1. Spazi Metrici

1.0.1. *Introduzione.* Nel piano o nello spazio ordinari la nozione di distanza fra due punti è molto importante. Per definirla occorre fissare un'unità di misura, e fatto questo la distanza fra due punti è definita come la lunghezza, rispetto a tale unità di misura, del segmento di retta che congiunge questi due punti. La distanza è un numero reale positivo, nullo quando i due punti coincidono (per uniformità di linguaggio, si conviene di dire che ogni punto ha distanza nulla da se stesso). Se nello spazio è stato fissato un sistema ortogonale monometrico di coordinate, la distanza fra due punti $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$, nell'unità di misura di tali coordinate è , come ben noto:

$$|p_2 - p_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

La notazione $|p_2 - p_1|$ è supposta conosciuta, ma ripetiamo i sommi capi per comodità del lettore: fissato un sistema di coordinate, ogni punto $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ può essere pensato anche come vettore (il *raggio vettore* dall'origine a quel punto); la *norma euclidea* (talvolta detta norma pitagorica) del vettore, da pensarsi come la lunghezza dello stesso, è , in coordinate ortonormali, ovvero ortogonali monometriche, il numero

$$|p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

la distanza fra due punti è , per definizione, la lunghezza, o norma euclidea, del vettore differenza di questi due punti. Questo è il modo di definire la distanza nello spazio ordinario. È chiaro che il concetto va modificato in spazi diversi. Ad esempio, dati due punti sulla superficie della terra, la loro distanza, se pensiamo alla lunghezza del volo di un aereo fra i due punti, non è la lunghezza del segmento fra i due punti, ma piuttosto (supposta la terra perfettamente sferica) quella dell'arco di cerchio massimo fra i due punti; si potrebbe dimostrare infatti che questa è la *geodetica* fra i due punti, una curva che ha lunghezza minima fra le varie curve che congiungono i due punti restando sulla superficie sferica. Supposto che la sfera sia quella di centro l'origine e raggio 1, la *sfera dei versori*, la distanza geodetica fra due punti $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ è

$$\mathrm{dist}(p_1, p_2) = \arccos(p_1 \cdot p_2) = \arccos(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2),$$

(arco coseno del prodotto scalare $p_1 \cdot p_2$ tra i due versori p_1 e p_2, cioè l'angolo da essi formato).

Ci sono anche altre situazioni in cui occorre considerare distanze diverse dalla distanza euclidea. Ad esempio, se siamo a Manhattan, nel cuore di New York, le strade si tagliano tutte ad angolo retto: le Avenues vanno in direzione nord–sud, le Streets in direzione est ovest; assumiamo un sistema di coordinate con assi in queste direzioni; se siamo in un punto di coordinate (x_1, y_1) e vogliamo arrivare al punto di coordinate (x_2, y_2) ci si convince facilmente che la distanza fra i due punti è

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

1.0.2. *Spazi metrici.* Uno spazio metrico è un insieme X fornito di una *funzione distanza* $d : X \times X \to [0, +\infty[$, detta anche *metrica*, che ad ogni coppia di punti $x, y \in X$ assegna la loro distanza $d(x, y) \geq 0$, in modo che le seguenti condizioni siano verificate:

(D_1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (positività)
(D_2) $d(x, y) = d(y, x)$, per ogni $x, y \in X$ (simmetria)
(D_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Negli esempi che seguono si indica con $\mathbb{K}$ un corpo che può essere $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$, di modo che $\mathbb{K}^n$ è lo spazio delle $n-$ple ordinate di numeri reali o complessi

Esempio 1. Nello spazio $\mathbb{K}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali o complessi la formula

$$d_2(x, y) = |y - x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^2} \qquad x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n,$$

definisce una distanza su $\mathbb{K}^n$, la *distanza euclidea* o *pitagorica*. L'unica verifica non banale è quella della disuguaglianza triangolare (vedi ??.??)

Esempio 2. Sempre in $\mathbb{K}^n$ si hanno altre metriche importanti e spesso utilizzate. L'estensione $n-$dimensionale della metrica di Manhattan è

$$d_1(x, y) = \|y - x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| \qquad x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Un'altra metrica importante è

$$d_\infty(x,y) = \|y-x\|_\infty = \max\{|y_k-x_k|;\ k=1,\dots,n\} \qquad x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n.$$

Lasciamo al lettore la facile verifica del fatto che effettivamente queste sono metriche su $\mathbb{K}^n$. Gli indici sono spiegati dal fatto seguente: se p è reale, con $p\ge 1$, si definice una metrica d_p su $\mathbb{K}^n$ ponendo:

$$d_p(x,y) = \|y-x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |y_k-x_k|^p\right)^{1/p} \qquad x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n.$$

Se $p>1$ non è affatto banale verificare che la disuguaglianza triangolare è verificata. È invece non difficile provare che si ha, per ogni $x,y\in\mathbb{K}^n$:

$$\|y-x\|_\infty = \max\{|y_k-x_k|;\ k=1,\dots,n\} = \lim_{p\to+\infty}\|y-x\|_p.$$

Esempio 3. Come sopra già detto nel caso particolare $n=3$, dato $\mathbb{R}^n$ si prende la sfera dei versori

$$\mathbb{S}^{n-1} = \left\{x\in\mathbb{R}^n : |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = 1\right\},$$

e dati $u,v\in\mathbb{S}^{n-1}$ la loro *distanza geodetica* è

$$\arccos(u\cdot v) = \arccos\left(\sum_{k=1}^n u_k v_k\right).$$

Dobbiamo dimostrare che questa è una metrica; al solito, l'unica verifica non immediata è la disuguaglianza triangolare: dobbiamo verificare che se $u,v,w\in\mathbb{S}^{n-1}$, allora si ha

$$\arccos(u\cdot w) \le \arccos(u\cdot v) + \arccos(v\cdot w).$$

Consigliamo al lettore di dimostrare il caso $n=2$, in cui $\mathbb{S}^1$ è il circolo unitario di $\mathbb{R}^2$. Per quanto ne so, ogni dimostrazione elementare con $n\ge 3$ richiede qualche nozione di trigonometria sferica.

Caso $n=2$: si usa il fatto che ogni elemento di $\mathbb{S}^1$ si può scrivere nella forma $(\cos\alpha,\sin\alpha)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$; la distanza geodetica di $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ da $(\cos\beta,\sin\beta)$ è la minima possibile distanza tra numeri della forma $\alpha+2k\pi$ e numeri della forma $\beta+2l\pi$, con $k,l\in\mathbb{Z}$. Possiamo scegliere di far variare α,β in $]-\pi,\pi]$ di modo che la distanza geodetica tra $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ e $(\cos\beta,\sin\beta)$ è

$$\arccos(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) = \arccos(\cos(\alpha-\beta)),$$

ed ovviamente, dovendo essere $0\le\arccos(\cos(\alpha-\beta))\le\pi$ si ha

$$\arccos\cos(\alpha-\beta) = \min\{|\alpha-\beta|, 2\pi-|\alpha-\beta|\} = \begin{cases} |\alpha-\beta| & \text{se} \quad |\alpha-\beta|\le\pi \\ 2\pi-|\alpha-\beta| & \text{se} \quad |\alpha-\beta|>\pi; \end{cases}$$

(si ricordi che $-\pi<\alpha,\beta\le\pi$). Verifichiamo la disuguaglianza triangolare, cioè che dati $\alpha,\beta,\gamma\in]-\pi,\pi]$ si ha

$$\arccos\cos(\alpha-\gamma) \le \arccos\cos(\alpha-\beta) + \arccos\cos(\beta-\gamma);$$

data l'invarianza per rotazioni della distanza geodetica non è restrittivo supporre $\alpha=0$; si deve provare che si ha

$$\arccos\cos\gamma \le \arccos\cos\beta + \arccos\cos(\beta-\gamma),$$

e cioè

$$|\gamma| \le |\beta| + \min\{|\beta-\gamma|, 2\pi-|\beta-\gamma|\},$$

che è immediata; se infatti $\min\{|\beta-\gamma|, 2\pi-|\beta-\gamma\} = |\beta-\gamma|$ essa è la solita disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$; se invece il minimo è $2\pi-|\beta-\gamma|$ si ha $|\beta-\gamma|>\pi$, per cui β e γ hanno segni opposti, ed allora si ha $|\beta-\gamma|+|\gamma| = |\beta|+2|\gamma|$, e la disuguaglianza da provare equivale a $|\gamma|\le\pi$, vera per assunzione.

Passiamo ora a dimostrare la disuguaglianza triangolare per la metrica geodetica in $\mathbb{S}^{n-1}$ con $n\ge 3$. Dati $x,y,z\in\mathbb{S}^{n-1}$, dimostriamo che si ha

$$\arccos(x\cdot z) \le \arccos(x\cdot y) + \arccos(y\cdot z).$$

Possiamo supporre x,y,z linearmente indipendenti, dato che altrimenti si ricade nel caso già provato di $\mathbb{S}^1$; mostriamo che in tal caso la disuguglianza è anche verificata in senso stretto Poniamo per semplificare $a=\arccos y\cdot z$, $b=\arccos z\cdot x$, $c=\arccos x\cdot y$. Dati x,y versori non paralleli è definito il versore y_x, versore tangente in y all'arco di cerchio massimo che congiunge y con x, orientato da y verso x, come

$$y_x = \frac{x-(y\cdot x)y}{|x-(y\cdot x)y|},$$

di modo che si ha $x = (y \cdot x)y + (y_x \cdot x)y_x = \cos c\, y + \sin c\, y_x$, ed anche $z = (y \cdot z)y + (y_z \cdot z)y_z = \cos ay + \sin ay_z$; moltiplicando scalarmente si ottiene (essendo y ortogonale sia ad y_x che ad y_z):

$$\cos b = x \cdot z = \cos c \cos a + \sin c \sin a\, (y_x \cdot y_z);$$

essendo $\sin c \sin a > 0$ e $-1 < (y_x \cdot y_z) < 1$ (se y_x ed y_z fossero paralleli i versori x, y, z sarebbero linearmente dipendenti) si ha $-\sin c \sin a < \sin c \sin a\, (y_x \cdot y_z) < \sin c \sin a$. Ne segue

$$\cos b > \cos c \cos a - \sin c \sin a = \cos(c + a).$$

Se $c + a \leq \pi$ tale disuguaglianza implica $b < c + a$; se $c + a > \pi$ in ogni caso si ha $b < \pi$, e si conclude.

Esempio 4. La *metrica discreta* su un insieme X è la seguente: preso $\alpha > 0$ (per lo più si prende $\alpha = 1$) si definisce $d : X \times X \to [0, +\infty[$ ponendo $d(x, x) = 0$, e $d(x, y) = \alpha$ se $x \neq y$. La disuguaglianza triangolare è esattamente equivalente alla transitività dell'uguaglianza.

Esempio 5. La metrica riccio sul disco unitario $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ è la seguente: se $x, y \in D$ sono allineati con l'origine, allora $d(x, y) = |y - x|$ è la distanza euclidea; se invece x, y non sono su uno stesso diametro, allora $d(x, y) = |x| + |y|$, somma delle distanze di x ed y dall'origine. Lasciamo al lettore la cura di provare che è distanza. Si noti che due qualsiasi punti distinti della circonferenza hanno distanza 2.

