Note di Programmazione Lineare

Giacomo Zambelli[1]

A.A. 2008/09

[1]Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Universitá di Padova, Via Trieste 63, 35121 Padova, Italy. (giacomo@math.unipd.it)

Indice

Avvertenza

Le note presentate di seguito non hanno alcuna pretesa di completezza, né hanno lo scopo di sostituirsi alle spiegazioni del docente. Il loro scopo é quello di fissare in maniera rigorosa alcuni teoremi, definizioni e dimostrazioni presentati in classe. Le note non contengono esempi o esercizi svolti. Questi rappresentano una parte fondamentale nella comprensione della materia e saranno presentati in classe.

Notazioni

In queste note, un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ é considerato come vettore colonna, e trattato come una matrice $n \times 1$. Dunque, dati $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\top y = y^\top x$$

é il *prodotto scalare* tra x e y.

Inoltre, dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, scriveremo che

$$x \geq y$$

se $x_j \geq y_j$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$; scriveremo

$$x > y$$

se $x_j > y_j$ per ogni j, $j \in \{1, \ldots, n\}$; mentre scriveremo

$$x \neq y$$

se esiste $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x_j \neq y_j$.

Denoteremo con 0 il vettore nullo, ove la dimensione di tale vettore sará di volta in volta chiara dal contesto. Dunque, dato $x \in \mathbb{R}^n$, quando scriveremo $x \geq 0$, sará sottinteso che le dimensioni dei due vettori x e 0 sono compatibili, e che dunque 0 é il vettore nullo in $\mathbb{R}^n$.

Capitolo 1

Problemi di Programmazione Lineare

1.1 Definizioni preliminari e Teorema fondamentale della PL

Un problema di *Programmazione Lineare* (PL) consiste nel massimizzare (o minimizzare) una funzione lineare soggetta a vincoli lineari di disuguaglianza. Dunque é un problema che puó essere scritto nella forma

$$\begin{array}{llll} \max(\min) & c^\top x & & \\ & a_i^\top x & = & b_i \quad i = 1, \ldots, k \\ & a_i^\top x & \leq & b_i \quad i = k+1, \ldots, r \\ & a_i^\top x & \geq & b_i \quad i = r+1, \ldots, m \end{array} \tag{1.1}$$

ove $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $c, a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$, e x sia un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1 • *La funzione* $x \mapsto c^\top x$ *é detta* funzione obiettivo del problema di PL *(1.1).*

- *Le disuguaglianze lineari*

$$\begin{array}{lll} a_i^\top x & = & b_i \quad i = 1, \ldots, k \\ a_i^\top x & \leq & b_i \quad i = k+1, \ldots, r \\ a_i^\top x & \geq & b_i \quad i = r+1, \ldots, m \end{array}$$

sono i vincoli *di (1.1).*

Definizione 1.2 • *Un vettore* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *é detto una* soluzione ammissibile *di (1.1) se* $\bar{x}$ *soddisfa i vincoli. L'*insieme ammissibile *di (1.1) é l'insieme delle sue soluzioni ammissibili.*

- *Un vettore $x^* \in \mathbb{R}^n$ é detto una* soluzione ottima *di (1.1) se x^* é una soluzione ammissibile di (1.1) e, per ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ di (1.1), $c^\top x^* \geq c^\top \bar{x}$ ($c^\top x^* \leq c^\top \bar{x}$ se (1.1) é un problema di minimo).*

Definizione 1.3
- *Si dice che il problema di PL (1.1) é* ammissibile *se esiste una soluzione ammissibile per (1.1).*
- *Se esiste una soluzione ottima per (1.1), si dice che (1.1) ammette ottimo.*
- *Il problema di PL (1.1) si dice* illimitato *se, per ogni numero $\alpha > 0$, esiste una soluzione ammissibile x tale che $c^\top x > \alpha$ ($c^\top x < \alpha$ se (1.1) é un problema di minimo).*

Enunciamo, posponendo la dimostrazione, il seguente.

Teorema 1.4 (Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare) *Dato un problema di Programmazione Lineare, si verifica esattamente uno dei casi seguenti:*

1. *Il problema ammette una soluzione ottima;*
2. *Il problema non é ammissibile;*
3. *Il problema é illimitato.*

La dimostrazione del teorema precedente discenderá dalla correttezza di un algoritmo (l'algoritmo del simplesso) per risolvere problemi di programmazione lineare. Come vedremo, tale algoritmo termina o quando determina una soluzione ottima, o quando determina che il problema é inammissibile, o quando determina che il problema é illimitato, dunque deve sempre verificarsi una delle tre condizioni.

1.2 Problemi in forma standard

Si noti, prima di tutto, che se (1.1) é un problema di minimizzazione, ovvero vogliamo determinare $\min c^\top x$, tale problema é lo stesso di determinare $\max -c^\top x$ soggetto agli stessi vincoli. Pertanto potremo sempre assumere senza perdita di generalitá, ogniqualvolta convenga, che (1.1) sia un problema di massimizzazione.

Un problema di programmazione lineare é detto *in forma standard* se é un problema della forma

$$\begin{aligned} z^* = \quad & \max c^\top x \\ & Ax = \quad b \\ & x \geq \quad 0 \end{aligned}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, e x é un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Vogliamo dimostrare che ogni problema di programmazione lineare é equivalente ad un problema in forma standard. Diremo che due problemi di programmazione lineare (P) e (P') sono *equivalenti* se, per ogni soluzione ammissibile di (P), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P') con lo stesso valore e, per ogni soluzione ammissibile di (P'), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P) con lo stesso valore. Mostriamo come (1.1) possa essere scritto in forma standard.

Osserviamo prima che un vincolo della forma

$$a_i^\top x \geq b_i$$

é equivalente a

$$-a_i^\top x \leq -b_i$$

(nel senso che hanno le stesse soluzioni), pertanto possiamo assumere che i vincoli in (1.1) siano tutti del tipo $a_i^\top x \leq b_i$ o $a_i^\top x = b_i$.

Se nel problema é presente il vincolo $x_i \geq 0$, allora la variabile x_i é detta una *variabile non-negativa*, altrimenti x_i é detta una *variabile libera.*

Vincoli di tipo "$\leq$": Se nel problema é presente il vincolo

$$a_i^\top x \leq b_i,$$

possiamo aggiungere al problema una *variabile di scarto* s_i, e rimpiazzare il vincolo precedente con i vincoli

$$a_i^\top x + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

Ovviamente, se x soddisfa $a_i^\top x \leq b_i$, allora $s_i = b_i - a_i^\top x$ soddisfa $a_i^\top x + s_i = b_i$, $s_i \geq 0$. Viceversa, se x ed s_i soddisfano $a_i^\top x + s_i = b_i$, $s_i \geq 0$, allora x soddisfa $a_i^\top x \leq b_i$. Dunque, poiché la funzione obiettivo non cambia, i due problemi sono equivalenti.

Variabili libere: Supponiamo che la variabile x_i sia libera. Facciamo un cambio di variabili basato sulla semplice osservazione che ogni numero puó essere scritto come la differenza di due numeri non-negativi. Possiamo introdurre due variabili non-negative, x_i^+ e x_i^-, e porre

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \quad x_i^+, x_i^- \geq 0.$$

Sostituendo x_i con $x_i^+ - x_i^-$ nei vincoli di (1.1), otteniamo un problema in cui x_i non compare, e abbiamo introdotto due variabili non-negative. Chiaramente il problema che otteniamo é equivalente: data una soluzione ammissibile del nuovo problema, otteniamo una soluzione ammissibile di (1.1) con lo stesso valore ponendo $x_i = x_i^+ - x_i^-$. Viceversa, data una soluzione ammissibile di (1.1), otteniamo una soluzione ammissibile del nuovo problema con lo stesso valore ponendo $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$ e $x_i^- = \max\{0, -x_i\}$.

Capitolo 2

Dualitá in programmazione lineare e alcune conseguenze

2.1 Dualitá per problemi in forma standard

Si consideri il seguente problema di PL in forma standard:

$$\begin{aligned} z^* = \quad & \max c^\top x \\ Ax = \quad & b \\ x \geq \quad & 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, e x é un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Vogliamo trovare degli upper-bound al valore ottimo z^*. Si noti che, dato un qualunque vettore $y \in \mathbb{R}^m$, ciascun vettore x che é soluzione ammissibile per (2.1) soddisfa l'equazione

$$(y^\top A)x = y^\top b.$$

Inoltre, se $A^\top y \geq c$, allora poiché x é non-negativo, x soddisfa la disuguaglianza $c^\top x \leq (y^\top A)x$, dunque $c^\top x \leq b^\top y$.

Dunque, dato $y \in \mathbb{R}^m$ che soddisfa $A^\top y \geq c$, poiché per ogni x ammissibile per (2.1) vale $c^\top x \leq b^\top y$, allora $z^* \leq b^\top y$, ovvero $b^\top y$ rappresenta un upper-bound al valore ottimo. Il miglior upper-bound che possiamo ottenere in questo modo, ovvero quello di valore minimo, sará dunque dato dal valore ottimo d^* del problema

$$\begin{aligned} d^* = \quad & \min b^\top y \\ A^\top y \geq \quad & c. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il problema (2.2) é detto il *problema duale* di (2.1). Ci riferiremo dunque al problema (2.1) come al *problema primale*.

Abbiamo dunque dimostrato il seguente:

Teorema 2.1 (Teorema di Dualitá Debole) *Data una soluzione ammissibile x^* per (2.1) e una soluzione ammissibile y^* per (2.2), allora*

$$c^\top x^* \leq b^\top y^*.$$

Dimostrazione: Vale la catena di disuguaglianze

$$c^\top x^* \leq (y^{*\top} A)x^* = y^{*\top}(Ax^*) = y^{*\top} b = b^\top y^*,$$

ove la prima disuguaglianza vale poiché $A^\top y^* \geq c$ e $x^* \geq 0$, mentre la seconda uguaglianza vale poiché $Ax^* = b$. □

Corollario 2.2 *Sia x^* una soluzione ammissibile per (2.1) e y^* una soluzione ammissibile per (2.2). Se $c^\top x^* = b^\top y^*$, allora x^* una soluzione ottima per (2.1) e y^* una ottima per (2.2).*

Corollario 2.3

(i) *Se (2.1) é illimitato, allora (2.2) é inammissibile.*

(ii) *Se (2.2) é illimitato, allora (2.1) é inammissibile.*

Dimostrazione: (i) Supponiamo che (2.2) abbia una soluzione ammissibile y^*. Allora, per il Teorema di Dualitá debole, $c^\top x \leq b^\top y^*$ per ogni soluzione ammissibile per (2.1) x, pertanto (2.1) non é illimitato. La dimostrazione di (ii) é analoga. □

Enunciamo, posponendo la dimostrazione, il seguente:

Teorema 2.4 (Teorema di Dualitá Forte) *Se (2.1) ammette una soluzione ottima x^*, allora (2.2) ammette una soluzione ottima y^*, e $c^\top x^* = b^\top y^*$.*

2.2 Dualitá per problemi in altre forme

2.2.1 Forma canonica

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} z^* = \quad & \max c^\top x \\ & Ax \leq \; b \\ & \;\; x \geq \; 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, e x é un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$. (Problemi in questa forma sono detti *in forma canonica.*)

Vogliamo derivare il problema duale di (2.3).

