)_n &= x(x-1)\cdots(x-n+1) \qquad (n \text{ fattori}). \\
(x)_{n+1} &= (x-n)(x)_n \qquad \text{(ricursione)} \\
(x)_0 &= 1 \qquad \text{(condizione al contorno)}
\end{aligned}
$$

   In particolare, $(n)_n = n!$, la solita fattoriale funzione. Si ricorda che per motivi “misteriosi” si pone $0! = 1$.

3. Per interi non-negativi n ed k con $k \leq n$ si definisce il **coefficiente binomiale** $\binom{n}{k}$ come il numero di sottoinisemi di $[n]$ con esattamente k elementi. Si sa (o si dimostra) che

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \tfrac{n!}{k!(n-k)!} \\
\binom{n}{k} &= \tbinom{n-1}{k-1} + \tbinom{n-1}{k} \qquad \text{(ricursione)} \\
\binom{n}{0} = \binom{n}{n} &= 1 \qquad \text{(condizioni al contorno)}
\end{aligned}$$

4. Il simbolo $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ indica il numero di modi di scegliere k elementi da un insiemi con n elementi quando repetizioni sono permessi. Come vedremo fra poco si ha

$$
\begin{aligned}
\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) &= \binom{n+k-1}{k} \\
\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) &= \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right) \qquad \text{(ricursione)} \\
\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) = 1 \qquad \left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right) &= n \qquad \text{(condizioni al contorno)}
\end{aligned}
$$

e quindi si potrebbe fare a meno del simbolo $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$, anche per quanto riguarda la sua formula ricorsiva e condizioni al contorno.

5. $S(n,k)$ indica il numero di Stirling (del secondo tipo), ossia il numero di modi in cui si può partizionare un insiemi con n elementi $\{1,2,\dots,n\}$ in k sottoinsiemi non-vuoti, a due a due disgiunti e con unione tutto $\{1,2,\dots,n\}$. Anche per gli $S(n,k)$ si hanno una formula ricorsiva e condizioni al contorno.

   (a) Per $n \geq 1$ si ha $S(n+1,k) = S(n,k-1) + kSn, k$ (ricursione)

   (b) Per $n \geq 1$ si ha $S(n,0) = 0$. (condizione al bordo)

   (c) Per $n \geq 1$ si ha $S(n,k) = 0$ se $k > n$. (condizione al bordo)

   (d) Per $n \geq 1$ si ha $S(n,1) = 1$. (condizione al bordo)

   (e) Per $n \geq 1$ si ha $S(n,n) = 1$. (condizione al bordo)

   (f) Per $n \geq 1$ si ha $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

   (g) Per $n \geq 1$ si ha $S(n,n-1) = \binom{n}{2}$.

6. Di nuovo per interi non-negativi n ed k con $k \leq n$ il simbolo $p_k(n)$ indica il numero di **partizioni** di n con esattamente k parti, ossia il numero di successioni $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ di interi positivi tali che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ e tali che

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$$

Inoltre, si pone

$$p(n) = p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_n(n)$$

di modo che $p(n)$ enumera il numero totale di partizioni di n come somma descrescente di interi positivi.

(a) Si ha la ricorsione

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

(b) Si ha $p_n(n) = 1$ (condizione al bordo)

(c) Per $n > 1$ si ha $p_{n-1}(n) = 1$ (condizione al bordo)

(d) $p_1(n) = 1$ (condizione al bordo)

(e) $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ ove $\lfloor x \rfloor$ indica il più grande intero che è minore o uguale ad x (il "piano" sotto x).

Nelle sezioni seguenti diamo discussioni brevi dei risultati appena elencati.

0.4 Coefficienti binomiali

La formula ricorsiva per i coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

ammette una semplice dimostrazione combinatoria: I sottoinsiemi di $[n]$ con k elementi si dividono in due classi: la classe di tali sottoinsiemi che NON contengono n, che sono in numero $\binom{n-1}{k}$, e poi la classe di sottoinsiemi che contengono n, che sono in corrispondenza biettiva ovvia con i sottoinsiemi di $[n-1]$ con $k-1$ elementi, in numero dunque $\binom{n-1}{k-1}$.

