

Programmazione Matematica / A.A. 2008-2009  
Esercizi – VI

1. Provare che  $x^* = (1, 1/2, -1)$  é l'ottimo globale del problema

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^\top Px + q^\top x + r \\ \text{t.c.} & -1 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3 \end{array}$$

dove

$$P = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -22 \\ -29/2 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad r = 1.$$

(Si può verificare che  $P$  é definita positiva.)

Ci sono almeno i seguenti due modi di dimostrare che  $x^*$  é ottima.

- Si dimostri che  $\nabla f_0(x^*)^\top(x - x^*) \geq 0$  per ogni punto soluzione ammissibile  $x$ .
  - Si scrivano le condizioni KKT, e si dimostri che esiste  $\lambda^*$  tale che  $(x^*, \lambda^*)$  soddisfano le condizioni trovate.
2. Considera il problema in una variabile

$$\begin{array}{ll} \min & x^2 + 1 \\ & (x - 2)(x - 4) \leq 0 \end{array}$$

- Descrivere l'insieme ammissibile, il valore ottimo e la soluzione ottima.
- Tracciare il grafico della funzione obiettivo. Sullo stesso sistema di assi, mostrare l'insieme ammissibile, il punto ottimo e il valore ottimo. Tracciare anche la funzione Lagrangiana  $L(x, \lambda)$  per alcuni valori positivi di  $\lambda$ . Verificare che  $\inf_x L(x, \lambda) \leq p^*$  per  $\lambda \geq 0$ .
- Scrivere il problema duale Lagrangiano e verificare che si tratta di un problema di massimizzazione concava. Determinare il valore ottimo  $d^*$  e la soluzione ottima  $\lambda^*$ . Vale la dualità forte?

3. Considera il problema di ottimizzazione

$$\min e^{-x}$$

$$x^2/y \leq 0$$

con variabili  $x, y$  nel dominio  $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid y > 0\}$ .

- (a) Verifica che si tratta di un problema di minimizzazione convesso. Determinarne il valore ottimo.
- (b) Dare il problema duale e determinarne una soluzione ottima  $\lambda^*$  e il valore ottimo  $d^*$ . Qual'è il gap ottimo di dualità?
- (c) Vale la condizione di Slater?

4. Per ciascuna dei seguenti problemi di ottimizzazione, fare uno schizzo degli insiemi

$$\mathcal{G} = \{(u, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathcal{D}, u = f_1(x), t = f_0(x)\}$$

$$\mathcal{A} = \{(u, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathcal{D}, u \geq f_1(x), t \geq f_0(x)\}$$

dare il duale, e risolvere il problema primale e il problema duale. E' il problema convesso? Vale la condizione di Slater? Vale la dualità forte?

- (a)  $\min\{x \mid x^2 \leq 1\}$ ;
- (b)  $\min\{x \mid x^2 \leq 0\}$ ;
- (c)  $\min\{x \mid |x| \leq 0\}$ ;
- (d)  $\min\{x \mid f(x) \leq 0\}$ , dove

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -x - 2 & \text{se } x < -1 \end{cases} ;$$

- (e)  $\min\{x^3 \mid -x + 1 \leq 0\}$ ;
- (f)  $\min\{x^3 \mid -x + 1 \leq 0\}$  dove  $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$ ;

5. Considerate il seguente problema di minimizzazione convessa:

$$\min \quad x_1^2 + x_2^2$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1$$

- (a) Determina l'insieme ammissibile e la soluzione ottima  $x^*$ ;
- (b) Scrivi le condizioni KKT. Esistono moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  per il primo e il secondo vincolo, rispettivamente, tali che  $(x^*, \lambda^*)$  soddisfa le condizioni KKT?
- (c) Determina il duale del problema. Vale la dualità forte?

6. Considerate il seguente problema di minimizzazione convessa:

$$\begin{aligned} \min \quad & -\ln x \\ & |x - 2| \leq 1 \end{aligned}$$

- (a) Scrivi esplicitamente il duale Lagrangiano del problema, utilizzando un unico moltiplicatore di lagrange per l'unico vincolo del problema;
- (b) Esiste una soluzione ottima per il duale Lagrangiano?
- (c) Esiste una soluzione  $(x, \lambda)$  che soddisfa le condizioni KKT? Evin- cere una soluzione per il problema primale.