1.0.3. *Palle aperte e chiuse. Sottospazi.* Dato uno spazio metrico (X, d), un punto $a \in X$ ed $r > 0$ reale, si definiscono la palla chiusa di centro a e raggio r:

$$B_d(a, r] = \{x \in X : d(a, x) \leq r\},$$

e la palla aperta di centro a e raggio r:

$$B_d(a, r[= \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

Disegnare le palle aperte per le varie metriche discusse nei precedenti esempi è un utile esercizio. Le palle chiuse centrate nell'origine di $\mathbb{R}^2$ e di raggio 1, per le varie metriche d_p prima descritte, sono come in figura.

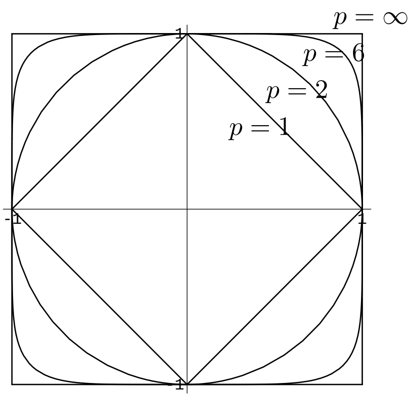

Figura 1. Palle unitarie chiuse.

Nella metrica discreta, se la distanza di due punti distinti è $\alpha > 0$, le palle chiuse di raggio $r \geq \alpha$ coincidono con l'intero spazio; le palle aperte di raggio $r \leq \alpha$ si riducono al solo centro, come anche quelle chiuse di raggio $r < \alpha$. In una sfera unitaria con la metrica geodetica le palle chiuse di raggio $r \geq \pi$ coincidono con tutta la sfera; usando sulla sfera un sistema di coordinate sferiche, la palla chiusa di centro il polo nord e raggio $\alpha < \pi$ è esattamente la calotta dei punti della sfera con colatitudine minore o uguale ad α (latitudine $\geq \pi/2 - \alpha$).

Se (X, d) è uno spazio metrico, ed S è un sottoinsieme di X, la restrizione d_S di d ad $S \times S \subseteq X \times X$ è evidentemente una metrica su S, chiamata metrica indotta; si dice che (S, d_S) è *sottospazio metrico* dello spazio metrico (X, d).

Esempio 6. Nel riccio consideriamo il sottospazio formato dalle punte degli aculei, $S = \{(x_1, x_2) \in D : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$; è uno spazio metrico discreto, in cui due punti distinti hanno distanza 2, come osservato.

1.1. **Spazi di funzioni.** Se T è un insieme, $\mathbb{K}^T$ indica l'insieme di tutte le funzioni di dominio T con valori in $\mathbb{K}$; tale insieme ha una naturale struttura di spazio vettoriale con le operazioni puntualmente definite. Se $f, g \in \mathbb{K}^T$, e $g - f$ è limitata, è definita la sup-norma di $g - f$, detta anche *distanza uniforme* tra f e g, come

$$d_\infty(f, g) = \|g - f\|_\infty := \sup\{|g(t) - f(t)| : t \in T\}.$$

L'insieme delle funzioni limitate di T in $\mathbb{K}$, che è evidentemente un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^T$, si indica con $B(T, \mathbb{K})$, o con $\ell^\infty(T, \mathbb{K})$, e su di esso la *metrica della convergenza uniforme* è definita come sopra

$$d_\infty(f, g) = \|g - f\|_\infty = \sup\{|g(t) - f(t)| : t \in T\}.$$

Verificheremo poi che questa è una metrica.

Per i successivi esempi consideriamo lo spazio $X = C([a, b], \mathbb{K})$ delle funzioni continue su $[a, b]$ con valori in $\mathbb{K}$; esso è sottospazio vettoriale di $B([a, b], \mathbb{K})$ (si ricordi che ogni funzione continua è limitata sul compatto $[a, b]$, teorema di Weierstrass) e può quindi essere munito della distanza uniforme. Un'altra distanza è quella della *media di ordine* 1, definita da

$$d_1(f, g) = \|g - f\|_1 = \int_{[a,b]} |g(t) - f(t)|\, dt;$$

verificheremo poi che è una distanza; un'altra ancora è quella delle medie di ordine 2:

$$d_2(f, g) = \|g - f\|_2 = \left(\int_{[a,b]} |g(t) - f(t)|^2\, dt \right)^{1/2},$$

od in generale delle medie di ordine p, con p reale, $p \geq 1$:

$$d_p(f, g) = \|g - f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |g(t) - f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}.$$

Un'altra possibile distanza tra funzioni continue su $[a, b]$ è quella della *convergenza in misura*:

$$d(f, g) = \int_{[a,b]} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \qquad f, g \in X = C([a, b], \mathbb{K});$$

dimostrare che è una distanza (usare il seguente fatto: se $s, t > 0$ sono reali si ha $(s + t)/(1 + (s + t)) \leq s/(1 + s) + t/(1 + t)$).

1.2. **Norme su uno spazio vettoriale.** Sia X un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale. Assegnare una norma su X vuol dire assegnare una lunghezza ad ogni vettore di X, in modo compatibile con le operazioni di spazio vettoriale. Precisamente:

Definizione. Se X è un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale una norma su X è una funzione $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty[$ tale che

(N_1) $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$; e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ (positività).
(N_2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ ed ogni $x \in X$ (assoluta omogeneità).
(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in X$ (sub–additività o disuguaglianza triangolare).

Si noti che da N_2 segue che il vettore nullo di X ha norma nulla (se $\alpha = 0 \in \mathbb{K}$ allora $0x = 0 \in X$); N_1 dice che esso è l'unico vettore che ha norma nulla.

Se su X è assegnata una norma $\|\cdot\|$, da essa si deduce subito una distanza, ponendo $d(x, y) = \|y - x\|$ per ogni $x, y \in X$. Verifichiamo che effettivamente questa è una distanza su X: si ha $d(x, y) = 0$ se e solo se $\|y - x\| = 0$, e per N_1 questo accade se e solo se $y - x = 0$, e cioè se e solo se $y = x$. Da N_2 si deduce subito che $\|v\| = \|-v\|$ per ogni $v \in X$, e quindi che $\|y - x\| = \|x - y\|$ per ogni $x, y \in X$; ciò mostra che d è simmetrica. Infine la disuguaglianza triangolare è chiaramente implicata da N_3:

$$d(x, z) = \|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = d(y, z) + d(x, y).$$

Una norma su X quindi individua una distanza sullo spazio vettoriale X. Il viceversa non è vero: N_2 ed N_3 sono condizioni di compatibilità della norma con le operazioni di spazio vettoriale, cose che una metrica arbitraria in generale non rispetta. Ad esempio, prendiamo in $\mathbb{R}^2$ la metrica *riccio* come nell'esempio ??.??, cioè $d(x, y) = |y - x|$ se x, y sono linearmente dipendenti (cioè allineati con l'origine), $d(x, y) = |x| + |y|$ altrimenti. Non esiste alcuna norma che abbia questa come distanza associata: tale norma sarebbe necessariamente quella euclidea, essendo $d(x, 0) = |x|$, ma se $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$ la loro distanza è 2, e non $|e_2 - e_1| = \sqrt{2}$. Il successivo facile esercizio chiarisce la questione.

Esercizio 7. Sia X spazio vettoriale, sia $\|\cdot\|$ una norma su X, con $d(x,y) = \|y - x\|$ la metrica associata. Allora d è invariante per traslazioni, si ha cioè $d(x,y) = d(x+a, y+a)$ per ogni $x, y, a \in X$, ed assolutamente omogenea, cioè si ha $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ ed ogni $x, y \in X$, Inversamente, se $d : X \times X \to [0, +\infty[$ è una metrica su X invariante per traslazioni ed assolutamente omogenea, allora la posizione $\|x\| = d(0,x)$ definisce una norma su X che ha d come distanza associata.

Molte delle precedenti distanze erano definite da norme: su $\mathbb{K}^n$ (identificabile con l'insieme $\mathbb{K}^{\{1,\dots,n\}}$ delle funzioni dall'insieme $\{1,\dots,n\}$ in $\mathbb{K}$) dato p reale, con $p \ge 1$ la funzione

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

è una norma su $\mathbb{K}^n$ (la verifica è facile solo per $p = 1$); anche

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k| : \, k = 1,\dots,n\},$$

è una norma su $\mathbb{K}^n$. Su $B(T, \mathbb{K}) = \ell^\infty(T, \mathbb{K})$ la funzione

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|;\, t \in T\},$$

è una norma. Verifichiamolo; positività ed omogeneità sono facili. Per la subadditività: date $f, g \in \ell^\infty(T, \mathbb{K})$ si ha

$$|(f+g)(t)| = |f(t) + g(t)| \le |f(t)| + |g(t)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

per ogni $t \in T$. Ma allora anche $\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, come si voleva.

La metrica della convergenza in misura non è definita da una norma: infatti si ha

$$d(f,0) = \int_{[a,b]} \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|}\, dt \le \int_{[a,b]} dt = b - a,$$

cioè , ogni funzione dista dalla funzione nulla non più che $b-a$; se la distanza fosse indotta da una norma, $d(\alpha f, 0)$ dovrebbe coincidere con $|\alpha| d(f,0)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$, cosa che chiaramente non avviene.

Esercizio 8. Indichiamo con $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'insieme delle successioni a valori in $\mathbb{K}$ che formano serie assolutamente convergenti; cioè una successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sta in ℓ^1 se e solo se si ha

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Dimostrare che ℓ^1 è spazio vettoriale, e che $x \mapsto \|x\|_1$ è una norma su di esso.

2. Esercizi e domande tipo

Esercizio 9. Elencare tutte le topologie sull' insieme $\{0,1\}$ con due elementi. (F)

Risoluzione. Sono $\{\emptyset, \{0,1\}\}$ (topologia banale); $\tau_0 = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}\}$ in cui 0 è punto isolato ed 1 no, $\tau_1 = \{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}\}$ in cui 1 è punto isolato e 0 no, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}, \{1\}\}$ topologia discreta. □

Esercizio 10. Sia S la retta di Sorgenfrey destra (vedi A Due,2.4.5). Fissiamo $a, b \in S$ con $a < b$: mostrare che $[a,b[$ è chiusaperto in S; mostrare che $]a,b[$ è aperto ma non chiuso, e descriverne la chiusura; cosa si può dire per $]a,b]$? (F)

Esercizio 11. Sempre con S retta di Sorgenfrey destra, dimostrare che:

Una successione crescente x_j di S ha limite in S se e solo se è definitivamente costante (MD).

Una successione decrescente limitata converge all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini (F).