Metodo 1 Come prima, cerchiamo degli upper-bound al valore ottimo z^*. Si noti che, dato un qualunque vettore $y \in \mathbb{R}^m$ tale che $y \geq 0$, ciascun vettore x che é soluzione ammissibile per (2.3) soddisfa l'equazione

$$(y^\top A)x \leq y^\top b.$$

Inoltre, se $A^\top y \geq c$, allora poiché x é non-negativo, x soddisfa la disuguaglianza $c^\top x \leq (y^\top A)x$, dunque $c^\top x \leq b^\top y$.

Dunque, dato $y \in \mathbb{R}^m$ che soddisfa $A^\top y \geq c$, $y \geq 0$, poiché per ogni x ammissibile per (2.3) vale $c^\top x \leq b^\top y$, allora $z^* \leq b^\top y$. L'upper-bound di valore minimo é dunque dato dal valore ottimo d^* del problema

$$\begin{array}{rrl} d^* = & \min b^\top y & \\ & A^\top y \geq & c. \\ & y \geq & 0 \end{array} \tag{2.4}$$

Il problema (2.4) é detto il *problema duale* di (2.3). Ci riferiremo dunque al problema (2.3) come al *problema primale*.

Metodo 2 Riduciamo il problema in forma standard aggiungendo variabili di scarto $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$ ai vincoli $Ax \leq b$, ottenendo il problema

$$\begin{array}{rrl} \max\,(c^\top, 0\ldots, 0)\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} & & \\ (A, I)\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} & = & b \\ \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} & \geq & 0 \end{array},$$

il cui duale é

$$\begin{array}{rl} \min b^\top y & \\ \begin{pmatrix} A^\top \\ I \end{pmatrix} y \geq & \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

che é precisamente (2.4).

2.2.2 Altre forme

Consideriamo un problema nella forma

$$\begin{array}{rrl} z^* = & \max c^\top x & \\ & Ax \leq & b \end{array}.$$

Possiamo trasformarlo in un problema equivalente in forma canonica sostituendo il vettore x con $x^+ - x^-$, ove x^+ e x^- sono vettori di variabili non-negative in $\mathbb{R}^n$. Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \max\,(c^\top, -c^\top) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} & \\ (A, -A) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \leq & \; b \;, \\ \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \geq & \; 0 \end{aligned}$$

il cui duale sappiamo essere

$$\begin{aligned} \min\, b^\top y & \\ \begin{pmatrix} A^\top \\ -A^\top \end{pmatrix} y \geq & \; \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, \\ y \geq & \; 0 \end{aligned}$$

che é equivalente a

$$\begin{aligned} \min\, b^\top y & \\ A^\top y = & \; c \\ y \geq & \; 0 \end{aligned}$$

Duale del duale

Consideriamo il problema in forma standard (2.1). Qual'é il duale del suo duale? Ovvero, qual'é il duale di (2.2)? Possiamo trasformare (2.2) in

$$\begin{aligned} \max\, -b^\top y & \\ -A^\top y \leq & \; -c. \end{aligned}$$

Per quanto appena visto, il duale di tale problema é

$$\begin{aligned} \min\, -c^\top x & \\ -Ax = & \; -b \\ x \geq & \; 0 \end{aligned}$$

che é equivalente a (2.1). Pertanto, il duale del duale é il primale!

Questo implica il seguente rafforzamento del Teorema di Dualitá forte enunciato in precedenza.

Teorema 2.5 (Teorema di dualitá forte) *Se uno dei problemi (2.1) e (2.2) ammette una soluzione ottima, allora entrambi i problemi ammettono una soluzione ottima. Data x^* ottima per (2.1) e y^* ottima per (2.2), allora $c^\top x^* = b^\top y^*$.*

Il Teorema precedente, il Teorema di dualitá forte, e il Corollario 2.3 implicano che ogni coppia primale/duale di problemi di PL soddisfa una delle alternative rappresentate nella tabella successiva.

		Primale		
		Sol. ottima	Inammissibile	Illimitato
Duale	Sol. ottima	*Possibile*	*NO*	*NO*
	Inammissibile	*NO*	*Possibile*	*Possibile*
	Illimitato	*NO*	*Possibile*	*NO*

2.2.3 Dualitá in generale

Sia A una matrice $m \times n$ con righe $a_1^\top, \ldots, a_m^\top$ e colonne $A_1, \ldots, A_n$, e siano $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$. La "ricetta" per passare dal primale di un problema di PL generale al suo duale é la seguente: il problema duale avrá tante variabili quante sono le righe di A, e tanti vincoli quante sono le variabili del primale, inoltre

$\max c^\top x$	$\min b^\top y$	
$a_i^\top x \leq b_i,$	$y_i \geq 0,$	$i = 1, \ldots, h;$
$a_i^\top x \geq b_i,$	$y_i \leq 0,$	$i = h+1, \ldots, k;$
$a_i^\top x = b_i,$	y_i libera,	$i = k+1, \ldots, m.$
$x_j \geq 0,$	${A_j}^\top y \geq c_j,$	$j = 1, \ldots, p;$
$x_j \leq 0,$	${A_j}^\top y \leq c_j,$	$j = p+1, \ldots, q;$
x_j libera	${A_j}^\top y = c_j,$	$j = q+1, \ldots, n;$

Si noti che la tabella precedente si legge "in entrambi i sensi": da sinistra a destra per ottenere il duale di un problema di massimo (che sará un problema di minimo), e da destra a sinistra per ottenere il duale di un problema di minimo (che sará un problema di massimo).

2.3 Scarti complementari

2.3.1 Forma standard

Consideriamo il problema in forma standard (P) e il suo duale (D)

$$\begin{array}{rrll} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j & & & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = & b_i & i = 1, \ldots, m & \quad (P) \\ x_j \geq & 0 & j = 1, \ldots, n & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll} \min \sum_{i=1}^m b_i y_i & & & \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq & c_j & j = 1, \ldots, n & \quad (D) \end{array}$$

e siano x^* e y^* ammissibili per (P) e (D) rispettivamente. Allora

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*) x_j^* = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*) y_i^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*. \tag{2.5}$$

Per il teorema di dualitá forte sappiamo che x^* e y^* sono ottime per (P) e (D), rispettivamente, se e solo se $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$, ovvero se e solo se in (2.5) abbiamo uguaglianza ovunque. Ció si verifica se e solo se

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*) x_j^*,$$

e dunque se e solo se

$$\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0.$$

Poiché $x^* \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \geq 0$, questo avviene se e solo se

$$(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Abbiamo dunque dimostrato il seguente.

Teorema 2.6 (Teorema degli scarti complementari) *Dato il problema in forma standard (P), e due soluzioni x^* e y^* ammissibili per (P) e per il suo duale (D), rispettivamente, x^* e y^* sono ottime per (P) e (D), rispettivamente, se e solo se valgono le seguenti condizioni, dette condizioni degli* scarti complementari*:*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad x_j^* = 0 \quad o \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j. \tag{SC}$$

2.3.2 Forma generale

Teorema 2.7 (Teorema degli scarti complementari) *Dato un problema di programmazione lineare, e data una soluzione ammissibile x^*, e una soluzione y^* ammissibile per il suo duale, x^* e y^* sono ottime per il primale e il duale, rispettivamente, se e solo se valgono le seguenti condizioni, dette condizioni degli* scarti complementari*:*

$$\begin{array}{lccc} \forall\, j \in \{1,\dots,n\}, & x_j^* = 0 & \mathbf{o} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j = 0, \\ \forall\, i \in \{1,\dots,m\}, & y_j^* = 0 & \mathbf{o} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* - b_i = 0. \end{array} \tag{SC}$$

Si noti che, se una variabile primale (duale) é libera, allora il corrispondente vincolo nel duale (primale) é un vincolo di uguaglianza, dunque la corrispondente condizione di complementarietá é sempre verificata (ed infatti per problemi in forma standard abbiamo omesso le condizioni (SC) relative alle variabili duali).

2.4 Inammissibilitá e Lemma di Farkas

Il teorema di dualitá forte della programmazione lineare implica che, qualora un problema di PL ammetta una soluzione ottima x^*, il fatto che x^* sia ottima puó essere certificato da una soluzione ammissibile duale y^*.

Analogamente, qualora un problema di PL non ammetta soluzione, esiste un "certificato" di tipo algebrico di questo fatto.

2.4.1 Forma standard

Teorema 2.8 (Lemma di Farkas) *Il sistema di vincoli*

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \tag{2.6}$$

non ammette soluzione se e solo

$$\begin{array}{rcl} A^\top y & \geq & 0 \\ b^\top y & < & 0 \end{array} \tag{2.7}$$

ha soluzione.

Dimostrazione: "$\Leftarrow$" Sia $\bar{y}$ una soluzione di (2.7). Supponiamo, per assurdo, che (2.6) ammetta una soluzione $\bar{x}$. Allora

$$0 > b^\top \bar{y} = (\bar{x}^\top A^\top)\bar{y} = (\bar{y}^\top A)\bar{x} \geq 0$$

ove l'ultima disuguaglianza discende dal fatto che $\bar{x} \geq 0$ e $A^\top \bar{y} \geq 0$. Pertanto $0 < 0$, un assurdo.

"$\Rightarrow$" Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \max\ & 0^\top x \\ Ax = & \ b \ . \\ x \geq & \ 0 \end{aligned}$$

Poiché tale problema é inammissibile, per il teorema fondamentale della PL il suo duale é o inammissibile oppure illimitato. Il duale é

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ A^\top y \geq & \ 0, \end{aligned}$$

e, poiché $y = 0$ é una soluzione ammissibile, allora tale problema deve essere illimitato. Ma allora, dato $\alpha < 0$ qualunque, esiste una soluzione ammissibile del duale $\bar{y}$ tale che $b^\top \bar{y} \leq \alpha < 0$. Dunque $\bar{y}$ soddisfa (2.7). □

2.4.2 Altre forme

Il lemma di Farkas in forma canonica é il seguente.

Teorema 2.9 *Il sistema di vincoli*

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

non ammette soluzione se e solo

$$\begin{aligned} A^\top y &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ b^\top y &< 0 \end{aligned}$$

ha soluzione.

Dimostrazione: Il primo sistema non ammette soluzione se e solo se

$$\begin{aligned} Ax + Is &= b \\ x, s &\geq 0 \end{aligned}$$

non ammette soluzione, ove s é un vettore di variabili in $\mathbb{R}^m$. Per il Lemma di Farkas (Teorema 2.8), ció avviene se e solo se il sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^\top \\ I \end{pmatrix} y &\geq 0, \\ b^\top y &< 0 \end{aligned}$$

ammette soluzione. □

Per sistemi della forma $Ax \leq b$, abbiamo il seguente.

Teorema 2.10 *Il sistema di vincoli*

$$Ax \leq b$$

non ammette soluzione se e solo

$$\begin{array}{rcl} A^\top y & = & 0 \\ y & \geq & 0 \\ b^\top y & < & 0 \end{array}$$

ha soluzione. □

Esercizio: *Dimostrare il teorema precedente in due modi diversi: riducendolo in forma canonica e applicando il Lemma di Farkas in quel caso, oppure utilizzando la dualitá come nella dimostrazione del caso in forma standard.*

2.5 Problemi Illimitati

Dato un problema di programmazione lineare, uno dei casi possibili é che tale problema sia illimitato. Anche in questo caso, il fatto che un problema sia illimitato ammette un "certificato", come si evince dal seguente teorema.

