Programmazione Matematica / A.A. 2008-2009
Soluzioni di alcuni esercizi

Esercizi - I

3. Aggiungiamo al problema una variabile v, e richiediamo che v soddisfi

$$v \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i|.$$

Fissato x, il minimo v che soddisfa i vincoli precedenti é

$$v = \max_{i=1,\dots,m} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i|.$$

Dunque il problema originale puó essere scritto come

$$\begin{array}{lll} \min & v & \\ v & \geq & |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i| \end{array}$$

nelle variabili $x \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}$. Chiaramente il precedente non é un problema di PL, ma gli m vincoli possono essere sostituiti da $2m$ vincoli lineari, ottenendo il seguente problema

$$\begin{array}{lll} \min & v & \\ v & \geq & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \\ v & \geq & -(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i) \end{array} .$$

5. Abbiamo la seguente coppia primale e duale

$$\begin{array}{llll} \max & c^\top x & & \\ & Ax & = & b \end{array} \quad (P) \quad ; \quad \begin{array}{llll} \min & b^\top y & & \\ & A^\top y & = & c \end{array} \quad (D)$$

Notate che, date due qualunque soluzioni ammissibili $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per (P) e (D), rispettivamente, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soddisfano le condizioni degli scarti complementari, poiché entrambi i problemi hanno solo vincoli di uguaglianza. Dunque, per il teorema di dualitá debole, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime per (P) e (D), rispettivamente.

Esercizi - II

4. Nota che x^* rimane ammissibile per (P'), mentre $\bar{y} = (L^\top)^{-1} y^*$ é ammissibile per il duale (D') di (P'), ovvero

$$\begin{array}{lrcl} \min & b^\top L^\top y & & \\ & A^\top L^\top y & \geq & c \end{array}$$

   Dimostriamo che x^* é ottima per (P') e $\bar{y}$ é ottima per (D'), dimostrando che esse soddisfano le condizioni degli scarti complementari per (P') e (D'). Dobbiamo dimostrare che, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x^*_j > 0$, $(A^\top L^\top \bar{y})_j = c_j$

   Poiché x^* e y^* sono ottime per (P) e (D), rispettivamente, allora se $x^*_j > 0$, $(A^\top y^*)_j = c_j$, dunque $(A^\top L^\top \bar{y})_j = (A^\top L^\top (L^\top)^{-1} y^*)_j = (A^\top y^*)_j = c_j$.

7. Dati i sistemi

   (i) $Ax = 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$

   (ii) $A^\top y > 0$

   notate che (i) ha soluzione se e solo se il problema

$$\begin{array}{lrcl} \max & e^\top x & & \\ & Ax & = & 0 \ (F) \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

   é illimitato. Infatti, se (F) é illimitato, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ per (F) tale che $e^\top \bar{x} > 0$, dunque $\bar{x}$ é una soluzione per (i). Viceversa, data una soluzione $\bar{x}$ per (i), allora $\lambda \bar{x}$ é una soluzione ammissibile per (F) per ogni scalare $\lambda > 0$, e $\lim_{\lambda \to +\infty} e^\top (\lambda \bar{x}) = +\infty$.

Inoltre (F) é sempre ammissibile (il vettore nullo é una soluzione ammissibile), dunque (F) é illimitato se e solo se il suo duale (DF) é inammissibile, ove (DF) é

$$\begin{array}{lrcl} \min & 0^\top y & & \\ & A^\top y & \geq & e \end{array} \qquad (DF)$$

Infine, nota che (DF) ha una soluzione se e solo se (ii) ammette soluzione. Infatti ogni soluzione ammissibile per (DF) é anche una soluzione di (ii), mentre, data una soluzione $\bar{y}$ per (ii), $\theta\bar{y}$ é una soluzione ammissibile per (DF) per ogni scalare θ che soddisfi $\theta \geq (A^\top \bar{y})_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, m$.

Dunque:

(i) ammette soluzione $\Leftrightarrow$
(F) é illimitato $\Leftrightarrow$
(DF) é inammissibile $\Leftrightarrow$
(ii) non ammette soluzione.

6. Per il teorema degli scarti complementari, una soluzione ammissibile per il duale di (P) é ottima se e solo se, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x_j^* = 0$ o $A_j^\top y^* = c_j$. Poiché $x_j^* > 0$ per $j = 1, \ldots, n$, y^* é una soluzione ottima del duale (D) di (P) se e solo se $A^\top y^* = c$.