Risoluzione. Sia a limite in S della successione crescente x_j. La successione si trova definitivamente in $[a, a+1[$ e quindi è limitata, in particolare ha estremo superiore finito, sia esso b. Affermiamo che deve essere $a = b$, e che esiste $\bar{j} \in \mathbb{N}$ tale che sia $x_j = a = b$ per $j \ge \bar{j}$. Chiaramente non può essere $a > b$ (se la successione è definitivamente in $[a, a+1[$ con $a > b$ sarebbe $x_j \ge a > b = \sup\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$, assurdo. Nemmeno può essere $a < b$: la successione sarebbe definitivamente in $[a, c[$, per ogni c con $a < c < b$, e quindi si avrebbe $\sup\{x_j : j \in \mathbb{N}\} \le c < b$, assurdo. Deve quindi essere $a = b$; e poiché esiste $\bar{j}$ tale che per $j \ge \bar{j}$ si ha $x_j \in [a, a+1[$, per $j \ge \bar{j}$ si ha $x_j \ge a = b = \sup\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$, e quindi $x_j = a$ per $j \ge \bar{j}$, come voluto.

La parte rimanente è identica al caso visto in Matematica 1 della topologia usuale: se $a = \inf\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{j} \in \mathbb{N}$ tale che sia $x_{\bar{j}} < a + \varepsilon$ (seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore); per $j \geq \bar{j}$ si ha $x_j \leq x_{\bar{j}}$ per la decrescenza della successione e quindi $a \leq x_j \leq x_{\bar{j}} < a + \varepsilon$ per $j \geq \bar{j}$; ne segue che la successione converge ad a in S. $\square$

Esercizio 12. In A Due, 2.3.39 si dimostra che in ogni spazio topologico (X, τ) la chiusura dell'unione di due sottoinsiemi è uguale all'unione delle chiusure, $\mathrm{cl}_X(A \cup B) = \mathrm{cl}_X(A) \cup \mathrm{cl}_X(B)$, se $A, B \subseteq X$. Mostrare la stessa cosa usando il fatto che un punto sta nella chiusura di un insieme se e solo se ogni suo intorno interseca l'insieme stesso.

Risoluzione. (traccia: l'unico punto non completamente ovvio è che se $p \in \mathrm{cl}_X(A \cup B)$ allora $p \in \mathrm{cl}_X(A)$ oppure $p \in \mathrm{cl}_X(B)$; mostriamo che se $p \in \mathrm{cl}_X(A \cup B)$, ma $p \notin \mathrm{cl}_X(B)$, allora si ha $p \in \mathrm{cl}_X(A)$; se U è intorno di p, e V_0 è un intorno di p tale che $B \cap V_0 = \emptyset$, $U \cap V_0$ è intorno di p disgiunto da B; ma poiché per ipotesi $p \in \mathrm{cl}_X(A \cup B)$, si ha $(U \cap V_0) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, e questa intersezione coincide con $(U \cap V_0) \cap A$; ne segue $U \cap A \neq \emptyset$, e quindi $p \in \mathrm{cl}_X(A)$.) $\square$

Esercizio 13. Dimostrare che in ogni spazio topologico (X, τ) l'interno dell'unione di due sottoinsiemi contiene l'unione degli interni, e che l'inclusione può essere propria (dare un esempio in $\mathbb{R}$). Mostrare che l'interno dell'intersezione è sempre uguale all'intersezione degli interni.(F)

Esercizio 14. (Esercizio 2.4.7) Mostrare che lo spazio topologico (X, τ) è di Hausdorff se e solo se per ogni $x \in X$ il singolo $\{x\}$ è intersezione degli intorni chiusi di x in X (MD).

Risoluzione. Supponiamo X di Hausdorff, fissiamo $x \in X$, e mostriamo che se $y \in X$ è diverso da x, allora esiste un intorno chiuso W di x con $y \notin W$. Infatti esistono intorni disgiunti U e V di x, y; non è restrittivo supporre che essi siano aperti, in particolare che sia aperto V; allora $W = X \setminus V$ è chiuso, è intorno di X, dato che contiene U, che è intorno di x, e chiaramente $y \notin W$.

Viceversa supponiamo che ogni singolo sia intersezione di intorni chiusi, e dimostriamo che lo spazio è di Hausdorff. Dati x ed y distinti, esiste un intorno chiuso W di x che non contiene y (perché $\{x\}$ è intersezione degli intorni chiusi di x); quindi $X \setminus W$, aperto, è intorno di y; W ed $X \setminus W$ sono intorni disgiunti di x, y, rispettivamente. $\square$

Esercizio 15. Consideriamo lo spazio T così ottenuto: come insieme, $T = \mathbb{R}$; dichiariamo aperti gli insiemi $A \subseteq T$ tali che

$0 \notin A$ ed A è aperto usuale di $\mathbb{R}$;

$0 \in A$, ed A è aperto usuale di $\mathbb{R}$ che contiene un insieme della forma $]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$, per qualche $a > 0$.

Dimostrare che questa è effettivamente una topologia su T, che rende T di Hausdorff. (F) Dimostrare che T è compatto. Si consideri poi la funzione $\varphi : T \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\varphi(t) = \left(\frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \right),$$

(equazioni parametriche razionali della *lemniscata di Bernoulli*, si veda A Due, pag.243). Esse danno un omeomorfismo di T su $\varphi(T)$.

Risoluzione. Faccio solo la compattezza di T. Sia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un arbitrario ricoprimento aperto di T. Esiste $\bar{\lambda}$ tale che $0 \in A_{\bar{\lambda}}$; esiste allora $a > 0$ tale che $A_{\bar{\lambda}} \supseteq]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$. Poiché $[-a, a]$ è compatto nella topologia usuale, e chiaramente $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è un suo ricoprimento aperto (nella topologia usuale), esiste un sottoinsieme finito $\{\lambda(1), \dots, \lambda(m)\} \subseteq \Lambda$ tale che $[-a, a] \subseteq A_{\lambda(1)} \cup \cdots \cup A_{\lambda(m)}$; ne segue che $T = A_{\lambda(1)} \cup \cdots \cup A_{\lambda(m)} \cup A_{\bar{\lambda}}$.

$\square$

Esercizio 16. (La retta con due origini) È lo spazio L che si ottiene in questo modo: $L = \mathbb{R} \cup \{0'\}$, dove $0'$ è un oggetto non di $\mathbb{R}$; gli aperti sono gli aperti usuali di $\mathbb{R}$ che non contengono 0, e gli insiemi della forma $(A \setminus \{0\}) \cup \{0'\}$ se A è aperto usuale di $\mathbb{R}$ che contiene 0. Mostrare che L non è di Hausdorff, e che le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to L$ definite da $f(x) = g(x) = x$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0'$ sono entrambe omeomorfismi di $\mathbb{R}$ su $f(\mathbb{R})$ e $g(\mathbb{R})$, rispettivamente.

Esercizio 17. Sia S la retta di Sorgenfrey destra. Dimostrare che l'addizione $(x, y) \mapsto x + y$ è continua come funzione di $S \times S$ in S, ma che la funzione $x \mapsto -x$ non è continua in alcun punto come funzione di S in S (in generale una funzione strettamente decrescente non è continua in alcun punto come funzione di S in S). Quindi la retta di Sorgenfrey non è gruppo topologico rispetto all'addizione (il passaggio all'opposto non è continuo) ed in particolare non è spazio vettoriale topologico.

Esempio 18. *(Una successione uniformemente limitata di $C([0,1])$ che non ha sottosuccessioni uniformemente convergenti)* Si prende $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_0(t) = 0$ per $t \leq 0$, $t \geq 1$, ed $f_0(t) = \min\{2t, 2-2t\}$ per $t \in [0,1]$, e si pone $f_k(t) = f_0(2^k t)$, per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, per $t \in [0,1]$. I grafici sono come in figura. Tale successione non ha sottosuccessioni uniformemente convergenti, come ora vediamo in due modi.

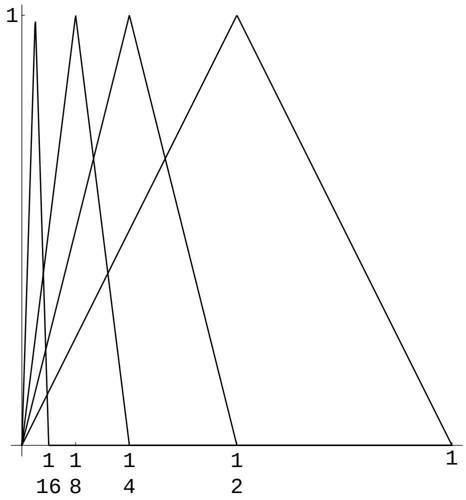

Figura 2. Grafici delle f_k.

Primo metodo Si noti che la successione converge puntualmente alla costante 0, in altre parole si ha $\lim_{k\to+\infty} f_k(t) = 0$ per ogni $t \in [0,1]$. Ne segue che ogni sua sottosuccessione converge puntualmente alla costante 0. Ma $\|f_k\|_\infty = 1$ per ogni k, e quindi nessuna successione può convergere uniformemente a 0. Ne segue che nessuna sottosuccessione converge uniformemente.

Secondo metodo Si noti che $f_k(1/2^{k+1}) = 1$, mentre $f_{k+l}(1/2^{k+1}) = 0$ per $l \geq 1$; pertanto si ha $\|f_k - f_{k+l}\|_\infty \geq f_k(1/2^{k+1}) - f_{k+l}(1/2^{k+1}) = 1 - 0 = 1$; si ha insomma $\|f_k - f_j\|_\infty \geq 1$ se $k \neq j$. La successione f_k è quindi tale che due suoi termini distinti qualsiasi distano fra loro non meno di 1; ne segue che essa non ha sottosuccessioni di Cauchy, a più forte ragione non ha sottosuccessioni convergenti.

Esercizio 19. Sia S la retta di Sorgenfrey destra.

(i) Si provi che $F \subseteq S$ è chiuso in S se e solo se per ogni $E \subseteq F$ che sia inferiormente limitato e non vuoto si ha $\inf E \in F$ (MD).
(ii) Sia $K \subseteq S$; supponiamo che K ammetta una successione strettamente crescente, che esista cioè una funzione strettamente crescente $j \mapsto x_j$ di $\mathbb{N}$ in K. Dimostrare che allora K non è compatto in S (usando la successione, costruire una partizione di S in infiniti aperti, infiniti dei quali contengono elementi di K ... ; MD).
(iii) Mostrare che il sottoinsieme K di S è compatto se e solo se per ogni sottoinsieme non vuoto E di K esistono sia $\inf E$ che $\max E$, ed appartengono a K (D).

Esercizio 20. Mostrare che il prodotto di due spazi metrici totalmente limitati è totalmente limitato (nella metrica prodotto). Dedurne che il prodotto di due spazi metrizzabili compatti è compatto (F).

Risoluzione. Siano (X, d_X) ed (Y, d_Y) totalmente limitati. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $x_1, \dots x_m \in X$ ed $y_1, \dots, y_n \in Y$ tali che:

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} B_X(x_j, \varepsilon]; \qquad Y = \bigcup_{k=1}^{n} B_Y(y_k, \varepsilon].$$

Allora si ha

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{1\leq j\leq m,\\ 1\leq k\leq n}} B_{X\times Y}((x_j, y_k), \varepsilon];$$

infatti, dato $x \in X$ esiste $j \in \{1, \dots, m\}$ tale che $\|x - x_j\|_X \leq \varepsilon$, e dato $y \in Y$ esiste $k \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\|y - y_k\|_Y \leq \varepsilon$, per cui $\|(x,y) - (x_j, y_k)\|_{X\times Y} = \max\{\|x - x_j\|_X, \|y - y_k\|_Y\} \leq \varepsilon$. Poiché un prodotto di metrici completi è completo, il risultato sulla compattezza segue subito. $\square$

Esercizio 21. Dimostrare che uno spazio metrico totalmente limitato è topologicamente a base numerabile (per $n \in \mathbb{N}$, siano $x_1, \dots, x_{p(n)} \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{j=1}^{p(n)} B(x_j, 1/2^n[;$$

sia $\mathcal{B}$ l'insieme di tutte le palle così ottenute; chiaramente $\mathcal{B}$ è numerabile; mostrare che è una base di aperti ... ; F).