Si sa che la relazione di ricursione $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ permette di costruire i coefficienti binomiali ricursivamente, ossia di costruire il Triangolo di Tartaglia

(Pascal)

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

e che ci sono molti giocchetti che si può fare con questo triangolo, ad esempio, considerare il suo “riduzione modulo 2”, ossia il “triangolo” che si ottiene quando si scrive 0 nel posto di un coefficiente binomiale che è pare, ed 1 per uno coefficiente binomiale pari:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Per chi vorrebbe un triangolo più allegro e colorato, si potrebbe mettere un puntino rosso nel posto dei coefficienti binomiali pari, ed uno verde per quelli dispari.

Questione: quando compare la prossima riga che consiste di solo uni? (Quando compare la prossima riga tutta verde, per i non-Daltonici.)

0.5 Scelte con repetizioni

Un problema di natura simile a quello del paragrafo precendente è quello di trovare la "formula ricorsiva" per i numeri $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ che enumera il numero di "scelte con (eventuali) repetizioni" di k "oggetti" da una collezione di n oggetti.

Ad esempio se permettiamo "scelta con molteplicità" (ma non consideriamo l'ordine di cui le scelte sono fatte) ci sono esattamente 6 mode di scegliere 2 elementi dall'insieme $\{1,2,3\}$ ossia

$$11, \quad 22, \quad 33, \quad 12, \quad 13, \quad 23$$

In modo simile ci sono 20 modi di "scegliere con moltiplicità" tre elementi dal insieme $\{1,2,3,4\}$

$$\begin{array}{cccc} 111 & 222 & 333 & 444 \\ 112 & 113 & 114 & \\ 122 & 223 & 224 & \\ 133 & 233 & 334 & \\ 144 & 244 & 344 & \\ 123 & 124 & 134 & 234 \end{array}$$

Indichiamo questo numero di scegliere k elementi (con molteplicità) da un insieme con n elementi col simbolo $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Sebbene il simbolo nuovo è giustificato in virtù della diversità del concetto di "scelte con molteplicità permessa" rispetto "scelta di sottoinsiemi", un po' di sperimentazione numerica suggerisce che

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k} \tag{1}$$

Prima di stabilire questo in generale, controlliamo che combacia almeno con i casi già fatti: Abbiamo calcolato che $\binom{3}{2} = 6 = \binom{4}{2} = \binom{3+2-1}{2}$ e $\binom{4}{3} = 20 = \binom{6}{3} = \binom{4+3-1}{3}$, e dunque tutto torna a dovere.

Si può dimostrare equation (1), ossia che

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

in modo del tutto indolore se si considera la scelta di k oggetti da n (repetizioni permesse) come equivalente alla scelta di un sottoinsieme $n-1$ elementi da un insieme con $k+n-1$ elementi. In effetti, nella scelta di k con repetizioni, si può pensare di dovere compiere $k+n-1$ azioni del tipo scelgo l'oggetto numero i, oppure, cambiare dalla scelta di oggetto i alla scelta di oggetti di tipo $i+1$. Se gli oggetti sono $x_1, \ldots, x_n$ e se $k_1, \ldots, k_n$ sono interi non negativi tali per cui $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ allora, si fa k_1 scelte, poi un cambio, poi k_2 scelte, poi un cambio, ecc. fino al $n-1$-esimo compito (quando si è pronto a cominciare a scegliere oggetto x_n). In modo più visivo, se si sono $n-1+k$ posizioni da riempire o con un $*$ (che indica "scegliere un x_i") o con un $|$ (che indica "cambiare da x_i ad x_{i+1}"), allora per ogni modo di scegliere le $n-1$ posizioni di cambio tra le $n+k-1$ posizioni, si definisce una ed una sola modo di scegliere k oggetti da $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con eventuale repetizioni Ad esempio, la figura

$$****|*|||**|****$$

corrisponde alla scelta $x_1^4 x_2^1 x_5^2 x_6^3$.