Teorema 2.11 *Il problema di programmazione lineare*

$$\begin{array}{rl} \max c^\top x & \\ Ax = & b \\ x \geq & 0 \end{array} \tag{2.8}$$

é illimitato se e solo é ammissibile ed esiste $r \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{array}{rl} c^\top r > & 0, \\ Ar = & 0, \\ r \geq & 0. \end{array} \tag{2.9}$$

Dimostrazione: "$\Leftarrow$" Assumiamo che esista r che soddisfa (2.9), e sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile di (2.8). Definiamo

$$x(t) = \bar{x} + tr.$$

Si noti che, per ogni $t \geq 0$, $x(t)$ é ammissibile poiché $r \geq 0$ e $Ax(t) = A\bar{x} + Ar = b + 0 = b$. Inoltre il valore della funzione obiettivo calcolata in $x(t)$ é $z(t) = c^\top \bar{x} + tc^\top r$. Dunque

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = +\infty,$$

pertanto $x(t)$ definisce una famiglia di soluzioni ammissibili di valore arbitrariamente grande, dunque (2.8) é illimitato.

"$\Rightarrow$" Se (2.8) é illimitato, allora il suo duale é inammissibile. Il duale é

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ A^\top y \geq\ & c, \end{aligned}$$

e tale problema é inammissibile se e solo se $-A^\top y \leq -c$ non ammette soluzione. Per il Lemma di Farkas nella forma appropriata, ovvero il Teorema 2.10, $-A^\top y \leq -c$ non ammette soluzione se e solo se

$$\begin{aligned} -c^\top r <\ & 0 \\ (-A^\top)^\top r =\ & 0 \\ r \geq\ & 0 \end{aligned}$$

che sono precisamente le condizioni (2.9). □

Il precedente teorema ha una semplice interpretazione geometrica: un problema di PL é illimitato se e solo se la regione ammissibile contiene una semiretta tale che, muovendosi lungo tale semiretta "lontano" dal punto di origine, la funzione obiettivo cresce strettamente. Piú formalmente:

Definizione 2.12 *Dato $K \subset \mathbb{R}^n$, un vettore $r \in \mathbb{R}^n$ é detto un* raggio *di K se, per ogni $x \in K$ e ogni $t \geq 0$, $x + tr \in K$.*

Ovvero, r é un raggio se e solo se K contiene tutte le semirette originate in x in direzione r per ogni $x \in K$.

Si noti che, se K é l'insieme delle soluzioni ammissibili di $Ax = b$, $x \geq 0$, e r soddisfa $Ar = 0$, $r \geq 0$, allora r é un raggio di K. Dunque abbiamo dimostrato che un problema di PL é inammissibile se e solo se esiste un raggio della sua regione ammissibile lungo la cui direzione la funzione obiettivo aumenta strettamente.

Il teorema precedente vale per problemi di programmazione in forma generale, ovvero.

Teorema 2.13 *Il problema di programmazione lineare*

$$\begin{array}{lrcll} \max & c^\top x & & & \\ & a_i^\top x & = & b_i & i = 1, \ldots, k \\ & a_i^\top x & \leq & b_i & i = k+1, \ldots, r \\ & a_i^\top x & \geq & b_i & i = r+1, \ldots, m \end{array}$$

é illimitato se e solo é ammissibile ed esiste $r \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$\begin{array}{rcll} c^\top r & > & 0 & \\ a_i^\top r & = & 0 & i = 1, \ldots, k \\ a_i^\top r & \leq & 0 & i = k+1, \ldots, r \\ a_i^\top r & \geq & 0 & i = r+1, \ldots, m \end{array}$$

Capitolo 3

Geometria della Programmazione lineare

3.1 Poliedri

Definizione 3.1 *Un* iperpiano *in* $\mathbb{R}^n$ *é un insieme della forma* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = \beta\}$*, ove* a *sia un vettore nonnullo in* $\mathbb{R}^n$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$.
Un semispazio chiuso *in* $\mathbb{R}^n$ *é un insieme della forma* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq \beta\}$*, ove* a *sia un vettore nonnullo in* $\mathbb{R}^n$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.2 *Un* poliedro *in* $\mathbb{R}^n$ *é l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi. Alternativamente, un poliedro é un insieme che puó essere scritto nella forma* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b',\ A''x \leq b''\}$ *per qualche* $A' \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b' \in \mathbb{R}^k$, $A'' \in \mathbb{R}^{(m-k)\times n}$, $b'' \in \mathbb{R}^{(m-k)}$.

Pertanto, la regione ammissibile di un problema di programmazione lineare é un poliedro.

Definizione 3.3 *Un insieme* K *di* $\mathbb{R}^n$ *é* convesso *se, per ogni coppia di punti* $y, z \in K$*, il segmento di retta che congiunge* y *e* z *é contenuto in* K*, ovvero se* $\lambda y + (1-\lambda)z \in K$ *per ogni* $\lambda \in [0,1]$.

Proposizione 3.4 (i) *Ogni semispazio chiuso é convesso.*

(ii) *L'intersezione di insieme convessi é convessa.*

(iii) *Ogni poliedro é convesso.*

La dimostrazione della proposizione precedente é un facile esercizio. Si noti che (iii) discende immediatamente da (i), (ii) e dalla definizione di poliedro.

Definizione 3.5 *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ é* combinazione convessa *di $y, z \in \mathbb{R}^n$ se x é contenuto nel segmento di retta che congiunge y e z, ovvero se esiste $\lambda \in [0,1]$ tale che $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Se $y \neq z$ e $\lambda \in (0,1)$, allora diciamo che x é* combinazione convessa propria *di y, z.*

3.2 Punti estremi, vertici, soluzioni di base

Definizione 3.6 (Punto estremo) *Dato un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^* \in P$ é un* punto estremo *di P se x^* non é combinazione convessa propria di due punti di P, ovvero se, per ogni $y, z \in P$ tale che $y \neq z$, e ogni $\lambda \in (0,1)$, $x \neq \lambda y + (1-\lambda)z$.*

Definizione 3.7 (Vertice) *Dato un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^* \in P$ é un* vertice *di P se esiste $c \in \mathbb{R}^n$ tale che $c^\top x < c^\top x^*$ per ogni $x \in P \setminus \{x^*\}$.*

Dati vincoli $a_i^\top x = b_i$, $i = 1, \ldots, k$, $a_i^\top x \leq b_i$, $i = k+1, \ldots, m$, diremo che tali vincoli sono *linearmente indipendenti* se i vettori $\{a_i, \mid i = 1, \ldots, m\}$ sono linearmente indipendenti. Dato un un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$, diremo che il vincolo i-esimo é *attivo* in x^* se $a_i^\top x^* = b_i$, ove $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definizione 3.8 (Soluzione di base) *Dato il sistema di vincoli in $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{array}{rcll} a_i^\top x & = & b_i, & i = 1, \ldots, k; \\ a_i^\top x & \leq & b_i, & i = k+1, \ldots, m; \end{array}$$

un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é una soluzione di base *del sistema se*

- $a_i^\top x^* = b_i, \quad i = 1, \ldots, k;$
- *esistono n vincoli del sistema attivi in x^* che sono linearmente indipendenti.*

Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é una soluzione di base ammissibile *del sistema di vincoli se x^* é una soluzione di base e $a_i^\top x^* \leq b_i$, $i = k+1, \ldots, m$.*

Teorema 3.9 *Sia P un poliedro in $\mathbb{R}^n$, e siano $A' \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b' \in \mathbb{R}^k$, $A'' \in \mathbb{R}^{(m-k)\times n}$, $b'' \in \mathbb{R}^{(m-k)}$ tali che $P = \{x \mid A'x = b', A''x \leq b''\}$. Dato un punto $x^* \in P$, le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(*i*) *x^* é una punto estremo di P.*

(ii) *x^* é una soluzione di base ammissibile di $A'x = b'$, $A''x \le b''$.*

(iii) *x^* é un vertice di P.*

Dimostrazione: (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) Supponiamo x^* sia un punto estremo di P. Dunque x^* é ammissibile per $A'x = b'$, $A''x \le b''$, e dobbiamo dimostrare che é di base. Sia $A^=$ la sottomatrice di $\binom{A'}{A''}$ formata dalle righe che corrispondono a vincoli del sistema attivi in x^*, e sia $A^<$ la sottomatrice di $\binom{A'}{A''}$ formata dalle righe rimanenti. Siano $b^=$ e $b^<$ vettori ottenuti in modo analogo dalle componenti di $\binom{b'}{b''}$. Dunque

$$A^= x^* = b^=;$$
$$A^< x^* < b^<.$$

Si noti che x^* é di base se e solo se $\mathrm{rk}(A^=) = n$. Supponiamo per contraddizione che $\mathrm{rk}(A^=) < n$. Allora esiste un vettore non-nullo $y \in \mathbb{R}^n$ tale che $A^= y = 0$. Si noti che, scelto uno scalare $\epsilon > 0$, e definiti i vettori $x' = x^* + \epsilon y$ e $x'' = x^* - \epsilon y$, allora $A^= x' = A^= x^* + \epsilon A^= y = A^= x^* + 0 = b^=$, mentre, per ϵ sufficientemente piccolo, $A^< x' = A^< x^* + \epsilon A^< y \le b^<$. Analogamente, per ϵ sufficientemente piccolo $A^= x'' = b^=$ e $A^< x'' \le b^<$. Dunque x' e x'' sono punti in P, e $x^* = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$, contraddicendo il fatto che x^* é un punto estremo.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) Supponiamo che x^* sia di base ammissibile e, senza perdita di generalitá, assumiamo che le righe di $A^=$ siano i vettori $a_1^\top, \ldots, a_p^\top$ e $b^= = (b_1, \ldots, b_p)^\top$. Definiamo $c = a_1 + \ldots + a_p$. Dimostreremo che $c^\top x < c^\top x^*$ per ogni $x \in P \setminus \{x^*\}$, e che dunque x^* é un vertice di P. Poiché ogni $x \in P$ soddisfa $a_1^\top x \le b_1, \ldots, a_p^\top x \le b_p$, e poiché $a_1^\top x^* = b_1, \ldots, a_p^\top x^* = b_p$, abbiamo

$$c^\top x = a_1^\top x + \ldots + a_p^\top x \le b_1 + \ldots + b_p = a_1^\top x^* + \ldots + a_p^\top x^* = c^\top x^*.$$

Dunque $c^\top x \le c^\top x^*$ per ogni $x \in P$, e l'uguaglianza vale se e solo se $a_1^\top x + \ldots + a_p^\top x = b_1 + \ldots + b_p$, che avviene se e solo se $A^= x = b^=$. Poiché x^* é di base, $A^=$ ha rango n, e dunque $A^= x = b^=$ ha una unica soluzione, ovvero x^*. Pertanto, per ogni punto $x \in P \setminus \{x^*\}$, $c^\top x < c^\top x^*$.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**i**) Supponiamo che x^* sia un vertice di P, e sia $c \in \mathbb{R}^n$ tale che x^* sia l'unico punto di P tale che $c^\top x < c^\top x^*$ per ogni $x \in P \setminus \{x^*\}$. Supponiamo, per assurdo, che x^* non sia un punto estremo di P. Dunque esistono due punti distinti $y, z \in P$, e uno scalare $\lambda \in (0, 1)$ tali che $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$. Dunque $x^* \ne y$ e $x^* \ne z$ e, per la scelta di c, abbiamo $c^\top y < c^\top x^*$ e $c^\top z < c^\top x^*$. Dunque

$$\begin{aligned} c^\top x^* &= c^\top(\lambda y + (1-\lambda)z) = \lambda c^\top y + (1-\lambda) c^\top z \\ &< \lambda c^\top x^* + (1-\lambda) c^\top x^* \\ &= c^\top x^*, \end{aligned}$$

che é un assurdo (ove la disuguaglianza vale poiché $\lambda > 0$ e $1 - \lambda > 0$). $\square$

3.3 Forma standard

Supponiamo che P sia un poliedro definito da $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\, x \geq 0\}$, ove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Supponiamo che $P \neq \emptyset$. Dunque $Ax = b$ ammette una soluzione, pertanto $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$. Possiamo dunque assumere, senza perdita di generalitá, che $m = \mathrm{rk}(A)$. Vogliamo caratterizzare le soluzioni di base di $Ax = b$, $x \geq 0$.