Il cubo di Hilbert

Dato che un prodotto di compatti è compatto, ogni spazio quale $I^n = I \times \cdots \times I$, dove $I = [0, 1]$ con la topologia usuale, è compatto. Il cubo di Hilbert è il prodotto di un'infinità numerabile di intervalli $[0, 1]$, ed esso pure è compatto. Sia a_n successione di reali strettamente positivi appartenente ad $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$; sia Q l'insieme delle successioni x di reali tali che si abbia $x(n) \le a_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$; per lo più si prende $p = 2$, ed $a_n = 1/(n + 1)$; ma la maggiore generalità non disturba. Si pone su Q la topologia indotta da quella di ℓ^p; dimostriamo che Q è compatto, dimostrando che è completo e totalmente limitato nella metrica indotta da quella di ℓ^p.

La completezza di Q nella metrica indotta è chiaramente equivalente all'affermare che Q è chiuso in ℓ^p: infatti sappiamo che ℓ^p è di Banach, e quindi che i suoi sottospazi metrici completi sono esattamente quelli chiusi. Sappiamo che la convergenza in ℓ^p implica la convergenza puntuale; se f_j è una successione di Q che converge ad $f \in \ell^p$ si ha $\lim_{j\to\infty} f_j(n) = f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; poiché $f_j \in Q$, si ha $|f_j(n)| \le a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e passando al limite si ha allora anche $|f(n)| \le a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il che prova che si ha $f \in Q$. Ne segue che Q è chiuso in ℓ^p, e quindi completo.

Mostriamo ora che Q è totalmente limitato. Fissato $\varepsilon > 0$, prendiamo anzitutto $m \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^p \le \varepsilon^p$. Consideriamo ora le restrizioni a $\{0, 1, \dots, m\}$ degli elementi di Q, cioè l'insieme

$$Q_m = \{f_{|\{0,1,\dots,m\}} : f \in \mathbb{Q}\} = [-a_0, a_0] \times [-a_1, a_1] \times \times [-a_m, a_m];$$

Q_m è compatto, essendo il prodotto di $m + 1$ intervalli compatti, in particolare è totalmente limitato, in qualsiasi norma si prenda per $\mathbb{R}^{\{0,1,\dots,m\}}$, anche per la $p-$norma; esistono allora $f_1, \dots, f_r \in Q$ tali che ogni elemento di Q_m dista dalla restrizione a $\{0, 1, \dots, m\}$ di qualche f_j meno di ε; ne segue che per ogni $f \in Q$ esiste $j \in \{1, \dots, r\}$ tale che

$$\sum_{n=0}^{m} |f(n) - f_j(n)|^p \le \varepsilon^p;$$

si ha allora

$$\|f - f_j\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} |f(n) - f_j(n)|^p = \sum_{n=0}^{m} |f(n) - f_j(n)|^p + \sum_{n=m+1}^{\infty} |f(n) - f_j(n)|^p \le$$

$$\varepsilon^p + \sum_{n=m+1}^{\infty} |f(n) - f_j(n)|^p$$

si ha ora $|f(n) - f_j(n)| \le |f(n)| + |f_j(n)| \le a_n + a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dato che $f, f_j \in Q$; ne segue

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |f(n) - f_j(n)|^p \le \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^p a_n^p \le 2^p \varepsilon^p,$$

ed usando quanto fatto sopra si ottiene $\|f - f_j\|_p^p \le (2^p + 1)\varepsilon^p$. Si è quindi visto che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j \in \{1, \dots, r\}$ tale che sia $\|f - f_j\|_p \le (2^p + 1)^{1/p}\varepsilon$, numero positivo piccolo quanto si vuole con ε, il che prova che Q è totalmente limitato. Si è provato che il cubo di Hilbert è compatto.

Essendo compatto nello spazio di dimensione infinita ℓ^p, il cubo di Hilbert non ha punti interni (An. Due, 2.17.6). Mostriamo che 0 non è interno a Q. Infatti, per ogni $\delta > 0$ fissato, $\delta\, e_n$, la successione che vale δ per $k = n$ e 0 altrimenti, sta in $B(0, \delta]$ ma certamente non appartiene a Q per n grande: essendo $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \delta$ se $n \ge m$; per $n \ge m$, $\delta\, e_n$ sta quindi in $B(0, \delta]$ ma non in Q.

Esercizio 22. Sia $a_n > 0$ successione infinitesima; sia $Q = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |f(n)| \le a_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che Q è compatto in ℓ^{∞}.

Esercizio 23. Siano X, Y metrizzabili, con Y compatto, e sia $f : X \to Y$ funzione tale che il grafico $G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ è chiuso in $X \times Y$. Mostrare che allora f è continua (D).

Risoluzione. Sia $a \in X$, e sia x_j successione di X che tende ad a; si deve provare che $f(x_j)$ converge ad $f(a)$. Se così non è , esiste un intorno V di $f(a)$ in Y tale che $f(x_j) \notin V$ per infiniti indici $j \in \mathbb{N}$; in altre parole esiste una sottosuccessione $x_{\nu(k)}$ di x_j tale che $f(x_{\nu(k)}) \notin V$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Tale successione ha una sottosuccessione che converge ad un $b \in Y$ nel compatto Y, sia essa $f(x_{\nu(\mu(r))})$. La successione $(x_{\nu(\mu(r))}, f(x_{\nu(\mu(r))})) \in G$ converge quindi ad (a, b) in $X \times Y$, ed essendo G chiuso in $X \times Y$ deve essere $(a, b) \in G$, ovvero $b = f(a)$. Siamo arrivati ad un assurdo: $f(x_{\nu(\mu(r))})$ non può convergere ad $f(a)$, dato che sta sempre fuori dell'intorno V di $f(a)$.

$\square$

. Teorema di estensione delle funzioni lipschitziane *Siano X, Y metrizzabili, con Y completo, sia D denso in X, e sia $f : D \to Y$ lipschitziana. Allora f si estende in modo unico ad una funzione $\bar{f} : X \to Y$, lipschitziana con la stessa costante di Lipschitz.*

Risoluzione. Sia $a \in X$; dimostriamo che esiste in Y

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x);$$

allo scopo basta provare che se x_j è una successione di D che tende ad a in X, allora $f(x_j)$ ha limite in Y (vedi Analisi Due, 2.5.6(i)). La successione x_j essendo convergente è di Cauchy; e poiché f è lipschitziana trasforma la successione di Cauchy $f(x_j)$ in una successione di Cauchy in Y (fissato $\varepsilon > 0$, esiste $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|x_j - x_k\|_X \le \varepsilon$ per $j, k \ge j_\varepsilon$; per tali j, k si ha allora anche $\|f(x_j - f(x_k)\|_Y \le L\|x_j - x_k\|_X \le L\varepsilon$, se L è una costante di Lipschitz per f). Si definisce in questo modo una funzione $\bar{f} : X \to Y$. Se $a \in D$, si ha $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = f(a)$ perché f è continua in D, essendovi lipschitziana; ne segue che $\bar{f}(a) = f(a)$ se $a \in D$, cioè , $\bar{f}$ estende f. Inoltre L è anche costante di Lipschitz di $\bar{f}$, se lo è per f: se $a, b \in X$, siano x_j, y_j successioni di D convergenti ad a, b rispettivamente; si ha $\|f(x_j) - f(y_j)\|_Y \le L\|x_j - y_j\|_X$ per ogni j, e passando al limite per $j \to \infty$ si ottiene $\|\bar{f}(a) - \bar{f}(b)\|_Y \le L\|a - b\|_X$. $\square$

Osservazione. Per il principio di identità delle funzioni continue $\bar{f}$ è l'*unica estensione continua* di f ad X. Inoltre, l'ipotesi di lipschitzianità di f è più forte del necessario, e può essere attenuata nell'ipotesi di uniforme continuità; la dimostrazione è praticamente uguale; tuttavia ritengo inutile introdurre il concetto di continuità uniforme per questo scopo soltanto. La semplice continuità è invece chiaramente insufficiente, come innumerevoli esempi elementari mostrano (ad esempio $D =]-1, 1[$, $X = [-1, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, tutti con la metrica usuale, ed $f(x) = 1/(1 - x^2)$).

Completamento di uno spazio metrico

Ogni spazio metrico non completo può essere completato: se esso non è completo, significa che qualche sua successione di Cauchy non ha limite; ebbene, si possono aggiungere elementi che fungano da limite per le successioni di Cauchy, ed ottenere uno spazio metrico completo di cui l'originario è sottospazio metrico denso. Se il nostro spazio non completo (X, d_X) è sottospazio metrico di uno spazio metrico completo (Y, d_Y) completarlo è facile: se X non è completo, esso non è chiuso in Y; la sua chiusura $\bar{X}$ in Y è invece completa, ed X vi è ovviamente sottospazio denso. Per completare uno spazio metrico basta quindi essere in grado di pensarlo come sottospazio metrico di uno spazio metrico completo, e questo è quanto fatto in Analisi Due 2.3.9; ripetiamo l'enunciato in modo leggermente diverso:

. *Ogni spazio metrico si immerge isometricamente in uno spazio di Banach; se (X, d) è spazio metrico, esiste un'immersione di (X, d) in $\ell^\infty(X, \mathbb{R})$ che conserva le distanze.*

Tale immersione è fatta nel seguente modo: si fissa $a \in X$, e si definisce, per ogni $x \in X$, $\varphi_x : X \to \mathbb{R}$ ponendo $\varphi_x(\xi) = d(\xi, x) - d(\xi, a)$ per ogni $\xi \in X$; si dimostra che $\varphi_x \in \ell^\infty(X, \mathbb{R})$, e che $\|\varphi_x - \varphi_y\|_\infty = d(x, y)$, per ogni $x, y \in X$; quindi $x \mapsto \varphi_x$ è immersione isometrica di (X, d) in $\ell^\infty(X, \mathbb{R})$; la dimostrazione, facile, è in 2.3.9 (ma l'immersione in se stessa non è importante; è importante il fatto che esista).

Diamo la definizione formale di completamento.

Definizione. Sia (X, d) spazio metrico. Un suo completamento è una coppia $(j, (\tilde{X}, \tilde{d}))$ dove $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è spazio metrico completo, e $j : X \to \tilde{X}$ è un'immersione isometrica di X in un sottospazio denso di $\tilde{X}$.

Se (X,d) è completo, ogni spazio ad esso isometrico è pure completo, come è immediato vedere (facile esercizio!); e poiché ogni spazio completo è chiuso in ogni spazio di cui è sottospazio metrico, un completamento di uno spazio completo è semplicemente ogni spazio ad esso isometrico (a meno di isometrie biiettive, un completamento di uno spazio completo è lo spazio stesso). Ogni spazio metrico ammette un completamento: si prende $j(x)=\varphi_x$ come sopra, $\tilde X$ la chiusura di $j(X)$ in $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$, e $\tilde d$ la distanza $\|u-v\|_\infty$ indotta da quella in $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$.