Ma il numero di tale diagrammi è $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Per stabilire la identità $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$ con i metodi soliti basati sull'induzione, possiamo osservare che vale l'identità di tipo ricorsiva

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right). \tag{2}$$

Infatti, una scelta (con eventuali molteplicità) di k elementi da un insieme di $n+1$ elementi $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ o non "usa" mai x_{n+1} o invece lo "usa". Ci sono $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ selezioni che non usano x_{n+1} mai (poiché la scelta allora è veramente fatta tra i primi elementi $x_1, \ldots, x_n$). Se invece x_{n+1} viene "usato" si può poi completare la "scelta con molteplicità" di k elementi scegliendo $k-1$ elementi (con molteplicità) da $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, e questo si può fare in $\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$ modi. Vice versa, per ogni selezione enumerata da $\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$ si può completare unicamente ad una selezione enumerata da $\left(\!\binom{n+1}{k}\!\right)$ "buttando dentro un x_{n+1} in più".

Oltre l'identità ricorsiva (2) ci sono anche le "condizioni al contorno" (o meglio, per valori piccoli di n o k):

$$\begin{aligned}
\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) &= 1 && \text{per } n \geq 0 \\
\left(\!\!\binom{0}{k}\!\!\right) &= 0 && \text{per } k \geq 1 \\
\left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right) &= n && \text{per } n \geq 1 \\
\left(\!\!\binom{1}{k}\!\!\right) &= 1 && \text{per } k \geq 1
\end{aligned}$$

Ma ora il gioco è fatto: usando (2) e (3) si può svolgere una “tradizionale” dimostrazione per ricursione. Per formalizzare il ragionamento, tenendo presente equations (3) possiamo supporre di avere l’uguaglianza cercata giá in mano per le coppie (n, k) per tutte valori di k tali coppie fino ad (n, k) e persino per i $(n + 1, j)$ fino ad $j = k - 1$

Ma allora da

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right)$$

e "l'ipotesi induttiva"

$$\begin{aligned}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) &= \tbinom{n+k-1}{k} \\ \left(\!\!\binom{n+1}{k-1}\!\!\right) &= \tbinom{n+1+(k-1)-1}{k-1} = \tbinom{n+k-1}{k-1}\end{aligned}$$

si ricava

$$\begin{aligned}\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) &= \left(\!\!\tbinom{n}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\tbinom{n+1}{k-1}\!\!\right) \\ &= \tbinom{n+k-1}{k} + \tbinom{n+k-1}{k-1} \\ &= \tbinom{n+k}{k} \\ &= \tbinom{n+1+k-1}{k}\end{aligned}$$

come voluto.

Come applicazione–esercizio possiamo considerare l'esercizio seguente:

Quanti sono i monomomi di grado k in n variabili $x_1, \ldots, x_n$?

Risposta: $\left(\!\!\tbinom{n}{k}\!\!\right) = \tbinom{n+k-1}{k}$

0.6 Numeri di Stirling

Sia X un insieme finito con n elementi, e sia k un intero positivo. Una **ripartizione di X in k parti** è una scomposizione

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$$

ove gli X_i sono tutti non-vuoti, ed $X_i \cap X_j = \emptyset$ qualora $i \neq j$. Si indica con $S(n, k)$ (o anche con $\left\{ n \atop k \right\}$) il numero di modi distinti per partizionare X in k parti a due a due disgiunte e con unione X. $S(n, k)$ si chiama un **numero di Stirling** (spesso detto "del secondo tipo"). Le parti X_i si chiamano **blocchi** della ripartizione di X che essi costituiscono. Come al solito, il caso $n = 0$ è un po' strano, ma poniamo $S(0, 0) = 1$

Allora abbiamo i fatti (esercizi) seguenti taluni dei quali sono “condizioni al contorno” per gli $S(n, k)$:

1. Per $n \geq 1$ si ha $S(n, k) = 0$ se $k > n$.
2. Per $n \geq 1$ si ha $S(n, 0) = 0$.
3. Per $n \geq 1$ si ha $S(n, 1) = 1$.
4. Per $n \geq 1$ si ha $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.
5. Per $n \geq 1$ si ha $S(n, n) = 1$.
6. Per $n \geq 1$ si ha $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

Inoltre abbiamo una formula ricorsiva simile a quella per i coefficienti binomiali

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1) \tag{3}$$

In effetti, se $X = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ allora possiamo ragionare così: per fare una ripartizione di $\{1, \dots, n-1, n\}$ in k blocchi o si fa una ripartizione di $\{1, \dots, n-1\}$ in k blocchi e poi si butta n in uno dei blocchi già fatti (procedura che si può eseguire in $kS(n-1,k)$ modi)

OPPURE si fa un blocco per n solo, e poi si fa una ripartizione di $\{1, \dots, n-1\}$ (procedura che si può fare in $S(n-1, k-1)$ modi.