Da ora in avanti, denoteremo con A_j, $j = 1, \ldots, m$, le colonne di A. Dato un insieme $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, denoteremo con A_S la sottomatrice di A formata dalle colonne A_j, $j \in S$.

Definizione 3.10 *Un insieme $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ é detta una* base *di A se*

- *$|B| = m$;*
- *i vettori A_j, $j \in B$, sono linearmente indipendenti.*

Proposizione 3.11 *Una punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é una soluzione di base di $Ax = b$, $x \geq 0$ se e solo se $Ax^* = b$ ed esiste una base B di A tale che $x^*_j = 0$ per ogni $j \notin B$.*

Dimostrazione: Supponiamo x^* sia di base per $Ax = b$, $x \geq 0$. Allora esistono n vincoli attivi in x^* linearmente indipendenti. Per definizione tutti i vincoli in $Ax = b$ sono attivi in x^*. Inoltre, poiché $\mathrm{rk}(A) = m$, allora tali vincoli sono linearmente indipendenti, dunque esistono $n - m$ vincoli di nonnegativitá attivi in x^*, diciamo $x_i \geq 0$, $i \in N$, ove $N \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - m$, tali che i vincoli $a_i^\top x = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, e $x_i \geq 0$, $i \in N$, siano linearmente indipendenti. A meno di permutare le variabili, possiamo assumere $N = \{m + 1, \ldots, n\}$, e sia $B = \{1, \ldots, m\}$. Dunque la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} A_B & A_N \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array}\right)$$

é non singolare, ove I denota la matrice identitá $(n - m) \times (n - m)$. Tale matrice é non-singolare se e solo se A_B é non-singolare, ovvero se e solo se B é una base di A. Poiché i vincoli $x_j \geq 0$, $j \in N$ sono attivi in x^*, $x^*_j = 0$, $j \in N$, come volevasi dimostrare.

Viceversa, supponiamo che esista una base B di A tale che $x^*_j = 0$ per ogni $j \notin B$. A meno di permutare le variabili, possiamo assumere $B = \{1, \ldots, m\}$, e sia $N = \{m+1, \ldots, n\}$. Poiché B é una base, A_B é non-singolare, dunque

$$\left(\begin{array}{c|c} A_B & A_N \\ \hline \mathbf{0} & I \end{array}\right)$$

é non singolare. Pertanto i vincoli $a_i^\top x = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, e $x_j \geq 0$, $j \in N$, sono linearmente indipendenti e sono attivi in x^*, dunque x^* é una soluzione di base di $Ax = b$, $x \geq 0$. $\square$

Corollario 3.12 *Una punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é una soluzione di base di $Ax = b$, $x \geq 0$ se e solo se $Ax^* = b$ e i vettori $\{A_j \,|\, x_j^* \neq 0\}$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione: Se x^* é di base, allora per il teorema precedente esiste una base B di $Ax = b$, $x \geq 0$ tale che $\{A_j \,|\, x_j^* \neq 0\} \subseteq \{A_j \,|\, j \in B\}$, e tali vettori sono linearmente indipendenti per definizione.

Viceversa, se $\{A_j \,|\, x_j^* \neq 0\}$ sono linearmente indipendenti, allora possiamo scegliere una base B di $Ax = b$, $x \geq 0$ tale che $\{j \,|\, x_j^* \neq 0\} \subseteq B$. Pertanto $x_j^* = 0$ per ogni $j \notin B$, e per il teorema precedente x^* é di base. $\square$

Lemma 3.13 *Data una base B di $Ax = b$, $x \geq 0$, esiste un unico vettore x^* tale che $Ax^* = b$, $x_j^* = 0$, $j \notin B$.*

Dimostrazione: A meno di permutare le variabili, possiamo assumere $B = \{1, \ldots, m\}$, e sia $N = \{m+1, \ldots, n\}$. Denotiamo con x_B^* il vettore formato dalle prime m componenti di x^*, e x_N^* il vettore formato dalle rimanenti componenti. Dunque $Ax^* = A_B x_B^* + A_N x_N^* = A_B x_B^* = b$. Poiché B é una base, A_B é non-singolare, e dunque ammette inversa. Pertanto $x_B^* = A_B^{-1} b$. $\square$

Definizione 3.14 *Data una base B di $Ax = b$, $x \geq 0$, la* soluzione di base *relativa a B é l'unico vettore x^* tale che $Ax^* = b$, $x_j^* = 0$, $j \notin B$, ovvero il vettore definito da*

$$\begin{aligned} x_B^* &= A_B^{-1} b; \\ x_N^* &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se x^* é ammissibile, ovvero se $A_B^{-1} b \geq 0$, B é detta una base ammissibile *di $Ax = b$, $x \geq 0$.*

Teorema 3.15 *Per ogni $c \in \mathbb{R}^n$ tale che il problema*

$$\begin{aligned} \max c^\top x & \\ Ax = & \; b \\ x \geq & \; 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ammette un ottimo, esiste una soluzione ottima x^* che é una soluzione di base ammissibile.

Dimostrazione: Sia x^* una soluzione ottima di (3.2) e, tra tutte le soluzioni ottime, scegliamo x^* con il numero massimo di componenti nulle. Dimostreremo che x^* deve essere di base. Si supponga di no, e sia $S = \{j \mid x^*_j > 0\}$. Per il Corollario 3.12, i vettori A_j, $j \in S$ non sono linearmente indipendenti, altrimenti x^* sarebbe di base. Dunque il vettore nullo puó essere scritto come combinazione lineare non nulla di tali vettori, ovvero esiste $z \in \mathbb{R}^{|S|}$ tale che $z \neq 0$ e $A_S z = 0$.

Sia $z^* \in \mathbb{R}^n$ il vettore definito da $z^*_j = z_j$, $j \in S$, $z^*_j = 0$, $j \notin S$. Pertanto $Az^* = 0$, $z^* \neq 0$, e $z^*_j = 0$ per ogni $j \notin S$.

Si noti che, per ogni $t \geq 0$, $A(x^* - tz^*) = Ax^* - tAz^* = b$ e $z^*_j = 0$ per ogni j ove $x^*_j = 0$, pertanto, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, $x^* + \epsilon z^*$ e $x^* - \epsilon z^*$ sono entrambi ammissibili. Inoltre $c^\top(x^* + \epsilon z^*) = c^\top x^* + \epsilon c^\top z^*$ e $c^\top(x^* - \epsilon z^*) = c^\top x^* - \epsilon c^\top z^*$, e dunque, poiché x^* é soluzione ottima, $c^\top z^* = 0$. Pertanto $x^* - tz^*$ é una soluzione ottima per ogni $t \in \mathbb{R}$ per cui $(x^* - tz^*)$ é ammissibile

Possiamo assumere che z^* abbia una componente positiva (altrimenti basta considerare $-z^*$).

Sia $\bar{t}$ lo scalare piú grande possibile tale che il punto $\bar{x} = x^* - \bar{t}z^*$ sia ammissibile per (3.2). Tale punto é ammissibile se e solo se $x^* \geq \bar{t}z^*$, e questo avviene se e solo se

$$\bar{t} \leq \frac{x^*_j}{z^*_j}, \quad \text{per ogni } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tale che } z^*_j > 0.$$

Dunque $\bar{t} = \min\{\frac{x^*_j}{z^*_j} \mid j \in \{1, \ldots, n\} \text{ tale che } z^*_j > 0\}$. Per un precedente assunto, esiste h tale che $z^*_h > 0$ e dunque, per definizione di z^*, $h \in S$ e $x^*_h > 0$. Pertanto $\bar{t}$ esiste finito, e possiamo scegliere h tale che $\frac{x^*_h}{z^*_h} = \bar{t}$. Ma allora $\bar{x}_h = x^*_h - \frac{x^*_h}{z^*_h} z^*_h = 0$, mentre per ogni $j \notin S$, $\bar{x}_j = x^*_j + \bar{t}z^*_j = 0 + 0 = 0$. Dunque $\bar{x}$ é una soluzione ottima con almeno una componente nulla in piú rispetto a x^*, una contraddizione. Pertanto x^* é di base. $\square$

Corollario 3.16 *Se $Ax = b$, $x \geq 0$ ammette soluzione, allora ha una soluzione di base ammissibile.*

Dimostrazione: Si consideri il problema di PL (3.2) ove $c \in \mathbb{R}^n$ sia il vettore nullo. Chiaramente, ogni soluzione ammissibile é ottima. Per il teorema precedente, (3.2) ha una soluzione ottima che é una soluzione di base ammissibile. $\square$

NOTA: Mentre abbiamo visto che ogni sistema in forma standard, che ammetta soluzione, ha una soluzione di base ammissibile, questo non é vero per sistemi generali. Ad esempio, il sistema di vincoli

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1, \\
x_1 + x_2 & \geq & 0, \\
x_3 & \geq & 0,
\end{array}
$$

non ha alcuna soluzione di base, poiché consiste di soli 3 vincoli che non sono linearmente indipendenti.

Capitolo 4

Il metodo del simplesso

4.1 Il metodo del simplesso

Consideriamo il problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \max c^\top x & \\ Ax = & \; b \\ x \geq & \; 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, e x è un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

- Con il metodo di Gauss, possiamo determinare se il sistema $Ax = b$ ammette soluzione. In caso contrario, chiaramente anche (4.1) non ammette soluzione. Pertanto possiamo assumere che $Ax = b$ ammetta soluzione, ovvero $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$.
- Alla fine del metodo di Gauss, si determina un sistema equivalente a $Ax = b$ in cui il numero di righe é $\mathrm{rk}(A)$. Possiamo dunque assumere che A abbia rango pieno sulle righe, ovvero $\mathrm{rk}(A) = m$.

Per convenienza nella trattazione, riscriviamo il problema (4.1) nella seguente forma equivalente:

$$\begin{aligned} \max z & \\ z - c^\top x = & \; 0 \\ Ax = & \; b \\ x \geq & \; 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sia $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ una base di $Ax = b$, $x \geq 0$. Allora x soddisfa le disuguaglianze precedenti se e solo se soddisfa $A_B^{-1}Ax = A_B^{-1}b, x \geq 0$. Per semplicitá, assumiamo per il momento che $B = \{1, \ldots, m\}$, e dunque

$$A = (A_B, A_N).$$

Dunque una soluzione $x \geq 0$ è ammissibile per (4.1) se e solo se soddisfa

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$$

ove $x = \binom{x_B}{x_N}$.