. Unicità essenziale del completamento *Siano $j_1: X\to \tilde X_1$ e $j_2: X\to\tilde X_2$ completamenti di X, Esiste allora un'unica isometria biiettiva $\alpha:\tilde X_1\to\tilde X_2$ tale che $\alpha\circ j_1=j_2$.*

Dimostrazione. Si definisce α su $j_1(X)$ ponendo $\alpha(j_1(x))=j_2(x)$ per ogni $x\in X$; α è ovviamente isometria su $j_1(X)$, e per il teorema di estensione delle funzioni lipschitziane si estende ad una funzione lipschitziana di $\tilde X_1$ in $\tilde X_2$, dato che $\tilde X_2$ è completo. Similmente, β definito su $j_2(X)$ ponendo $\beta(j_2(x))=j_1(x)$ per ogni $x\in X$ è isometria di $j_2(X)$ su $j_1(X)$ che si estende ad una funzione lipschitziana $\beta:\tilde X_2\to\tilde X_1$. La funzione composta $\beta\circ\alpha:\tilde X_1\to\tilde X_1$ è lipschitziano, quindi continua, ed è l'identità su $j_1(X)$, denso in $\tilde X_1$; quindi $\alpha\circ\beta$ è l'identità di $\tilde X_1$. Similmente $\beta\circ\alpha$ è l'identità di $\tilde X_2$. Ne segue che α e β sono omeomorfismi inversi l'uno dell'altro, e sono isometrie su sottospazi densi, quindi isometrie sugli spazi interi. $\square$

Nel senso sopra si può quindi parlare de "il completamento" di uno spazio metrico. A parte il modo di costruirlo, si pensa sempre di avere aggiunto elementi all'originario spazio, per completarlo. Il primo esempio visto è stato quello di costruzione dei reali a partire dai razionali, aggiungendo gli irrazionali (ma la strada da noi sopra seguita per uno spazio metrico qualunque richiede già la conoscenza dei numeri reali).

Esempio 24. L'insieme $\mathbb{R}$ dei reali con la metrica $\psi_{\arctan}(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$ è isometrico all'intervallo $]-\pi/2,\pi/2[$ di $\mathbb{R}$ con la metrica usuale, l'isometria essendo la funzione $x\mapsto\arctan x$; un completamento è quindi la chiusura di $]-\pi/2,\pi/2[$ in $\mathbb{R}$, e cioè $[-\pi/2,\pi/2]$, con la metrica usuale; è chiaro che noi preferiamo pensare il completamento come $\tilde{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, con la metrica $\tilde d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$, avendo posto $\arctan(\pm\infty)=\pm\pi/2$. Similmente, si prende su $\mathbb{R}$ la metrica $\psi_{\exp}(x,y)=|e^x-e^y|$; la funzione exp stabilisce un'isometria di questo spazio metrico con $]0,+\infty[$, la cui chiusura $[0,+\infty[$ in $\mathbb{R}$ è allora completamento per $(\mathbb{R},\psi_{\exp})$; anche qui preferiamo pensare al completamento come a $[-\infty,+\infty[$, con la metrica $\tilde d(x,y)=|e^x-e^y|$, dove si è posto $e^{-\infty}=0$.

D'ora in poi pensiamo al completamento di uno spazio metrico X come ad un sovraspazio $\tilde X$ dello spazio dato in cui lo spazio X è denso. Se $(X,\|\cdot\|_X)$ è spazio normato non completo, cioè non di Banach, esso ha un completamento metrico $\tilde X$. Ebbene, si dimostra che la norma e le operazioni di spazio vettoriale si estendono a $\tilde X$, che quindi diventa uno spazio di Banach in cui X è sottospazio denso.

Accenniamo una dimostrazione di quanto sopra affermato. Anzitutto l'addizione $\sigma: X\times X\to X$ si estende a $\tilde s:\tilde X\times\tilde X\to\tilde X$, dato che essa è lipschitziana se su $X\times X$ si mette la metrica prodotto:

$$\|\sigma(x_1,y_1)-\sigma(x_2,y_2)\|_X=\|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)\|_X=\|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\|_X\le$$
$$\|(x_1-x_2)\|_X+\|(y_1-y_2)\|_X\le 2\max\{\|(x_1-x_2)\|_X,\|(y_1-y_2)\|_X\}$$

Anche la norma è lipschitziana e si estende. Inoltre, per ogni $\alpha\in\mathbb{K}$ fissato, la funzione $h_\alpha: X\to X$ data da $h_\alpha(x)=\alpha\, x$ è lipschitziana (con costante $|\alpha|$) e si estende quindi ad una funzione $\bar h_\alpha:\tilde X\to\tilde X$. Si sono quindi estese sia l'addizione che la moltiplicazione scalari$\times$vettori, che la norma. Bisogna mostrare che tali estensioni rendono $\tilde X$ spazio vettoriale normato, cioè che l'addizione estesa è commutativa, associativa, con lo 0, che c'è la distributività della moltiplicazione scalari$\times$vettori rispetto all'addizione, che la norma è subadditiva, eccetera. Tutto questo si vede usando il fatto che queste proprietà valgono sul sottospazio denso X.

È anche importante osservare che il completamento di uno spazio a prodotto scalare è ancora a prodotto scalare: il prodotto scalare, tenendo fissa una variabile, è lipschitziano nell'altra, come subito si vede con la disuguaglianza di Cauchy–Schwartz, e quindi si estende al completamento (in due passi). Insomma, uno spazio *pre–hilbertiano* ha come completamento uno *spazio di Hilbert*.

2.0.1. *Un teorema di estensione per operatori lineari continui in spazi di Banach.* È molto usato il seguente teorema di estensione per operatori lineari, diretta conseguenza del teorema di estensione delle funzioni lipschitziane.

Proposizione. *Siano X ed Y spazi normati con Y di Banach, sia E sottospazio vettoriale denso di X, e sia $T: E\to Y$ lineare continua. Esiste allora un'unica estensione continua $\bar T: X\to Y$ di T; tale estensione è lineare, ed ha la stessa norma operatoriale $\|T\|$ di T.*

Dimostrazione. Essendo $T : E \to Y$ lineare, T è lipschitziana, con $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \le 1,\, x \in E\}$ come costante di Lipschitz (A Due, 2.7.2). Essendo per ipotesi Y completo, per il teorema di estensione delle funzioni lipschitziane T si estende ad una funzione $\bar{T} : X \to Y$, con la stessa costante di Lipschitz. Resta solo da verificare che l'estensione è lineare; e questo, grazie alla continuità delle operazioni di spazio vettoriale, è immediato: dati $a, b \in X$ si scelgono successioni $a_j,\, b_j \in E$ convergenti ad a, b rispettivamente; allora $a_j + b_j$ è successione di E che converge ad $a + b$, e per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{K}$ la successione αa_j converge ad αa; si ha allora

$$\bar{T}(a+b) = \lim_{j\to\infty}(T(a_j + b_j)) = \lim_{j\to\infty}(T(a_j) + T(b_j)) = \lim_{j\to\infty} T(a_j) + \lim_{j\to\infty} T(b_j) = \bar{T}(a) + \bar{T}(b),$$

ed anche

$$\bar{T}(\alpha a) = \lim_{j\to\infty} T(\alpha a_j) = \lim_{j\to\infty} \alpha\, T(a_j) = \alpha \lim_{j\to\infty} T(a_j) = \alpha\, \bar{T}(a).$$

□

Esempio 25. Gli spazi $L^p([a,b])$ come completamento di $C([a,b])$ con la norma $\|f\|_p$

Sappiamo che $C([a,b])$ con la norma $\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p\right)^{1/p}$ non è completo (vedi An. Due, 2.12.8); analogamente il sottospazio $C_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ formato dalle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ continue e tali che l'integrale multiplo generalizzato $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p$ sia finito non è completo nella norma $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{1/p}$. Diciamo $C_p(X)$ uno qualsiasi di tali spazi. Il completamento è lo spazio $L^p(X)$. Astrattamente, come sopra si è visto, è facile vedere che il completamento c'è sempre. Ma un completamento astratto, anche se utile, è assai difficile da gestire: occorre un modo per rappresentare i suoi elementi che sia comprensibile e con cui non sia proibitivo lavorare. Il completamento non è a rigore fatto di funzioni, ma di classi di equivalenza di funzioni. Tuttavia ogni utente degli spazi $L^p(X)$ pensa a tali spazi come a spazi di funzioni, in cui però si identificano funzioni *quasi ovunque uguali*, uguali cioè a meno di un insieme di punti di X di misura nulla, insieme su cui tutte le funzioni hanno integrale nullo. Il vero lavoro da fare è considerevole, ed è la teoria dell'integrale di Lebesgue.

Applicazioni della connessione: campi invarianti per rotazioni

Cosa si deve intendere per "campo vettoriale invariante per rotazioni", o "a simmetria sferica"? Significa che quando si ruota la posizione il campo deve ruotare "allo stesso modo"; un attimo di riflessione convince del fatto che è giusto definire tale un campo così fatto: è una funzione $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$ definita in $D = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ (o comunque in un insieme invariante per rotazioni), ed è tale che sia

$$\vec{F}(Rx) = R(\vec{F}(x)) \qquad \text{per ogni } x \in D \text{ ed ogni } R \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n).$$

L'espressione "equivariante per rotazioni" rende meglio l'idea. Dimostriamo che ogni campo continuo equivariante per rotazioni si scrive, se $n \geq 3$ nella forma

$$\vec{F}(x) = \psi(|x|)\frac{x}{|x|}, \quad \text{dove } \psi \in C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R}),$$

mentre se $n \geq 2$ esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, individuato a meno di multipli interi di 2π, tale che

$$\vec{F}(x) = \psi(|x|)\frac{(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)}{|x|}, \quad (x = (x_1, x_2) \in D).$$

Osserviamo anzitutto che $x \mapsto |\vec{F}(x)|$ è funzione solo di $r = |x|$ (infatti $|R(\vec{F}(x))| = |\vec{F}(x)| = |\vec{F}(Rx)|$), e possiamo chiamarlo $\rho(r)$; per un $r > 0$ per cui $\rho(r) \neq 0$ si scrive, posto $\vec{\varphi}(x) = \vec{F}(x)/|\vec{F}(x)| = \vec{F}(x)/\rho(r)$

$$\vec{F}(x) = \rho(r)\vec{\varphi}(x) = \rho(r)\vec{\varphi}(r(x/r)),$$

e posto $\vec{v}(u) = \vec{\varphi}(ru)$ la funzione $\vec{v}: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ è continua e commuta con ogni elemento di $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ Occorre quindi trovare le funzioni $\vec{v}: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ che sono $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ equivarianti, tali cioè che sia $\vec{v}(Ru) = R\vec{v}(u)$ per ogni $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ed ogni $R \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$. Si ha ora