Giacchè le due procedura producono ripartizioni diverse, si ha la ricorsione (3).

Ecco una tabella dei primi numeri di Stirling

$$
n \quad
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 & \\
0 & 1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 \\
 & & & & k & & & &
\end{array}
$$

Come esercizio (basta usare la relazione di ricorrenza) si invita a controllare la correttezza della tabella, e aggiungere un'altra riga in basso e un'altra colonna a destra.

0.7 Le funzioni di partizioni $p_k(n)$ ed $p(n)$

Ora rivolgiamo la nostra attenzione verso i $p_k(n)$. Si ricordi che $p_k(n)$ indica il numero di partizioni di n con esattamente k parti, ossia il numero di successioni $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ di interi positivi tali che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ e tali che

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$$

Poi, per $n \geq 0$ si definisce dalla equazione $p(n) = \sum_{j=0}^{n} p_j(n)$

Poniamo pure $p_0(0) = 1 = p(0)$.

Le funzione $p_k(n)$ sono quindi molto facile da capire (almeno che cosa vogliono dire) ma sono pure oggetto di studi profondi.

Per dare qualche esempio, vediamo che ci sono 7 partizione di 5, cioè $p(5) = 7$

In effetti abbiamo

$$
\begin{aligned}
5 \quad &= 1+1+1+1+1 \\
&= 2+1+1+1 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Da questo elenco vediamo che

$$
\begin{aligned}
p_1(5) &= 1 \\
p_2(5) &= 2 \\
p_3(5) &= 2 \\
p_4(5) &= 1 \\
p_5(5) &= 1
\end{aligned}
$$

Conveniamo che $p_0(0) = 1$ ed anche $p(0) = 1$

Per prendere dimestichezza con i numeri $p_k(n)$ si potrebbe provare a dimostrare i fatti seguenti:

1. Si ha $p_n(n) = 1$

2. Per $n > 1$ si ha $p_{n-1}(n) = 1$

3. $p_1(n) = 1$

4. $p_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ ove $\lfloor x \rfloor$ indica il più grande intero che è minore o uguale ad x (il "piano" sotto x).

5. Si ha la ricorsione

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

(Ogni scrittura di n come somma di k parti o ha 1 come parte più piccola, oppure ha ognuno dei k parti maggiore di 1. Nel secondo caso sottraendo 1 da ogni parte si ottiene una scrittura di $n-k$ in k parti. Vice versa, per ogni tale scrittura di $n-k$, l'addizione di 1 a ciascuna delle k parti ci procura una scrittura di n in k parti con parte più piccola maggiore di 1).

Come per i numeri di Stirling, la ricorsione permette di calcolare i numeri $p_k(n)$ per valori relativamente bassi di n e k.

0.8 Che palle (ed urne)!

La tabella seguente riassume i 12 casi del nostro problema di “mettere palle in urne”

I 12 modi per enumerare funzioni

Elementi di N	Elementi di X	f qualsiasi	f iniettiva	f suriettiva
dist.	dist.	**1** x^n	**2** $(x)_n$	**3** $x!S(n,x)$
indist.	dist.	**4** $\left(\!\binom{x}{n}\!\right)$	**5** $\binom{x}{n}$	**6** $\left(\!\binom{x}{n-x}\!\right)$
dist.	indist.	**7** $\sum_{j=1}^{x} S(n,j)$	**8** $\begin{cases} 1 & \text{se } n \le x \\ 0 & \text{se } n > x \end{cases}$	**9** $S(n,x)$
indist.	indist.	**10** $\sum_{j=1}^{x} p_j(n)$	**11** $\begin{cases} 1 & \text{se } n \le x \\ 0 & \text{se } n > x \end{cases}$	**12** $p_x(n)$

0.9 Le dimostrazioni

1. Puntoi 1) è facile: ci sono x posti per mandare il primo elemento di N, poi, in modo, indipendente x posti per il secondo, e così via fino all'ennesimo elemento, dando un totale di x^n funzioni.