Esercizi - III

3. Le variabili fuori base sono x_1 e x_3. Poiché x_3 ha costo ridotto 3, se poniamo $x_3(t) = t$ per qualche $t \geq 0$, e $x_1(t) = 0$ allora la soluzione rimane ammissibile se $x_2(t) = 1 + 1t \geq 0$ e $x_4(t) = 2 + 3t$. Nota che tali disuguaglianze sono verificate per ogni $t \geq 0$, dunque $x(t)$ é una soluzione ammissibile per ogni $t \geq 0$. Il valore di tale soluzione sará $5 + 3t$ (ovvero il valore della soluzione precedente, piú il costo ridotto di x_3 per l'incremento t di x_3) e $\lim_{t\to+\infty}(5 + 3t) = +\infty$. Dunque $\{x(t) \,|\, t \geq 0\}$ é una famiglia di soluzioni ammissibili che assumono valori arbitrariamente grandi della funzioni obiettivo.

Esercizi - IV

2. (a) Denotiamo con α la r-esima riga di A_B^{-1}. Allora la r-esima riga del tableau é

$$(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{r}, 0, \dots, 0, \bar{a}_{r(m+1)}, \dots, \bar{a}_{rn}) = \alpha A$$

e $\bar{b}_r = \alpha b$. Poiché $Ax = b$ per ogni soluzione ammissibile per il problema, allora $(\alpha A)x = \alpha b$ per ogni soluzione ammissibile x, ovvero $x_r + \sum_{j=m+1}^{n} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r$. Poiché $\bar{a}_{rj} \geq 0$ per ogni $j \in N$ e $\bar{b}_r < 0$, tale equazione non puó mai essere verificata da alcun vettore $x \geq 0$, dunque il problema non ammette alcuna soluzione.

3. Moltiplichiamo per -1 il primo vincolo, in modo che i termini noti siano tutti non-negativi, ottenendo il sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 & 1 \\ -6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$
$$x \geq 0$$

Costruiamo il problema ausiliario:

$$\max -x_5 - x_6 - x_7$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$x_1, \dots, x_7 \geq 0$$

Dunque, poiché il vettore dei termini noti é non-negativo, la base $\{5, 6, 7\}$ é ammissibile. Il tableau del problema relativo a tale base é

1	6	8	-10	2	0	0	0	-4
0	-1	-1	8	1	1	0	0	1
0	-6	1	1	-4	0	1	0	1
0	1	-8	1	1	0	0	1	2

L'unica variabile con costo ridotto positivo é x_3, con costo ridotto 10, che entra dunque in base, e x_5 esce di base poiché $\min\{1/8, 1/1, 2/1\} = 1/8$. Dopo aver effettuato il pivot, otteniamo il tableau:

$$
\begin{array}{|c|cccccccc|c|}
\hline
1 & \frac{19}{4} & \frac{27}{4} & 0 & \frac{13}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 0 & -\frac{11}{4} \\
\hline
0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\
0 & -\frac{47}{8} & \frac{9}{8} & 0 & -\frac{33}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 & \frac{7}{8} \\
0 & \frac{9}{8} & -\frac{63}{8} & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 1 & \frac{15}{8} \\
\hline
\end{array}
$$

Poiché i costi ridotti sono tutti non-positivi, allora il tableau é ottimo, e il valore ottimo del problema ausiliare é $-11/4$, che é strettamente negativo. Dunque il sistema originale non ammette soluzione non-negativa. Per quanto dimostrato in classe, la soluzione duale ottima del problema é un certificato di inammissibilitá di Farkas per $(*)$. Notate che, se y^* é la soluzione duale ottima relativa alla base ottima $\{3,6,7\}$, allora i costi ridotti relativi a tale base delle variabili x_5, x_6, x_7, $(\bar{c}_5, \bar{c}_6, \bar{c}_7) = (-5/4, 0, 0)$, sono dati da

$$(\bar{c}_5, \bar{c}_6, \bar{c}_7)^\top = (c_5, c_6, c_7)^\top - Iy^*$$

poiché la sottomatrice del problema ausiliario determinata dalle colonne relative a x_5, x_6, x_7 é l'identitá 3×3, ove $(c_5, c_6, c_7) = (-1, -1, -1)$ sono i costi di x_5, x_6, x_7 nel problema ausiliario. Dunque