Sostituendo x_B con $A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$ nell'equazione $z - c_B^\top x_B - c_N^\top x_N = 0$ (dove $c = \binom{c_B}{c_N}$), otteniamo

$$z - (c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N) x_N = c_B^\top A_B^{-1} b.$$

Definiamo

$$\begin{aligned} \bar{A}_N &= A_B^{-1} A_N; \\ \bar{b} &= A_B^{-1} b; \\ \bar{c} &= c - A^\top {A_B^{-1}}^\top c_B; \\ \bar{z} &= c_B^\top A_B^{-1} b. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Il vettore $\bar{c}$ è detto il *vettore dei costi ridotti* di c relativo alla base B. Si noti che

$$\begin{aligned} \bar{c}_B &= c_B - A_B^\top {A_B^{-1}}^\top c_B = 0; \\ \bar{c}_N &= c_N - A_N^\top {A_B^{-1}}^\top c_B; \end{aligned}$$

Dunque (4.2) è equivalente al problema:

$$\begin{array}{lllcl} \max & z & & & \\ & z & -\bar{c}_N x_N & = & \bar{z} \\ & x_B & +\bar{A}_N x_N & = & \bar{b} \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \tag{4.4}$$

Il problema (4.4) è detto *in forma tableau rispetto alla base B*. Spesso rappresenteremo tale problema in forma compatta attraverso la seguente matrice

$$\begin{array}{|c|cc|c|} \hline 1 & \mathbf{0} & -\bar{c}_N^\top & \bar{z} \\ \hline \mathbf{0} & I & \bar{A}_N & \bar{b} \\ \hline \end{array} \quad ,$$

che chiameremo il *tableau* del problema (4.1) rispetto alla base B.

Avvertenza. In generale, le variabili in base non saranno le prime m, e non compariranno in ordine nei vincoli del problema in forma tableau. Se gli elementi di B sono $B[1], \ldots, B[m] \in \{1, \ldots, n\}$, e $A_B = [A_{B[1]}, \ldots, A_{B[m]}]$, allora il problema in forma tableau sará

$$
\begin{array}{llcrcll}
\max & z & & & & & \\
 & z & & -\sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j & = & \bar{z} & \\
 & & x_{B[i]} & +\sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j & = & \bar{b}_i, & i = 1, \ldots, m \\
 & & & x & \geq & 0. &
\end{array}
\tag{4.5}
$$

Diremo che $x_{B[h]}$ é *la variabile in base nella riga h.*

Si noti che, se $\bar{b} \geq 0$, ovvero se la base B è ammissibile, allora la soluzione $\bar{x}$ di base rispetto a B, definita da

$$
\begin{array}{rcll}
\bar{x}_{B[i]} & = & \bar{b}_i; & i = 1, \ldots, m \\
\bar{x}_N & = & 0; &
\end{array}
$$

ha valore, nella funzione obiettivo,

$$c_B^\top \bar{x}_B + c_N^\top \bar{x}_N = c_B^\top A_B^{-1} b = \bar{z}.$$

Supponiamo che $\bar{c}_N \leq 0$. In tal caso, per ogni soluzione ammissibile $\tilde{x}$ di (4.1), il valore della funzione obiettivo valutata in $\tilde{x}$ è $c_N^\top \tilde{x}_N + \bar{z} \leq \bar{z}$. Pertanto $\bar{x}$ è ottima per (4.1).

Abbiamo dunque dimostrato il seguente.

Lemma 4.1 *Se B è una base ammissibile per (4.1) e i costi ridotti relativi a B sono nonnegativi, allora la soluzione di base relativa alla base B è ottima.*

Abbiamo dunque un criterio di ottimalitá: se determiniamo una base ammissibile i cui costi ridotti sono nonnegativi, allora abbiamo determinato una soluzione dimostrabilmente ottima.

Possiamo dunque assumere che $\bar{c}_k > 0$ per qualche $k \in N$. Si vuole determinare una nuova soluzione ammissibile il cui valore obiettivo sia migliore.

Per ogni $t \geq 0$, sia $x(t)$ la soluzione definita come segue:

$$
\begin{array}{rcll}
x_k(t) & = & t; & \\
x_{B[i]}(t) & = & \bar{x}_{B[i]} - t\bar{a}_{ik} = \bar{b}_i - t\bar{a}_{ik}, & i = 1, \ldots, m; \\
x_j(t) & = & 0, \quad j \in N \setminus \{k\}. &
\end{array}
\tag{4.6}
$$

Si noti che $x(t)$ soddisfa $x_{B[i]} + \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$, $i = 1, \ldots, m$, e dunque $Ax(t) = b$. Inoltre

$$c^\top x(t) = \bar{c}^\top x(t) + \bar{z} = \bar{c}_k t + \bar{z} \geq \bar{z},$$

ovvero $x(t)$ ha valore, nella funzione obiettivo, maggiore uguale del valore di $\bar{x}$ (si noti che tale valore è strettamente maggiore se e solo se $t > 0$). Vogliamo trovare t tale che $x(t)$ sia una soluzione ammissibile di valore massimo. Si noti che $x(t)$ è ammissibile se e solo se $x(t) \geq 0$. Per definizione, questo succede se e solo se

$$x_{B[i]}(t) = \bar{b}_i - t\bar{a}_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Se, dato $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\bar{a}_{ik} \leq 0$, allora $\bar{b}_i - t\bar{a}_{ik} \geq 0$ per ogni $t \geq 0$.
Se, dato $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\bar{a}_{ik} > 0$, allora $\bar{b}_i - t\bar{a}_{ik} \geq 0$ se e solo se $t \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$.
Pertanto $x(t)$ è ammissibile se e solo se

$$t \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ tale che } \bar{a}_{ik} > 0.$$

Consideriamo due casi:

Caso 1 Esiste $i \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\bar{a}_{ik} > 0$.

Dunque, il massimo valore $\bar{t}$ tale che $x(\bar{t}) \geq 0$ è

$$\bar{t} = \min_{i \in \{1, \ldots, m\} \,:\, \bar{a}_{ik} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \right\}. \tag{4.7}$$

Questo è noto come il *criterio del minimo rapporto*.

Definiamo $\tilde{x} = x(\bar{t})$. Sia $h \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\bar{a}_{hk} > 0$ e $\frac{\bar{b}_h}{a_{hk}} = \bar{t}$. Allora,

$$\tilde{x}_{B[h]} = \bar{b}_h - \bar{t}\bar{a}_{hk} = \bar{b}_h - \frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}}\bar{a}_{hk} = 0,$$

dunque, per definizione,

$$\tilde{x}_j = 0, \quad \forall j \notin \tilde{B}$$

ove $\tilde{B} \setminus \{B[h]\} \cup \{k\}$.
Dimostriamo ora che $\tilde{B}$ è una base, e che pertanto $\tilde{x}$ è la soluzione di base relativa a $\tilde{B}$. Sia $\tilde{A}$ la matrice $m \times m$ ottenuta dalla matrice identitá sostituendo la colonna h-esima con il vettore $\bar{A}_k$. Si noti che $\tilde{A}$ è non-singolare, poiché ha determinante uguale a $\bar{a}_{hk} > 0$, e che $\tilde{A} = A_B^{-1} A_{\tilde{B}}$, ove le colonne di $A_{\tilde{B}}$ siano nell'ordine $\tilde{B}[i] = B[i]$, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{h\}$, $\tilde{B}[h] = k$. Pertanto $A_{\tilde{B}} = A_B \tilde{A}$ è non-singolare, e dunque $\tilde{B}$ è una base.

Si dice che la variabile x_k *entra in base (nella riga h))* (oppure, che x_k è la *variabile entrante*), e che la variabile $x_{B[h]}$ *esce di base* (oppure, che $x_{B[h]}$ è la *variabile uscente*).

Possiamo dunque calcolare il tableau relativo alla base $\tilde{B}$ utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, e ripetere.

Caso 2 $\bar{a}_{ik} \leq 0$ per ogni $i \in B$.

In questo caso, $x(t)$ è ammissibile per ogni $t \geq 0$, e

$$\lim_{t\to+\infty} c^\top x(t) = \bar{z} + \lim_{t\to+\infty} \bar{c}^\top x(t) = \bar{z} + \lim_{t\to+\infty} t\bar{c}_k = +\infty,$$

pertanto il problema è illimitato.

Sia $r = \binom{r_B}{r_N}$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ definito da

$$\begin{array}{rcl} r_k & = & 1; \\ r_{B[i]} & = & -\bar{a}_{ik}; \quad i = 1, \ldots, m; \\ r_j & = & 0, \quad j \in N \setminus \{k\}. \end{array} \tag{4.8}$$

Chiaramente $r \geq 0$, mentre

$$Ar = A_B(-A_B^{-1}A_k) + A_N r_N = -A_k + A_k = 0.$$

Inoltre

$$c^\top r = c_B^\top(-A_B^{-1}A_k) + c_N^\top r_N = c_k - c_B^\top A_B^{-1}A_k = \bar{c}_k > 0,$$

dunque r soddisfa

$$\begin{array}{rcl} c^\top r & > & 0; \\ Ar & = & 0; \\ r & \geq & 0; \end{array}$$

pertanto r dimostra che il problema (4.1) è illimitato, come visto nel Teorema 2.11.

Ricapitolando, la discussione precedente giustifica il seguente metodo per risolvere problemi di PL.

Metodo del Simplesso

Input: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, una base ammissibile $B = \{B[1], \ldots, B[m]\}$ per $Ax = b$, $x \geq 0$;

Output: Una soluzione ottima di base $\bar{x}$ per (4.1), oppure un vettore r che dimostri che il problema è illimitato.

1. Calcola il tableau rispetto alla base B, e la soluzione di base $\bar{x}$ relativa a B;
2. Se $\bar{c} \leq 0$, allora $\bar{x}$ è la soluzione ottima, STOP.
3. Altrimenti, scegli k tale che $\bar{c}_k > 0$;
4. Se $\bar{a}_{ik} \leq 0\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$, allora il problema è illimitato; ritorna il vettore r definito come in (4.8), STOP.
5. Altrimenti scegli $h \in \{1, \ldots, m\}$ tale che
$$\bar{a}_{hk} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \,:\, i \in \{1, \ldots, m\},\, \bar{a}_{ik} > 0\right\};$$
6. Poni $B[h] := k$, vai ad 1.

4.1.1 Pivots

Si noti che, durante l'esecuzione dell'algoritmo del simplesso, quando dal punto 6. si torna al 1. con una nuova base $\tilde{B} = B \setminus \{B[h]\} \cup \{k\}$, ove gli elementi di $\tilde{B}$ siano nell'ordine $\tilde{B}[i] = B[i]$, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{h\}$, $\tilde{B}[h] = k$. il tableau $\tilde{T}$ relativo a $\tilde{B}$ puó essere facilmente calcolato a partire dal tableau T relativo alla base B utilizzando operazioni riga-equivalenti. Assumiamo per semplicitá che $B = \{1, \ldots, m\}$ e $B[i] = i$ per $i = 1, \ldots, m$.