. *Se $n \geq 3$ e $\vec{v}: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ è continua ed $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ equivariante, allora $\vec{v}$ è l'identità di $\mathbb{S}^{n-1}$, oppure $\vec{v}(u) = -u$, per ogni $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Se invece $n = 2$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{v}$ è la rotazione di $\mathbb{R}^2$ di angolo α, cioè*

$$\vec{v}(u) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} u, \quad \textit{per ogni } u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Dimostrazione. Ci limitiamo ad $n = 3$, ma è chiaro che il metodo ha carattere generale. Fissato $\nu \in \mathbb{S}^2$, supponiamo di avere un sistema di coordinate per cui $\nu = e_3$. Per ogni rotazione R intorno all'asse z si deve avere $\vec{v}(R\nu) = R\vec{v}(\nu)$, ma $R\nu = \nu$ per ogni tale rotazione, e quindi anche $\vec{v}(\nu) = R\vec{v}(\nu)$; ma allora deve essere $\vec{v}(\nu) = \nu$, oppure $\vec{v}(\nu) = -\nu$: in ogni altro caso infatti $Rv(\vec{\nu})$, al variare di R nelle rotazioni attorno all'asse z non sarebbe costante, ma descriverebbe un parallelo di $\mathbb{S}^2$, il circolo intersezione con la sfera del piano parallelo al piano xy che passa per $\vec{v}(\nu)$. Per ogni $\nu \in \mathbb{S}^2$ deve quindi essere $\vec{v}(\nu) = \nu$, oppure $\vec{v}(\nu) = -\nu$. Sia

$$F = \{\nu \in \mathbb{S}^2 : \vec{v}(\nu) = \nu\}; \quad G = \{\nu \in \mathbb{S}^2 : \vec{v}(\nu) = -\nu\}.$$

Tali insiemi sono chiusi (l'insieme dei punti in cui due funzioni continue a valori in uno spazio di Hausdorff coincidono è un chiuso) e sono disgiunti (perché l'identità e la mappa antipodale non coincidono in alcun punto); ed abbiamo appena visto che $F \cup G = \mathbb{S}^2$. Essendo $\mathbb{S}^2$ connessa, uno di tali insiemi è vuoto, e l'altro coincide con $\mathbb{S}^2$.

Se $n = 2$, per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia R_α la rotazione di angolo α; se $\vec{v}(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha) = R_\alpha(1,0)$ si ha, se $x = (x_1, x_2) = R_\vartheta(1,0)$:

$$\vec{v}(x_1, x_2) = \vec{v}(R_\vartheta(1,0)) = R_\vartheta(\vec{v}(1,0))) = R_\vartheta(R_\alpha(1,0)) = R_\alpha(R_\vartheta(1,0)) = R_\alpha(x_1, x_2),$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Esercizio 26. Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ funzione. Supponiamo che f trasformi intervalli in intervalli. Mostrare che non necessariamente f è continua. Si supponga poi che f sia a fibre chiuse (cioè che $f^{\leftarrow}(y)$ sia chiuso in I per ogni $y \in \mathbb{R}$), e che per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ contenuto in I l'immagine $f([a,b])$ sia intervallo. Mostrare che allora f è continua.

(*Suggerimento*: per la prima parte: $x \mapsto \sin(1/x)$...; per la seconda: dato $y_0 = f(x_0)$, e $\varepsilon > 0$, si prenda il chiuso $C = f^{\leftarrow}(\{y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon\})$; sia $[a,b]$ intervallo di I disgiunto da C che sia intorno di x_0...)

Esercizio 27. (Hausdorff) Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ funzione; si supponga che il grafico $G = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ sia sottoinsieme chiuso e connesso di $I \times \mathbb{R}$. Mostrare che allora f è continua.

(*Suggerimento*: ricondursi all'esercizio precedente; non facile)

Esercizio 28. Spazi localmente connessi Diciamo che uno spazio topologico è localmente connesso (per archi) quando per ogni punto c'è una base di intorni formata da connessi (da connessi per archi). Provare che le condizioni che seguono sono equivalenti:

(i) X è localmente connesso (per archi).
(ii) Ogni aperto A di X ha le componenti connesse aperte (e connesse per archi).
(iii) Ogni punto di X ha una base di intorni aperti e connessi (per archi).

(mostrare che $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$; facile)

Esercizio 29. Sia $C = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$ il seno del topologo, e sia $Y = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(C) = C \cup S$, dove $S = \{0\} \times [-1, 1]$ la chiusura di C in $\mathbb{R}^2$; sappiamo che C è connesso, e quindi Y è connesso.

(i) Mostrare che i punti di S non hanno in Y una base di intorni connessi, e che anzi per ogni $p \in S$ esiste un intorno V di p in Y tale che la componente connessa di V che contiene p è contenuta in S.
(ii) Sia X spazio connesso e localmente connesso, e sia $f : X \to Y$ continua. Supponiamo che esista $c \in X$ tale che $f(c) \in S$. Mostrare che allora $f(X) \subseteq S$ (suggerimento: mostrare che $f^{\leftarrow}(S)$ è chiusaperto in X, servendosi di (i) per mostrare che è aperto ...). (media difficoltà)
(iii) Y non è connesso per archi.

Spazio proiettivo su uno spazio di Hilbert complesso

Dato il suo interesse in Meccanica quantistica, diciamo qualcosa sullo spazio proiettivo modellato su uno spazio di Hilbert complesso. Sia H un $\mathbb{C}-$spazio di Hilbert; in $H_{\cdot} = H \setminus \{0\}$ consideriamo la relazione di equivalenza $x \sim y$ definita da: esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $y = \lambda x$; le classi di equivalenza sono i sottospazi unidimensionali di H (privati di 0); detto $\mathrm{P}\,H$ il quoziente, la funzione $p : H_{\cdot} \to \mathrm{P}\,H$ è aperta (si vede come nel caso di dimensione finita) e la relazione di equivalenza è chiusa in $H_{\cdot} \times H_{\cdot}$ (come nel caso di dimensione finita, ma lo ripetiamo per comodità del lettore: sia $(x(k), y(k))$ successione di vettori equivalenti cioè tali che esiste $\lambda_k \in \mathbb{C}$ con $y(k) = \lambda_k x(k)$, e supponiamo che $(x(k), y(k))$ converga in $H_{\cdot} \times H_{\cdot}$ ad (x, y); vogliamo provare che esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $y = \lambda x$. Infatti, moltiplicando scalarmente per x la $y(k) = \lambda_k x(k)$ si ottiene $(y(k)|x) = \lambda_k (x(k)|x)$; poiché $(x(k)|x)$ tende a $|x|^2 \neq 0$, si ha $(x(k)|x) \neq 0$ per k abbastanza grande; si ha quindi per k grande $\lambda_k = (y(k)|x)/(x(k)|x)$, e quindi λ_k tende, per $k \to \infty$, a $\lambda = (y|x)/|x|^2$; passando al limite in $y(k) = \lambda_k x(k)$ si ha quindi $y = \lambda x$, come voluto. Ne segue che $\mathrm{P}\,H$ è di Hausdorff. Se restringiamo p alla sfera dei versori

$$S = \{x \in H : |x| = 1\}; \qquad p_{|S} = q,$$

q è suriettiva (infatti $p(x) = p(x/|x|) = q(x/|x|)$ per ogni $x \in H_{\cdot}$), ed inoltre q è ancora aperta ed è quindi quoziente: si noti infatti che se $x, y \in S$ si ha $x \sim y$ se e solo se $y = \lambda x$, con λ numero complesso di modulo 1; ne segue che le fibre di q sono:

$$q^{\leftarrow}(q(x)) = \mathbb{U}x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{U}\},$$

dove al solito $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ è il circolo dei numeri complessi di modulo 1. Se A è aperto nella topologia relativa di $\mathbb{U}$, il suo saturato è $q^{\leftarrow}(q(A)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{U}} \lambda A$, unione degli aperti λA, e quindi aperto.

Vediamo ora che $q : S \to \mathrm{P}\,H$ ha una struttura di fibrato localmente banale, con fibra $\mathbb{U}$, il circolo. Fissato $a \in S$, sia $K_a = \{x \in H : (a|x) = 0\}$ l'ortogonale di a in H, e sia $V_a = S \setminus K_a$; V_a è aperto saturo di $H_{\cdot}$; ne segue che $U_a = q(V_a)$ è aperto in $\mathrm{P}\,H$. Mostriamo anzitutto che U_a è omeomorfo alla palla unitaria aperta di K_a, $B_a = \{u \in K_a : |v| < 1\}$. Infatti ogni vettore $x \in H$ si scrive in un unico modo come $x = (a|x)a + \pi_a(x)$, con $\pi_a(x) \in K_a$; si ha naturalmente $|x|^2 = |(a|x)|^2 + |\pi_a(x)|^2$, di modo che se $x \in V_a$ si ha $(a|x) \neq 0$ e quindi $|\pi_a(x)| < 1$. Ne segue che $\rho_a : x \mapsto \pi_a(x)/\operatorname{sgn}(a|x)$ definisce una funzione continua di V_a in B_a; tale funzione è suriettiva e quoziente, dato che ha un'inversa a destra continua $s_a : B_a \to V_a$ data da $s_a(u) = \left(\sqrt{1 - |u|^2}\right) a + u$. Inoltre, è chiaro che se $y = \lambda x$, con $|\lambda| = 1$ si ha $\rho_a(y) = \rho_a(x)$; e se $\rho_a(x) = \rho_a(y)$ si ha in particolare $|\pi_a(x)| = |\pi_a(y)|$ da cui $|(a|x) = |(a|y)|$; posto $\lambda = \operatorname{sgn}(a|y)/\operatorname{sgn}(a|x)$ si ha, moltiplicando per λ la relazione $x = (a|x)a + \pi_a(x)$:

$$\lambda x = \lambda(a|x)x + \lambda\pi_a(x) = \operatorname{sgn}(a|y)|(a|x)|a + \pi_a(y) = (a|y)a + \pi_a(y) = y.$$

Quindi B_a è omeomorfo al quoziente U_a. Si ha ora la banalizzazione locale $\phi_a : V_a \to U_a \times \mathbb{U} \approx B_a \times \mathbb{U}$ ponendo:

$$\phi_a(x) = (\pi_a(x)/\operatorname{sgn}(a|x), \operatorname{sgn}(a|x));$$

la funzione ϕ_a è continua e l'inversa ϕ_a^{-1}, che è definita da $\phi_a^{-1}(u, \lambda) = \left(\lambda\sqrt{1 - |u|^2}\right) a + u$, è pure continua.

2.0.2. *La fibrazione* $p : H_{\cdot} \to \mathrm{P}\,H$. Anche p è fibrazione localmente banale con fibra $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ il piano bucato; ripetiamo quanto sopra in breve. Si prende $a \in H_{\cdot}$, cioè a vettore non nullo di H; ancora K_a è l'ortogonale di a; ora $V_a = H \setminus K_a$, ed $U_a = p(V_a)$; U_a è omeomorfo a K_a, l'omeomorfismo essendo dato da $\rho_a(x) = \pi_a(x)/(a|x)$ (ha un'inversa destra $s_a : K_a \to V_a$ data da $s_a(u) = a/|a| + u$). La banalizzazione è $\phi_a(x) = (\pi_a(x)/(a|x), (a|x))$.