2. Anche 2) non offre problemi: ora ci sono x posti per mandare il primo elemento, ma poi solo $(x-1)$ destinazioni per il secondo, $(x-2)$ per il terzo, e così via fino ad $(x-(n-1)) = x-n+1$ per l'ennesimo elemento di n, per un totale di $(x)_n$ funzioni iniettive.

3. Per quanto riguarda 3), si osserva che ogni funzione suriettiva, ci procura una ripartizione di N in x sottoinsiemi: basta considerare le immagini inversi degli x elementi (urne) di X. Insomma, la ripartizione corrisponde al modo di distribuire le palle specificato dalla funzione data. Però, la stessa ripartizione sorge se si permuta le etichette sulle urne, ossia da $x!$ funzioni diverse. Quindi ci sono un totale di $x!S(n,x)$ funzioni suriettive.

4. Nel caso 4) in cui le palle sono indistinguibili, la funzione corrisponde ad un modo per scegliere n tra le x scatole, con ripetizioni permessi. Dunque il numero totale di tali funzioni è $\left(\!\binom{x}{n}\!\right)$.

5. Per il caso 5), funzioni iniettive, le scelte sono senza repetizioni e dunque in numero $\binom{x}{n}$. In particolare, si nota che $\binom{x}{n} = 0$ per $n > x$.

6. Nel caso 6), per garantire che la (classe di equivalenza della) funzione sia suriettiva, si deve prima distribuire una palla in ciascuna delle x urne, lasciando poi $n - x$ palle indistinguibile per distribuire. Dunque, ragionando come nel caso 4), ci sono $\left(\!\binom{x}{n-x}\!\right)$ tali (classi di) funzioni.

7. Nel caso 7), con palle distinguibili, ma urne non distinguibili, una (classe di) funzione è specificata dal **numero** delle urne occupate insieme con la ripartizione di N indotta dalla distribuzione in urne. Se si usa j urne ($1 \leq j \leq x$) ci sono $S(n, j)$ possibili (classi di) funzioni, e dunque un totale di $\sum_{j=1}^{x} S(n, j)$ classi di funzioni in totale.

8. Il caso 8) è chiaro: quando le urne non sono distinguibili possiamo distribuire tutte le n palle in urne diverse solo se $x \geq n$, e non si riesce a distinguere un modo di fare ciò da un altro in assenza di etichette sulle urne.

9. Il caso 9) discende dallo stesso ragionamento del caso 7). Nota la somiglianza col caso 3) ma ora senza il fattore $x!$.

10. Per il caso 10 si ragiona in modo simile al caso 7, ma ora riusciamo a distinguere soltanto il numero di palle in un urna, non le palle stesse. Dunque, se j urne sono occupate, avremo $p_j(n)$ modi diversi per distribuire le palle indistinguibili in j urne indistinguibili, e perciò un totale di $\sum_{j=1}^{x} p_j(n)$ classi di funzioni.

11. Il caso 11) è facile ed è analogo al caso 8).

12. Il caso 12) discende dal ragionamento usato nel caso 10 e la constatazione che tutte le x urne devono essere occupate.

0.10 Parole finali

Manco a dirlo, non c'è un granello di originalità in quanto precede. L'ispirazione si trova nel libro *Enumerative Combinatorics, Vol. 1* di Richard P. Stanley (Cambridge Studies in Advanced Matematics 49)

Inoltre, si potrebbe riprendere la discussione delle varie funzioni enumerative incontrate oggi in chiave più **analitica**. In particolare, si potrebbe cercare approssimazioni semplici per le formule precise. In questa vena si dovrebe accennare all'approssimazione di Stirling (sì, lo stesso Padovano-Inglese di prima) ad $n!$.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ma questo, e formule approssimative per le altre funzioni è materia per un vero corso dia analisi o teoria dei numeri.

I 12 modi per enumerare funzioni

Elementi di N	Elementi di X	f qualsiasi	f iniettiva	f suriettiva
dist.	dist.	**1**	**2**	**3**
indist.	dist.	**4**	**5**	**6**
dist.	indist.	**7**	**8**	**9**
indist.	indist.	**10**	**11**	**12**