Il tableau T relativo a B sará della forma

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc}
 & & h & & & k & & \\
\end{array} \\
T = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 \ \dots & 0 & \dots \ 0 & \dots & -\bar{c}_k & \dots & \bar{z} \\
\hline
0 & 1 & & & & \bar{a}_{1k} & & \bar{b}_1 \\
\vdots & \ddots & & & & \vdots & & \vdots \\
\hline
0 & & 1 & & & \bar{a}_{hk} & & \bar{b}_h \\
\hline
\vdots & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
0 & & & 1 & & \bar{a}_{mk} & & \bar{b}_m \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

e poiché $\tilde{T}$ dovrá avere una colonna unitaria nella colonna k, in cui l'elemento unitario appare in posizione h, attraverso operazioni riga otterremo la matrice

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc}
 & & h & & & k & & \\
\end{array} \\
\tilde{T} = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 \ \dots & \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} & \dots \ 0 & \dots & 0 & \dots & \bar{z} + \frac{\bar{c}_k \bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} \\
\hline
0 & 1 & -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{hk}} & & & 0 & & \bar{b}_1 - \frac{\bar{a}_{1k} \bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
\hline
0 & & \frac{1}{\bar{a}_{hk}} & & & 1 & & \frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} \\
\hline
\vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
0 & & -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{hk}} & 1 & & 0 & & \bar{b}_m - \frac{\bar{a}_{mk} \bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

ovvero,

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{riga}_h(\tilde{T}) & = & \frac{1}{\bar{a}_{hk}} \mathrm{riga}_h(T) \\
\mathrm{riga}_i(\tilde{T}) & = & \mathrm{riga}_i(T) - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{hk}} \mathrm{riga}_h(T), \quad i = 0, \dots, m, \, i \neq h.
\end{array}
$$

ove la riga 0 si riferisce alla riga relativa al vincolo che definisce la funzione obiettivo

Tale operazione si chiama *pivot sull'entrata* (h, k).

4.1.2 Basi degeneri e terminazione

Si noti che, affinché il metodo specificato sopra sia un vero e proprio algoritmo, è necessario specificare come vengono scelte le variabili uscenti ed entranti. Una regola di scelta delle variabili uscenti ed entranti é detta una *regola di pivot.*

Per dimostrare la correttezza del Metodo del Simplesso, è chiaro che quando si verifica una delle condizioni di terminazione al punto 2. o al punto 4., allora l'output dell'algoritmo è corretto. Ció che tuttavia non è chiaro è che il metodo termini. Infatti, se ad ogni iterazione il valore

$$\bar{t} = \min_{i \in B : \bar{a}_{ik} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \right\} \tag{4.9}$$

fosse positivo, allora il valore della funzione aumenterebbe strettamente, e dunque il metodo terminerebbe dopo un numero finito di iterazioni, poiché la stessa base non potrebbe essere visitata piú di una volta, e vi è un numero finito di basi.

Si noti che $\bar{t} = 0$ se e solo se esiste qualche indice i tale che $\bar{b}_i = 0$ e $\bar{a}_{ik} > 0$, ovvero se $\bar{x}_{B[i]} = 0$. In tal caso, la nuova base $B \setminus \{B[h]\} \cup \{k\}$, determinata al punto 6. del Metodo del Simplesso, definisce la stessa soluzione di base B.

Definizione 4.2 *Una base ammissibile B si dice* non-degenere *se la soluzione di base $\bar{x}$ relativa a B soddisfa $\bar{x}_i > 0$ per ogni $i \in B$, ovvero se $\bar{b} = A_B^{-1} b > 0$. Una base ammissibile si dice* degenere *altrimenti.*

Dunque, se la base B corrente ad una iterazione del metodo del simplesso è non-degenere, allora $\bar{t} > 0$, e dunque la soluzione di base relativa alla base $B \setminus \{B[h]\} \cup \{k\}$ ha valore $\bar{z} + \bar{t}\bar{c}_k$, che è strettamente maggiore del valore di $\bar{x}$.

Dunque, se durante l'esecuzione del metodo del simplesso vengono visitate solo basi non-degeneri, allora tale metodo termina dopo un numero finito di iterazioni.

Tuttavia questo in generale non accade, ed è possibile che il metodo "cicli", ovvero visiti la stessa base un numero infinito di volte senza che il valore della soluzione corrente aumenti.

Dimostreremo che esistono regole di pivot che garantiscono che il metodo del simplesso termini in tempo finito. Ad esempio, una tale regola è la cosiddetta **regola di Bland**, in cui si sceglie come variabile entrante la variabile di indice minimo tra quelle di costo ridotto positivo, e come variabile uscente la variabile di indice minimo tra quelle che minimizzano il rapporto in (4.9).

4.2 Metodo delle due fasi

Il metodo del simplesso richiede che venga specificata una base ammissibile da cui partire. Per trovare una base ammissibile del problema (P) definito da

$$\begin{aligned} \max c^\top x & \\ Ax = & \; b \\ x \geq & \; 0 \end{aligned}$$

controlliamo innanzitutto che il sistema $Ax = b$ ammetta soluzione, applicando il metodo di eliminazione di Gauss. Se questo non avviene, concludiamo che (P) non è ammissibile. Altrimenti, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$ e dunque, sempre attraverso il metodo di eliminazione di Gauss, possiamo eliminare i vincoli ridondanti e ottenere un sistema a rango pieno sulle righe. Pertanto possiamo assumere che $\mathrm{rk}(A) = m$.

Possiamo inoltre assumere che $b \geq 0$, perché possiamo cambiare di segno a tutti i coefficienti nei vincoli in cui b_i sia negativo.

A questo punto, per determinare se (P) ammette soluzione, costruiamo un *problema ausiliario*, definito sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$ del problema (P) e su m variabili ausiliari $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, una per ciascun vincolo. Denotiamo con x_A il vettore $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^\top$, e sia e il vettore $(1, \ldots, 1)^\top$ di dimensione m.

Il problema ausiliario (F) è

$$\begin{array}{rrrl} w^* = & \max & -e^\top x_A & \\ & Ax & +Ix_A = & b \\ & x, & x_A \geq & 0 \end{array}$$

Nota 4.3

(a) *$\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per (P) se e solo se $\binom{\bar{x}}{0}$ è ammissibile per (F).*

(b) *La soluzione $\bar{x} = 0$ $\bar{x}_A = b$ è ammissibile per (F) poiché $b \geq 0$. Pertanto (F) è ammissibile*

(c) *$-e^\top x_A \leq 0$ per ogni $x_A \geq 0$, pertanto il problema non è illimitato.*

Si noti che la soluzione data in (b) è di base rispetto alla base $\tilde{B} = \{n+1, \ldots, n+m\}$, che è ammissibile per (F).

La **Fase 1** consiste nel risolvere (F) applicando il metodo del simplesso a partire dalla base $\tilde{B}$. Il metodo del simplesso con la regola di Bland termina, e termina o perché è stata determinata una soluzione di base ottima oppure perché si è determinato che il problema è illimitato. Per il punto (c), il problema non è illimitato, pertanto l'algoritmo termina con una soluzione di base ottima $\binom{x^*}{x_A^*}$, relativa a qualche base $B^* \subseteq \{1, \ldots, n+m\}$. Si noti che, per (c), il valore w^* della soluzione ottima sará minore o uguale a 0.

Abbiamo dunque due casi.

- $w^* = 0$: Questo avviene se e solo se $x_A^* = 0$, ovvero se e solo se x^* è ammissibile per (P).

- $w^* < 0$: In tal caso (P) è inammissibile, poiché se $\bar{x}$ fosse una soluzione ammissibile per (P), allora $\binom{\bar{x}}{0}$ sarebbe ammissibile per (F) e avrebbe valore $0 > w^*$ in (F), contraddicendo il fatto che w^* è il valore ottimo.

Si noti che, se $w^* = 0$, e dunque $x^*_A = 0$, allora x^* è una soluzione di base per (P), poiché $\{j \,|\, x^*_j > 0,\, j \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq B^* \cap \{1, \ldots, n\}$, e i vettori A_j, $j \in B^* \cap \{1, \ldots, n\}$ sono linearmente indipendenti poiché B^* è una base di $Ax + Ix_A = b$, $x \geq 0, x_A \geq 0$. Pertanto esiste una base B ammissibile per $Ax = b$, $x \geq 0$ che determina x^*.

Metodo delle due fasi

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$;

Output: Una delle seguenti

- Una soluzione ottima di base per (P),
- Il problema non ammette soluzione,
- Il problema è illimitato.

1. Applica il metodo del simplesso al problema ausiliario (F) a partire dalla base $\{n + 1, \ldots, n + m\}$. (Fase 1)
2. Se la soluzione ottima ha valore $w^* < 0$, STOP, (P) è inammissibile.
3. Se la soluzione ha valore $w^* = 0$, allora si è determinata una base ammissibile B per (P).
4. Applica il metodo del simplesso al problema ausiliario (P) a partire dalla base B calcolata in 3. (Fase 2)
5. Ritorna o la soluzione ottima per (P) o il fatto che (P) è illimitato, STOP.

Si noti che, poiché il metodo del simplesso con la regola di Bland termina, il metodo delle due fasi termina sempre avendo concluso o che il problema è inammissibile, o che è illimitato, oppure che esiste una soluzione ottima. Questo dimostra il seguente.

Teorema 4.4 (Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare) *Dato un problema di Programmazione Lineare, è verificata esattamente una delle seguenti affermazioni:*

(*i*) *Il problema è inammissibile.*

(*ii*) *Il problema è illimitato.*

(*iii*) *Il problema ammette una soluzione ottima.*

4.3 Metodo del Simplesso e dualitá

Si consideri nuovamente il problema (P)

$$\begin{aligned} \max c^\top x & \\ Ax = & \; b \\ x \geq & \; 0 \end{aligned}$$

e il suo duale (D)

$$\begin{aligned} \min b^\top y & \\ A^\top y \geq & \; c. \end{aligned}$$

Sia B una base (non necessariamente ammissibile) di $Ax = b$, $x \geq 0$.

La soluzione di base di (P) determinata da B è

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definiamo

$$\bar{y} = (A_B^{-1})^\top c_B.$$

Si noti che

$$c^\top \bar{x} = c_B^\top \bar{x}_B = c_B^\top A_B^{-1} b = b^\top \bar{y}.$$

Pertanto, se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ammissibili per (P) e (D), rispettivamente, allora, per il Teorema di Dualitá debole, $\bar{x}$ è ottima per (P) e $\bar{y}$ è ottima per (D).

$\bar{x}$ è ammissibile se e solo se $\bar{b} = A_B^{-1} b \geq 0$.