Attenzione: mentre gli spazi proiettivi di dimensione finita, reali o complessi, sono compatti (perché la sfera S è in tali spazi compatta), certamente $\mathrm{P}\,H$ non è compatto se H ha dimensione infinita. Infatti, se lo fosse, $\mathrm{P}\,H$ sarebbe coperto da un insieme finito di aperti della forma U_a, diciamo da $U_{a(1)}, \ldots, U_{a(m)}$, e corrispondentemente si avrebbe allora $H_{\cdot} = \bigcup_{k=1}^{m} V_{a(k)}$. Questo vuol dire che ogni vettore non nullo $x \in H$ non è ortogonale a qualche $a(k)$, il che equivale a dire, come ben noto, che lo spazio vettoriale generato da $a(1), \ldots, a(m)$ è tutto H.

2.0.3. *Una metrica che topologizza* $\mathrm{P}\,H$. Lo spazio proiettivo è naturalmente metrizzabile, ed una metrica che induce la topologia è (si pensa $\mathrm{P}\,H$ come quoziente della sfera S dei versori mediante la mappa q):

$$\rho(q(x), q(y)) = \arccos |(x|y)|.$$

Verifichiamo che ρ è effettivamente una metrica su $\mathrm{P}\,H$ e che la topologia di tale metrica è proprio quella quoziente. Anzitutto ρ è ben definita; l'unica proprietà non immediata è la disuguaglianza triangolare. Dati $q(x), q(y), q(z) \in \mathrm{P}\,H$, possiamo scegliere x e z in modo tale che sia $(x|y) = |(x|y)|$ e $(y|z) = |(y|z)|$, lasciando inalterati $q(x)$ e $q(z)$; si sa che se si pone, per $u, v \in H$, $u \cdot v = \mathrm{Re}(u|v)$ si ha un $\mathbb{R}-$prodotto scalare su H la cui norma coincide con quella del $\mathbb{C}-$prodotto scalare assegnato. Dai calcoli visti per dimostrare che $\mathbb{S}^{n-1}$ è spazio metrico con la metrica geodetica si ha

$$x \cdot z = (x \cdot y)(y \cdot z) + \sqrt{1 - (x \cdot y)^2}\sqrt{1 - (y \cdot z)^2}(y_x \cdot y_z);$$

ma si sa che $x \cdot y = (x|y) = |(x|y)|$ ed anche $y \cdot z = (y|z) = |(y|z)|$, inoltre $-1 \le y_x \cdot y_z \le 1$ per cui si ha

$$\mathrm{Re}(x|z) \ge |(x|y)|\,|(y|z)| - \sqrt{1 - |(x|y)|^2}\sqrt{1 - |(y|z)|^2},$$

da cui essendo ovviamente $|(x|z)| \ge \mathrm{Re}(x|z)$ si ha:

$$|(x|z)| \ge |(x|y)|\,|(y|z)| - \sqrt{1 - |(x|y)|^2}\sqrt{1 - |(y|z)|^2},$$

che è la richiesta disuguglianza triangolare: se si pone $\cos c = |(x|y)|$ e $\cos a = |(y|z)|$ si ha

$$|(x|z)| \ge \cos c \cos a - \sin c \sin a = \cos(c + a).$$

Si noti che $q : S \to \mathrm{P}\,H$ è lipschitziana; infatti si ha, per $x, y \in S$:

$$|x - y|^2 = 2 - 2\,\mathrm{Re}(x|y) = 2(1 - \mathrm{Re}(x|y)) \ge 2(1 - |(x|y)|);$$

posto $\cos a = |(x|y)|$, con $a \in [0, \pi]$ si ha $2(1 - \cos a) = 4\sin^2(a/2)$ da cui $2\sin(a/2) \le |x - y|$; essendo $0 \le a/2 \le \pi/2$ la concavità della funzione seno dice che si ha $\sin(a/2) \ge (2/\pi)(a/2) = a/\pi$; si ha in definitiva, ricordando che è $a = \rho(q(x), q(y))$:

$$\rho(q(x), q(y)) \le (\pi/2)|x - y| \qquad \text{per ogni } x, y \in S$$

(e si noti che nella disuguaglianza precedente si ha uguaglianza se e solo se $x = y$, oppure $x = -y$.

2.0.4. *Una metrica su* $\mathbb{K}^n$ *il cui completamento è* $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$. Si prende la proiezione $p : V_0 \to U_0$, dove $V_0 = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} : x_0 \ne 0\}$, ed $U_0 = p(V_0)$ è identificato con $\mathbb{K}^n$ come sopra; si definisce la distanza ρ fra $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots \eta_n) \in \mathbb{K}^n$ ponendo

$$\rho(\xi, \eta) = \arccos \frac{\left|1 + \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k\right|}{\sqrt{1 + |\xi|^2}\sqrt{1 + |\eta|^2}},$$

distanza in $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ dei punti corrispondenti. Le verifiche sono facili: V_0 è denso in $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$, che è completo essendo compatto.

2.0.5. *Completezza di* $\mathrm{P}\,H$. Se H è spazio di Hilbert di dimensione infinita, $\mathrm{P}\,H$ non è compatto, ma è ugualmente completo. Sia infatti $q(x_j)$ successione di Cauchy in $\mathrm{P}\,H$; questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che si abbia $|(x_j|x_k)| \ge 1 - \varepsilon$ per $j, k \ge j_\varepsilon$; passando, se occorre, ad una sottosuccessione, si può supporre che sia $|(x_j|x_{j+1})| \ge 1 - 1/2^{j+1}$; induttivamente si possono scegliere rappresentati $u_j \in S$, con $q(u_j) = q(x_j)$, tali che sia $(u_j|u_{j+1}) = |(x_j|x_{j+1})|$. Si ha allora $|u_j - u_{j+1}| = 2 - 2\,\mathrm{Re}(u_j|u_{j+1}) = 2 - 2(u_j|u_{j+1}) \le 2 + 2/2^{j+1} - 2 = 1/2^j$; la successione u_j è allora a variazione finita, quindi di Cauchy, quindi convergente ad $u \in S$; ed allora $q(u_j) = q(x_j)$ converge a $q(u)$.

Teorema di Wigner

Sia H spazio di Hilbert complesso. Dimostriamo che un'isometria di $\mathrm{P}\,H$, cioè una funzione $\varphi : \mathrm{P}\,H \to \mathrm{P}\,H$ che conserva le distanze, tale cioè che sia $\rho(\varphi(a), \varphi(b)) = \rho(a, b)$ per ogni $a, b \in \mathrm{P}\,H$, è necessariamente indotta da un'isometria di H. Tale isometria è necessaraimente $\mathbb{R}-$ lineare, e può essere $\mathbb{C}-$lineare oppure coniugato lineare, come ora vediamo.

Studiamo anzitutto le isometrie di uno spazio di Hilbert H. Esse sono tutte $\mathbb{R}-$affini, nel senso che:

Proposizione. *Siano H, K spazi a prodotto scalare, e sia $T : H \to K$ funzione, con $T(0) = 0$. Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(i) *T è un'isometria (cioè $|Tx - Ty| = |x - y|$, per ogni $x, y \in H$).*
(ii) *T conserva la parte reale del prodotto scalare, si ha cioè $\mathrm{Re}(Tx|Ty) = \mathrm{Re}(x|y)$, per ogni $x, y \in H$.*

Inoltre T è $\mathbb{R}-$lineare.

Dimostrazione. L'equivalenza di (i) ed (ii) è immediata:

$$|Tx - Ty|^2 = |x-y|^2 \iff |Tx|^2 + |Ty|^2 - 2\operatorname{Re}(Tx|Ty) = |x|^2 + |y|^2 - 2\operatorname{Re}(x|y);$$

questo mostra subito che (ii) implica (i), essendo anche $|Tx|^2 = (Tx|Tx) = (x|x) = |x|^2$,ed analogamente per y; e se T è isometria si ha $|Tx| = |Tx - 0| = |Tx - T0| = |x-0| = |x|$ ed analogamente per y, per cui anche (i) implica (ii).

Basta poi dimostrare, per mostrare la $\mathbb{R}-$linearità di T, che T è additiva, cioè che si ha $T(x+y) = Tx + Ty$ per ogni coppia $x, y \in H$. Infatti allora T è $\mathbb{Q}-$lineare, si ha cioè $T(rx) = r\,Tx$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$ ed ogni $x \in X$: infatti $T(nx) = T(x + \cdots + x) = Tx + \cdots + Tx = nTx$ per ogni intero $n \geq 1$, e quindi $T(x/n) = Tx/n$ per ogni intero $n \geq 1$ (da $Tx = T(n(x/n)) = nT(x/n)$), ed anche $T(mx) = mT(x)$ per ogni intero $m \in \mathbb{Z}$, ed in definitiva $T((m/n)x) = (m/n)Tx$ per ogni razionale m/n; è immediato, per continuità, che una funzione $\mathbb{Q}-$lineare continua è anche $\mathbb{R}-$lineare. E per mostrare che T è additiva, basta mostrare che T conserva i punti medi, cioè che si ha $T((x+y)/2) = (Tx+Ty)/2$ per ogni $x, y \in H$. Infatti allora si ha anche $T(2x) = 2Tx$ (da $Tx = T((2x)/2) = T((2x+0)/2) = (T(2x)+0)/2 = T(2x)/2$), e quindi $T(x+y) = T(((2x)+(2y))/2) = (T(2x)+T(2y))/2 = (2Tx+2Ty)/2 = Tx+Ty$. Basta mostrare che il punto medi si caratterizza in modo metrico, e questo è semplice:

In uno spazio a prodotto scalare, dati $x, y \in H$ esiste un unico $c \in H$ tale che sia $|c-x| = |y-c| = |y-x|/2$; tale c è proprio $(x+y)/2$

È ovvio che $(x+y)/2$ verifica quanto richiesto; l'unicità deriva dal fatto che si sa che la disuguaglianza triangolare

$$|y-x| = |(y-c)+(c-x)| \leq |y-c| + |c-x| = |y-x|/2 + |y-x|/2 = |y-x|$$

è verificata come uguaglianza, come in questo caso (escludendo il caso banale $x = y$), solo se $y - c = r(c-x)$ con $r > 0$, e quindi $r = 1$ dovendo essere $|y-c| = |c-x|$, e quindi $c = (x+y)/2$.

Si ha allora quanto voluto: $T((x+y)/2$ è il punto medio di Tx e Ty, dato che T conserva le distanze, e quindi è proprio $(Tx+Ty)/2$. □

Dato un vettore non nullo $x \in H$, indicheremo con $\langle x\rangle$ l'elemento $p(x) \in \mathrm{P}\,H$, cioè $\mathbb{C}x \setminus \{0\}$; ricordiamo che ha senso definire

$$\langle x\rangle \bullet \langle y\rangle = \frac{|(x|y)|}{|x|\,|y|},$$

e che la metrica in $\mathrm{P}\,H$ è stata appunto definita come

$$\rho(\langle x\rangle, \langle y\rangle) = \arccos(\langle x\rangle \bullet \langle y\rangle).$$

Vogliamo studiare le isometrie di $\mathrm{P}\,H$, cioè le funzioni $\varphi : \mathrm{P}\,H \to \mathrm{P}\,H$ tali che $\varphi(\langle x\rangle) \bullet \varphi(\langle y\rangle) = \langle x\rangle \bullet \langle y\rangle$ per ogni $x, y \in H$. Chiaramente se $T : H \to H$ è $\mathbb{C}-$ lineare, oppure $\mathbb{C}-$antilineare, T induce una funzione (proiettività) $\tilde{T} : \mathrm{P}\,H \to \mathrm{P}\,H$; e se T è una *similitudine*, cioè è della forma rR, dove R è isometria lineare od antilineare di H in se stesso, ed $r > 0$, allora $\tilde{T}$ è isometria di $\mathrm{P}\,H$. Il successivo teorema dice che queste sono le uniche isometrie di $\mathrm{P}\,H$.

Teorema. (Wigner) *Sia $\varphi : \mathrm{P}\,H \to \mathrm{P}\,H$ isometria.*

Esiste allora un'isometria $T : H \to H$ tale che sia $\varphi(\langle x\rangle) = \langle Tx\rangle$ per ogni $x \in H$; inoltre T è lineare, oppure antilineare.

Dimostrazione. Fissato $a \in H$ con $|a| = 1$ è definito K_a, ortogonale di a in H, e $V_a = \{x \in H : (a|x) \neq 0\}$; per $x \in V_a$ esiste un unico elemento in $\langle x\rangle$ della forma $a + \xi$, con $\xi \in K_a$, quello con $\xi = (x - (a|x)a)/(a|x)$ (vedi ??.??). Sia $b \in \varphi(\langle a\rangle)$ di norma 1; si noti che se $x \in V_a$ allora ogni rappresentante di $\varphi(\langle x\rangle)$ sta in V_b, dato che φ conserva l'ortogonalità. Resta allora definita una funzione $\varphi_a : K_a \to K_b$ ponendo $\varphi_a = \eta \in K_b$ se $\langle b + \eta\rangle = \varphi(\langle a + \xi\rangle)$. Si noti che $\varphi_a(0) = 0$. Si ha poi, dato che φ conserva i prodotti scalari, e che $|a| = |b| = 1$:

$$\frac{|1 + (\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2))|}{\sqrt{1+|\varphi_a(\xi_1)|^2}\sqrt{1+|\varphi_a(\xi_2)|^2}} = \frac{|1 + (\xi_1|\xi_2)|}{\sqrt{1+|\xi_1|^2}\sqrt{1+|\xi_2|^2}} \quad \text{perogni } \xi_1, \xi_2 \in K_a.$$

Posto $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ in tale formula si ricava $|\varphi_a(\xi)| = |\xi|$ per ogni $\xi \in K_a$; si ha quindi anche

$$|1 + (\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2))| = |1 + (\xi_1|\xi_2)| \quad \text{perogni } \xi_1, \xi_2 \in K_a.$$

Asseriamo ora che si ha $\langle\varphi_a(\xi)\rangle = \varphi(\langle\xi\rangle)$ per ogni $\xi \in K_a \setminus \{0\}$. Se infatti $\langle\eta\rangle = \varphi(\langle\xi\rangle)$ si ha anzitutto $\eta \in K_b$ per conservazione dell'ortogonalità; supposto che sia $|\eta| = |\xi|$ si ha poi

$$\frac{|(b + \varphi_a(\xi)|\eta)|}{\sqrt{1 + |\varphi_a(\xi)|^2}|\eta|} = \frac{|(a + \xi)|\xi)|}{\sqrt{1 + |\xi|^2}|\xi|},$$

ed eliminando i denominatori, che sono uguali, e ricordando che b è ortogonale a η ed a è ortogonale a ξ si ha

$$|(\varphi_a(\xi)|\eta)| = |\xi|^2 = |\varphi_a(\xi)|\,|\eta|.$$

Ricordando ora che la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz è soddisfatta come uguaglianza se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti si ottiene $\langle\varphi_a(\xi)\rangle = \langle\eta\rangle$, come richiesto. Si noti che si ha

$$|1 + (\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2))| = |1 + (\xi_1|\xi_2)|; \quad |(\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2))| = |(\xi_1|\xi_2)| \quad \text{per ogni } \xi_1, \xi_2 \in K_a.$$

Dalla prima si trae, quadrando ambo i membri, $1 + 2\operatorname{Re}(\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2)) + |(\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2))|^2 = 1 + 2\operatorname{Re}(\xi_1|\xi_2) + |(\xi_1|\xi_2)|^2$; utilizzando la seconda si ottiene

$$\operatorname{Re}(\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2)) = \operatorname{Re}(\xi_1|\xi_2) \quad \text{per ogni } \xi_1, \xi_2 \in K_a;$$

e dalla proposizione precedente sappiamo che allora φ_a è isometria $\mathbb{R}-$lineare di K_a in K_b. Inoltre si ha anche (se due numeri complessi hanno uguali i moduli e le parti reali, hanno parti immaginarie uguali od opposte):

$$\operatorname{Im}(\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2)) = \operatorname{Im}(\xi_1|\xi_2) \quad \text{oppure} \quad \operatorname{Im}(\varphi_a(\xi_1)|\varphi_a(\xi_2)) = -\operatorname{Im}(\xi_1|\xi_2) \quad \text{per ogni } \xi_1, \xi_2 \in K_a.$$

Essendo $\varphi_a(i\xi) \in \phi(\langle i\xi\rangle) = \phi(\langle\xi\rangle) = \langle\varphi_a(\xi)\rangle$ per ogni $\xi \in K_a \setminus \{0\}$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che sia $\varphi_a(i\xi) = \lambda\varphi_a(\xi)$. E dato che φ_a conserva la parte reale del prodotto scalare si ha

$$\operatorname{Re}(\varphi_a(i\xi)|\varphi_a(\xi)) = \operatorname{Re}(i\xi|\xi) = 0,$$

ed anche

$$\operatorname{Re}(\varphi_a(i\xi)|\varphi_a(\xi)) = \operatorname{Re}(\lambda\varphi_a(\xi)|\varphi_a(\xi)) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}(\varphi_a(\xi)|\varphi_a(\xi))) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}|\xi|^2) = |\xi|^2 \operatorname{Re}\lambda,$$

per cui $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Si ha quindi che $\varphi_a(i\xi) = \pm i\varphi_a(\xi)$ per ogni $\xi \in K_a$, ricordando anche che deve essere $|\varphi_a(i\xi)| = |i\xi| = |\xi|$. Per ogni vettore $\xi \in K_a$ si ha quindi $\varphi_a(i\xi) = i\varphi_a(\xi)$ oppure $\varphi_a(i\xi) = -i\varphi_a(\xi)$; asseriamo che si verifica una soltanto fra le due eventualità. Infatti, supponiamo che sia $\varphi_a(i\xi_1) = i\varphi_a(\xi_1)$ e $\varphi_a(i\xi_2) = -i\varphi_a(\xi_2)$ con ξ_1, ξ_2 entrambi non nulli. Si ha allora $\varphi_a(i(\xi_1 + \xi_2)) = \varphi_a(i\xi_1 + i\xi_2) = i\varphi_a(\xi_1) - i\varphi_a(\xi_2)$; ma deve essere anche $\varphi_a(i(\xi_1 + \xi_2)) = i\varphi_a(\xi_1 + \xi_2) = i\varphi_a(\xi_1) + i\varphi_a(\xi_2)$, oppure $\varphi_a(i(\xi_1 + \xi_2)) = -i\varphi_a(\xi_1 + \xi_2) = -i\varphi_a(\xi_1) - i\varphi_a(\xi_2)$, entrambe manifestamente incompatibili con la precedente relazione (si ricordi che φ_a è iniettiva).

Abbiamo provato che φ_a è $\mathbb{C}-$lineare, oppure $\mathbb{C}-$ antilineare.

Definiamo $T : H \to H$ ponendo $Tx = (a|x)b + \varphi_a(x - (a|x)a)$ se φ_a è $\mathbb{C}-$lineare, e nel secondo caso $Tx = (x|a)b + \varphi_a(x - (a|x)a)$. Banalmente T è isometria di H in H, lineare nel primo caso e coniugato–lineare nel secondo. Se per $x \in H \setminus \{0\}$ si pone $\psi(\langle x\rangle) = \langle Tx\rangle$, chiaramente ψ è ben definita, e coincide con φ, avendosi (facciamo il caso di T lineare, l'altro è analogo) $T(x) = (a|x)b + \varphi_a(x - (a|x)a)$, e

$$\phi(\langle x\rangle) = \phi(\langle a + (x - (a|x)a)/(a|x)\rangle) = \langle b + \varphi_a((x - (a|x)a)/(a|x))\rangle = \langle T(a + (x - (a|x)a)/(a|x))\rangle,$$

per $x \in V_a$, e se $x \in K_a \setminus \{0\}$ si ha $T(x) = \varphi_a(x)$, e come visto sopra $\langle\varphi_a(x)\rangle = \varphi(\langle x\rangle)$ se $x \in K_a \setminus \{0\}$. Dato che $H_. = V_a \cup (K_a \setminus \{0\})$ la conclusione è raggiunta. □

2.0.6. *Isometrie della sfera unitaria nella metrica geodetica.* Dato uno spazio a prodotto scalare H, la metrica geodetica sulla sfera dei versori è data da $\gamma(u, v) = \arccos(\operatorname{Re}(u|v)$, come si vede imitando quanto fatto in ??.??. Il fatto che le isometrie siano tutte $\mathbb{R}-$affini implica anche subito che:

. *Sia H spazio a prodotto scalare, e sia $\varphi : S \to S$ isometria per la metrica geodetica, dove $S = \{u \in H : |u| = 1\}v$ è la sfera dei versori. Esiste allora un'unica isometria lineare $T : H \to H$, tale che sia $Tu = \varphi(u)$ per ogni $u \in S$.*

Dimostrazione. Si pone $T(0) = 0$ e $Tx = |x|\varphi(x/|x|)$ per $x \neq 0$. Si ha allora, se $x, y \neq 0$:

$$\operatorname{Re}(Tx|Ty) = \operatorname{Re}(|x|\varphi(x/|x|)||y|\varphi(y/|y|)) = |x|\,|y| \operatorname{Re}(\varphi(x/|x|)|\varphi(y/|y|)) = |x|\,|y| \operatorname{Re}((x/|x|)|(y/|y|)) = \operatorname{Re}(x|y).$$

Ne segue che T è isometria lineare. Chiaramente essa è l'unica isometria lineare che estende φ. □

È facile mostrare anche che lo stesso risultato si ha se si prendono le isometrie di S nella metrica indotta; infatti un'isometria φ nella metrica $|u-v|$ è anche isometria per la metrica geodetica, e viceversa:

$$|\varphi(u)-\varphi(v)|^2 = |\varphi(u)|^2 + |\varphi(v)|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\varphi(u)|\varphi(v)) = 2(1-\mathrm{Re}(\varphi(u)|\varphi(v)));$$

$$|u-v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\,\mathrm{Re}(u|v) = 2(1-\mathrm{Re}(u|v)),$$

di modo che per una funzione $\varphi : S \to S$ si ha $|\varphi(u)-\varphi(v)| = |u-v|$ se e solo se $\mathrm{Re}(\varphi(u)|\varphi(v)) = \mathrm{Re}(u|v)$.