$\bar{y}$ è ammissibile se e solo se $A^\top \bar{y} \geq c$, ovvero se e solo se

$$\begin{aligned} A_B^\top \bar{y} & \geq c_B \\ A_N^\top \bar{y} & \geq c_N \end{aligned}$$

Poiché $A_B^\top \bar{y} = A_B^\top (A_B^{-1})^\top c_B = c_B$, la prima delle due condizioni è sempre verificata. Dunque $\bar{y}$ è ammissibile se e solo se $A_N^\top (A_B^{-1})^\top c_B \geq c_N$ ovvero se e solo se

$$c_N - A_N^\top (A_B^{-1})^\top c_B \leq 0.$$

Si noti che, come definito in (4.3), $c_N - A_N^\top (A_B^{-1})^\top c_B = \bar{c}_N$ ove $\bar{c}_N$ è il vettore dei costi ridotti delle variabili non in base relativo alla base B. Pertanto $\bar{y}$ è ammissibile se e solo se

$$\bar{c}_N \leq 0.$$

Questa è precisamente la condizione verificata dal Metodo del Simplesso quando esso termina con una soluzione ottima. Pertanto quando il Metodo del simplesso termina con una soluzione ottima di base $\bar{x}$, ed una base B che determina tale soluzione, il vettore $\bar{y} = (A_B^{-1})^\top c_B$ è una soluzione ottima del problema duale, che certifica che la soluzione $\bar{x}$ è ottima.

Definizione 4.5 *Sia B una base per il problema (P).*
B è detta una base ammissibile nel primale *se $A_B^{-1} b \geq 0$.*
B è detta una base ammissibile nel duale *se $c_N - A_N^\top (A_B^{-1})^\top c_B \leq 0$, ovvero se $\bar{y}$ è ammissibile per (D).*
B è detta una base ottima *se è ammissibile nel primale e nel duale.*

Dunque, se (P) ammette un ottimo, il metodo del simplesso mantiene una soluzione ammissibile nel primale ad ogni iterazione, e termina con una base ammissibile anche nel duale, ovvero con una base ottima.

Poiché il metodo del simplesso con la regola di Bland termina, abbiamo dimostrato il seguente.

Teorema 4.6 (Teorema di Dualitá Forte) *Se (P) ammette una soluzione ottima x^*, allora (D) ammette una soluzione ottima y^*, e $c^\top x^* = b^\top y^*$.*

4.3.1 Problemi inammissibili

Abbiamo dimostrato in precedenza il seguente

Teorema 4.7 (Lemma di Farkas) *Il sistema di vincoli*

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \tag{4.10}$$

non ammette soluzione se e solo

$$\begin{array}{rcl} A^\top y & \geq & 0 \\ b^\top y & < & 0 \end{array} \tag{4.11}$$

ha soluzione.

Proponiamo adesso una dimostrazione alternativa, basata sul metodo delle due fasi, che mostra come ottenere un certificato di inammissibilitá y come nel Lemma di Farkas, qualora si determini in Fase 1 che (P) non ha soluzione.

Supponiamo che, alla fine di Fase 1, si sia determinato che $w^* < 0$, e che dunque (P) non abbia soluzione. Il metodo del simplesso applicato ad (F) è terminato con una base ottima B^* per il problema (F). Pertanto la soluzione ottima y^* per il duale di (F) determinata da B^* soddisfa

$$b^\top y^* = w^* < 0.$$

Il duale di (F) è il problema

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ A^\top y \geq\ & 0, \\ Iy \geq\ & -e \end{aligned}$$

pertanto $A^\top y^* \geq 0$. Dunque y^* è una soluzione di (2.7).

4.3.2 Metodo del Simplesso duale

Il metodo del simplesso duale mantiene ad ogni iterazione una base ammissibile nel duale (ovvero una base per la quale i costi ridotti siano non-positivi) e termina quando determina una base che sia ammissibile anche nel primale. Tale metodo puó essere interpretato come il metodo del simplesso eseguito sul problema duale invece che sul primale.

Si consideri come al solito il problema (P)

$$\begin{aligned} \max\, & c^\top x \\ Ax =\ & b \\ x \geq\ & 0 \end{aligned}$$

e il suo duale (D)

$$\begin{aligned} \min\ & b^\top y \\ A^\top y \geq\ & c. \end{aligned}$$

Sia $B = \{B[1], \dots, B[m]\}$ una base ammissibile nel duale. Il problema in forma tableau rispetto a tale base sia

$$\begin{array}{rcclcl} z^* = \max & z & & & & \\ & z & & -\sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j & = & \bar{z} \\ & & x_{B[i]} & +\sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j & = & \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & & & x & \geq & 0. \end{array} \tag{4.12}$$

Poiché B é ammissibile nel duale, $\bar{c}_j \geq 0$ per ogni $j \in N$. Si noti che $\bar{z} = c_B^\top A_B^{-1} b$ é il valore della soluzione duale $\bar{y} = (A_B^\top)^{-1} c_B$ associata a B. Dunque, poiché $\bar{y}$ é una soluzione duale ammissibile, $z^* \leq \bar{z}$

La soluzione di base $\bar{x}$ relativa a B é definita da

$$\begin{aligned} \bar{x}_{B[i]} &= \bar{b}_i; \quad i = 1, \ldots, m \\ \bar{x}_N &= 0. \end{aligned}$$

Se $\bar{b}_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, allora $\bar{x}$ é ammissibile, e dunque B é una base ammissibile nel primale, e dunque ottima. In tal caso $\bar{x}$ é una soluzione ottima e abbiamo risolto il problema.

Supponiamo dunque che esista $h \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\bar{b}_h < 0$. Vogliamo far uscire di base la variabile $x_{B[h]}$, e dobbiamo selezionare la variabile entrante in modo da ottenere una nuova base ammissibile nel duale.

Abbiamo due casi.

Caso 1: $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j \in N$.

In tal caso, ogni soluzione ammissibile x per il primale dovrá soddisfare

$$x_{B[h]} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j = \bar{b}_h$$

Poiché $x \geq 0$ e $\bar{a}_{hj} \geq 0$ per ogni $j \in N$, avremo $x_{B[h]} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{hj} x_j \geq 0$, e dunque $0 \geq \bar{b}_h$, che é un assurdo, poiché abbiamo scelto $\bar{b}_h < 0$.

Pertanto, in tal caso, il problema primale non ammette soluzione.

Caso 2: $\bar{a}_{hj} < 0$ per qualche $j \in N$.

Vogliamo determinare un indice k tale che la base $\tilde{B} = B \cup \{k\} \setminus \{B[h]\}$ rimanga ammissibile nel duale. Questo avviene quando il vettore $\tilde{c}$ dei costi ridotti rispetto a $\tilde{B}$ é non-positivo. Sia $\tilde{N} = \{1, \ldots, n\} \setminus \tilde{B}$. Come si puó verificare facendo un pivot sull'entrata (h, k) del tableau relativo alla base B, il vettore $\tilde{c}_{\tilde{N}}$ é dato da

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{B[h]} &= -\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}}, \\ \tilde{c}_j &= \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj}, j \in N \setminus \{k\} \end{aligned}$$

Si noti che, poiché $\bar{c}_k \leq 0$, $\tilde{c}_{B[h]} \leq 0$ se e solo se $\bar{a}_{hk} < 0$. Dunque dobbiamo scegliere un'indice k tale che $\bar{a}_{hk} < 0$. Inoltre, affinché $\tilde{B}$ sia ammissibile nel duale, deve valere $\tilde{c}_j \leq 0$ per ogni $j \in N \setminus \{k\}$, ovvero

$$\bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \bar{a}_{hj} \leq 0.$$

Se $\bar{a}_{hj} \geq 0$, allora la condizione é verificata poiché in tal caso $\tilde{c}_j \leq \bar{c}_j \leq 0$, ove la prima disuguaglianza discende dal fatto che $\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}}\bar{a}_{hj} < 0$, mentre la seconda disuguaglianza discenda dal fatto che B é ammissibile nel duale.

Se $\bar{a}_{hj} < 0$, allora $\tilde{c}_j \leq 0$ se e solo se

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \leq \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}}.$$

Dobbiamo dunque scegliere k tale che $a_{hk} < 0$ e

$$\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} = \min\left\{\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}} \,:\, j \in N,\, \bar{a}_{hj} < 0\right\}.$$

Con una tale scelta di k, $\tilde{B}$ é una base ammissibile. Inoltre, si puó verificare che il valore della soluzione duale rispetto alla base $\tilde{B}$ é

$$c_{\tilde{B}}A_{\tilde{B}}^{-1}b = \bar{z} + \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}}\bar{b}_h \leq \bar{z},$$

ove la disuguaglianza vale poiché $\bar{c}_k \leq 0$, $\bar{a}_{hk} < 0$ e $\bar{b}_h < 0$.

Dunque abbiamo trovato una soluzione duale di base ammissibile di valore minore uguale alla soluzione precedente. Visto che (D) é un problema di minimo, abbiamo dunque una soluzione duale migliore (o non peggiore, se $\bar{c}_k = 0$) rispetto alla precedente precedente.

Ricapitoliamo il metodo del simplesso duale nella tavola seguente.

Metodo del Simplesso Duale

Input: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, una base $B = \{B[1], \dots, B[m]\}$ ammissibile per il duale di (P);

Output: Una soluzione ottima di base $\bar{x}$ per (4.1), oppure il fatto che (P) é inammissibile.

1. Calcola il tableau rispetto alla base B;
2. Se $\bar{b} \geq 0$, allora B è una base ottima, STOP.
3. Altrimenti, scegli h tale che $\bar{b}_h < 0$;
4. Se $\bar{a}_{hj} \geq 0$ $\forall j \in N$, allora il problema è inammissibile, STOP.
5. Altrimenti scegli $k \in N$ tale che
$$\bar{a}_{hk} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} = \min\left\{\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}} \,:\, j \in N,\, \bar{a}_{hj} < 0\right\};$$
6. Poni $B[h] := k$, vai ad 1.

4.4 Terminazione del metodo del simplesso (primale) con la regola di Bland

Consideriamo il problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \max c^\top x & \\ Ax = \; & b \\ x \geq \; & 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, e x é un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Come menzionato in precedenza, la scelta della regola di pivot é fondamentale per garantire la terminazione dell'metodo del simplesso. Vi sono svariate regole di pivot che garantiscono la terminazione. Di seguito ne presentiamo una.

Regola di Bland: *Ad ogni iterazione dell'algoritmo del simplesso, relativa ad una base $B = \{B[1], \dots, B[m]\}$:*

- *Tra tutte le variabili di costo ridotto positivo, scegli* x_k *di indice* k *minimo come variabile entrante.*
- *Dato* $\bar{t} = \min\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0\}$*, scegli* $x_{B[h]}$ *di indice* $B[h]$ *minimo che soddisfi* $\bar{a}_{hk} > 0$ *e* $\frac{\bar{b}_h}{\bar{a}_{hk}} = \bar{t}$ *come variabile uscente.*

Teorema 4.8 *Il metodo del simplesso con la regola di Bland termina per ogni* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*,* $c \in \mathbb{R}^n$*,* $b \in \mathbb{R}^m$*, e per ogni base ammissibile iniziale.*

Dimostrazione: Per contraddizione, supponiamo che esistano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ ed una base ammissibile $B = \{B[1], \dots, B[m]\}$ tali che il metodo del simplesso con la regola di Bland applicato a (4.13) a partire da B non termini. Scegliamo A, b, c e B in modo tale che il problema abbia il minimo numero possibile di variabili (ovvero n piú piccolo possibile). Il problema in forma tableau rispetto a B sia

$$\begin{array}{lrcll} \max z & & & & \\ z & -\sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j & = & \bar{z}; & \\ \quad x_{B[i]} & +\sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j & = & \bar{b}_i, & i = 1, \dots, m. \\ & x & \geq & 0. & \end{array} \tag{4.14}$$

Definiamo $\bar{c}_j = 0$ per $j \in B$, definiamo $\bar{a}_{ij} = 0$ se $j \neq B[i]$, $\bar{a}_{ij} = 1$ se $j = B[i]$ per $i = 1, \dots, m$, $j \in B$. I vincoli di uguaglianza in (4.14) sono pertanto

$$\begin{array}{rcll} z \ -\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j & = & \bar{z}; & \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j & = & \bar{b}_i, & i = 1, \dots, m. \end{array}$$

Osservazione 1 *Durante l'esecuzione del metodo del simplesso a partire da* B *applicando la regola di Bland, ogni variabile entra ed esce di base un numero infinito di volte.*

Per contraddizione, supponiamo che da una certa iterazione t in poi, la variabile x_k rimanga sempre in base oppure sempre fuori base. Naturalmente, possiamo supporre che $t = 0$ e B sia la base corrente a tale iterazione. Se x_k non é in base, allora il problema ottenuto da (4.14) eliminando la colonna del tableau relativa a x_k é un problema con meno variabili per il quale il simplesso con la regola di Bland non termina(infatti, se x_k non entra mai in base, nessuna decisione dell'algoritmo del simplesso dipende dalla colonna relativa a x_k). Se x_k é in base, e $k = B[i]$, allora il problema ottenuto da (4.14) eliminando la colonna del tableau relativa a x_k e il vincolo $x_k + \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$ é un problema con meno variabili per il quale il simplesso con la regola di Bland non termina (infatti, se x_k non esce mai di base, nessuna decisione dell'algoritmo del simplesso dipende dalla riga del tableau relativa alla variabile x_k). Poiché abbiamo scelto (4.14) con il minimo numero di variabili, l'Osservazione 1 é verificata.

Poiché l'algoritmo non termina, significa che da una certa iterazione t in poi tutti i pivots devono essere degeneri, poiché i pivot non-degeneri aumentano il valore della soluzione corrente nella funzione obiettivo. Pertanto possiamo assumere che $t = 0$, e B sia la base corrente all'iterazione t. Sia $\bar{x}$ la soluzione di base ammissibile determinata da B. Si noti che, poiché tutti i pivots effettuati dall'algoritmo sono degeneri, $\bar{x}$ non cambia mai durante l'esecuzione dell'algoritmo.

Osservazione 2 *$\bar{b}_i = 0$ per $i = 1, \dots, m$, $\bar{z} = 0$.*

Se esiste h tale che $\bar{b}_h > 0$, allora $\bar{x}_{B[h]} = \bar{b}_h > 0$. Per l'Osservazione 1, a qualche iterazione $x_{B[h]}$ deve uscire di base, ma nella iterazione successiva avrá dunque valore 0, pertanto la soluzione é cambiata, contraddicendo quanto detto precedentemente.

Per l'Osservazione 1, a qualche iterazione t la variabile x_n sará in base, e sará scelta come variabile uscente. Possiamo assumere $t = 0$ e B sia la base corrente a tale iterazione. Sia h l'indice di riga tale che $n = B[h]$, e sia x_k la variabile entrante.

Osservazione 3 *$\bar{a}_{hk} > 0$ e $\bar{a}_{ik} \leq 0$ per $i = 1, \dots, m$, $i \neq h$.*

Infatti, poiché x_n é la variabile di indice massimo, x_n deve essere l'unica candidata ad uscire di base, dunque $\bar{a}_{hk} > 0$ e, per l'Osservazione 2, $\bar{a}_{ik} \leq 0$ per $i = 1, \dots, m$, $i \neq h$.

Per l'Osservazione 1, a qualche iterazione successiva dove x_n non é in base, x_n viene scelta per entrare in base. Sia $\tilde{B} = \{\tilde{B}[1], \dots, \tilde{B}[m]\}$ la base a tale iterazione, e $\tilde{N} = \{1, \dots, n\} \setminus \tilde{B}$. Il problema in forma tableau rispetto a $\tilde{B}$ sia

$$
\begin{array}{lrrcll}
\max z & & & & & \\
z & & -\sum_{j \in \tilde{N}} \tilde{c}_j x_j & = & 0 & \\
& x_{\tilde{B}[i]} & +\sum_{j \in \tilde{N}} \tilde{a}_{ij} x_j & = & 0 & i = 1, \dots, m \\
& & x & \geq & 0 &
\end{array}
\tag{4.15}
$$

Come prima, definiamo $\tilde{c}_j = 0$ per $j \in B$, cosicché la prima equazione in (4.15) puó essere scritta nella forma $z - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j = 0$.

Poiché x_n é la variabile di indice massimo, allora x_n deve essere l'unica candidata ad entrare in base. Pertanto vale la seguente.

Osservazione 4 *$\tilde{c}_n > 0$ e $\tilde{c}_j \leq 0$ per $j = 1, \ldots, n-1$.*

Il problema (4.15) é stato ottenuto da (4.14) attraverso operazioni di pivot. Dunque, il vincolo $z - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j = 0$ é stato ottenuto sommando a $z - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j = 0$ multipli dei vincoli $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Dunque esistono dei moltiplicatori $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tali che

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \bar{a}_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Osservazione 5 *$\mu_h > 0$ e $\mu_i \leq 0$ per $i = 1, \ldots, m$, $h \neq i$.*

Infatti, per $i = 1, \ldots, m$, abbiamo

$$\tilde{c}_{B[i]} = \bar{c}_{B[i]} + \sum_{\ell=1}^{m} \mu_\ell \bar{a}_{\ell B[i]} = 0 + \mu_i.$$

Ovvero $\mu_i = \tilde{c}_{B[i]}$, $i = 1, \ldots, m$. Poiché $B[h] = n$, dall'Osservazione 4 otteniamo $\mu_h = \tilde{c}_{B[h]} > 0$ e $\mu_i = \tilde{c}_{B[i]} \leq 0$ per $i = 1, \ldots, m$, $h \neq i$.

Poiché nella prima iterazione, relativa alla base B, x_k era stato selezionato per entrare in base e x_n era la variabile uscente, allora $k < n$ e $\bar{c}_k > 0$. Pertanto

$$\tilde{c}_k = \underbrace{\bar{c}_k}_{>0} + \sum_{i=1, i \neq h}^{m} \underbrace{\mu_i \bar{a}_{ik}}_{\geq 0} + \underbrace{\mu_h \bar{a}_{hk}}_{>0} > 0,$$

dove la disuguaglianza discende dalle Osservazioni 3 e 5. Dunque $\tilde{c}_k > 0$ e $k < n$, contraddicendo l'Osservazione 4.

□

4.5 Il metodo del simplesso revisionato (o rivisto)

Si consideri il problema di PL in forma standard

$$\begin{aligned} \max c^\top x & \\ Ax = & \ b \\ x \geq & \ 0 \end{aligned}$$

e sia $B = \{B[1], \ldots, B[m]\}$ una base ammissibile di tale problema visitata durante l'esecuzione del metodo del simplesso (primale).

Compiere una iterazione dell'algoritmo del simplesso consiste nello scegliere una variabile entrante di costo ridotto positivo ed una variabile uscente che soddisfi il criterio dei minimi rapporti. Per scegliere la variabile entrante e la variabile uscente necessitiamo delle seguenti informazioni.

- Il vettore dei costi ridotti delle variabili non in base $\bar{c}_N = c_n - c_b {A_B}^{-1} A_N$,
- Determinata la variabile entrante x_k (e dunque $\bar{c}_k > 0$), ci serve la colonna relativa a x_k della matrice $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$;
- Il vettore $\bar{b} = A_B^{-1} b$.

Dunque possiamo eseguire una iterazione del metodo del simplesso senza ricalcolare l'intero tableau. Infatti, supponiamo di aver calcolato la soluzione di base $\bar{x}$ relativa a B alla iterazione precedente, ove

$$\begin{aligned} \bar{x}_{B[i]} &= \bar{b}_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ \bar{x}_j &= 0, \quad j \in N \end{aligned}$$

- **Calcolare i costi ridotti:** Sia $j \in N$. Vogliamo calcolare $\bar{c}_j = c_j - A_j^\top y$ ove
$$y = (A_B^\top)^{-1} c_B.$$
A tal fine, risolviamo dunque il sistema
$$A_B^\top y = C_B.$$
- **Determinare la variabile entrante:** Scegli x_k tale che $\bar{c}_k > 0$; se tale k non esiste, x^* é ottimo, STOP.
- **Calcolare la colonna $\bar{A}_k$:** Poiché $\bar{A}_k = {A_B}^{-1} A_k$, risolviamo
$$A_B d = A_k.$$
Poiché A_B é non-singolare, esiste una unica soluzione d, dunque $d = \bar{A}_k$.
- **Determinare la variabile uscente:** Scegliamo la variabile $x_{b[h]}$, ove h sia un indice tale che
$$d_h > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{x}_{B[h]}}{d_h} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B[i]}}{d_i} \mid d_i > 0,\ i = 1, \ldots, m \right\} = \bar{t}.$$
(Si noti che tale rapporto é lo stesso di (4.7).) Se $d_i \leq 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$, allora il problema é illimitato, e il vettore r definito da
$$\begin{aligned} r_k &= 1; \\ r_{B[i]} &= -d_i; \quad i = 1, \ldots, m; \\ r_j &= 0, \quad j \in N \setminus \{k\}. \end{aligned}$$
soddisfa $Ar = 0$, $r \geq 0$, $c^\top r > 0$, STOP.

- **Calcola nuova soluzione:** la soluzione di base $\tilde{x}$ rispetto alla base $B \cup \{k\} \setminus \{B[h]\}$ é

$$\begin{array}{rcll} \tilde{x}_k &=& \bar{t}, & \\ \tilde{x}_{B[i]} &=& \bar{x}_{B[i]} - \bar{t} d_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \tilde{x}_j &=& 0, & j \in N \setminus \{k\}. \end{array}$$

Metodo del Simplesso Revisionato

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, una base ammissibile B per $Ax = b$, $x \geq 0$;

Output: Una soluzione ottima di base $\bar{x}$ per (4.1), oppure un vettore r che dimostra che il problema è illimitato.

Inizializzazione: Calcola la soluzione di base $\bar{x}$ rispetto alla base iniziale B.

1. Risolvi il sistema $A_B^\top y = c_B$;
2. Per $j \in N$, calcola $\bar{c}_j = c_j - A_j^\top y$;
   se $\bar{c}_j \leq 0$ per ogni $j \in N$, $\bar{x}$ é ottima, STOP.
3. Altrimenti, scegli k tale che $\bar{c}_k > 0$ e risolvi il sistema $A_B d = A_k$;
4. Se $d \leq 0$ allora il problema è illimitato; STOP.
5. Altrimenti scegli $h \in \{1, \ldots, m\}$ tale che
$$d_h > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\bar{x}_{B[h]}}{d_h} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B[i]}}{d_i} \mid d_i > 0,\ i = 1, \ldots, m \right\} = \bar{t};$$
6. Poni
$$\begin{array}{rcll} \bar{x}_k &:=& \bar{t}, & \\ \bar{x}_{B[i]} &:=& \bar{x}_{B[i]} - \bar{t} d_i, & i = 1, \ldots, m, \\ \bar{x}_j &:=& 0, & j \in N \setminus \{k\}; \end{array}$$
7. Poni $B := B \setminus \{B[h]\} \cup \{k\}$, vai ad 1.