$$y^* = (-1,-1,-1) - (-5/4, 0, 0) = (1/4, -1, -1).$$

Poiché (*) é stato ottenuto dal sistema originario moltiplicando il primo vincolo per -1, un certificato di Farkas per il sistema originario puó essere ottenuto da y^* moltiplicando la componente y_1^* relativa al primo vincolo per -1. E' ora immediato verificare che $(-1/4, -1, -1)$ é in effetti un certificato di Farkas, poiché

$$(-1/4,-1,-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 & -1 \\ -6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\frac{19}{4}, \frac{27}{4}, 0, \frac{13}{4}) \geq (0,0,0,0)$$

mentre

$$(-1/4,-1,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{11}{4} < 0.$$

4. La coppia di problemi primale e duale é

$$\begin{array}{llll} \max & c^\top x & & \\ & Ax & = & b \ (P) \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} \min & b^\top y & & \\ & A^\top y & \geq & c \end{array}, \qquad (D)$$

(a) Supponiamo $x^*_j > 0$ per ogni $j \in B$, e sia $\bar{y}$ una soluzione ottima per (D). Vogliamo dimostrare che $\bar{y} = y^*$. Poiché $\bar{y}$ é ottima, deve soddisfare la condizione che, per ogni $x^*_j > 0$, $(A^\top \bar{y})_j = c_j$. Ma allora, poiché $x^*_j > 0$ per ogni $j \in B$, deve essere $(A^\top \bar{y})_j = c_j$ per ogni $j \in B$, ovvero $A_B^\top \bar{y} = c_B$. Ma allora, poiché A_B e non singolare, $\bar{y} = (A_B^\top)^{-1} c_B$, e dunque $\bar{y} = y^*$.

(b) Ricordiamo che $\bar{c}_N = c_N - A_N^\top (A_B^\top)^{-1} c_B = c_N - A_N^\top y^*$, dunque, se $c_j < 0$ per ogni $j \in N$, abbiamo $A_j^\top y^* > c_j$ per ogni $j \in N$. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile ottima per il primale. Per il teorema degli scarti complementari deve valere che, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\bar{x}_j > 0$, abbiamo $A_j^\top y^* = c_j$. Dunque, per quanto appena visto, dobbiamo avere $\bar{x}_j = 0$ per ogni $j \in N$, ovvero, per definizione, $\bar{x}$ é la soluzione di base determinata dalla base B. Poiché sappiamo che la soluzione di base determinata da B é unica, ovvero $x^* = A_B^{-1} b$, allora $\bar{x} = x^*$, ovvero x^* é l'unica soluzione ottima del problema.

(c) Sia z^* il valore ottimo del problema di programmazione lineare. Allora l'insieme delle soluzioni ottime del problema é dato dalle soluzioni ammissibili per il problema che giacciono sull'iperpiano di equazione $c^\top x = z^*$. Poiché l'insieme delle soluzioni ammissibili é convesso (é infatti l'intersezione di un numero finito di semispazi), e poiché gli iperpiani sono anch'essi convessi, allora l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di programmazione lineare é convesso. Pertanto, se il problema ammette due soluzioni ottime distinte x' e x'', allora tutti i punti nel segmento che unisce x' e x'' sono soluzioni ottime, ovvero $x(\lambda) = \lambda x' + (1 - \lambda) x''$ é una soluzione ottima per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Dunque, se un problema di programmazione lineare ammette piú di una soluzione ottima, allora esso ammette *infinite* soluzioni ottime.

3. (a) Questo é falso. Basta prendere il problema

$$\max\{x_1 - x_3 \mid x_1 - x_3 = 2, x_2 + x_3 = 0,\, x \geq 0\}.$$

Si osservi che $(2, 0, 0)$ é l'unica soluzione ammissibile (e dunque l'ottimo), e che il costo ridotto di x_3 rispetto alla base ottima $B = \{1, 2\}$ é 0.

(b) Sia z^* il valore ottimo del problema. Si noti che ogni soluzione ammissibile del seguente problema

$$v^* = \max\{\sum_{j \in N} x_j \mid c^\top x = z^*, Ax = b,\, x \geq 0\}$$

é ottima per il problema originale. Si noti che x^* é l'unico ottimo del problema originale se e solo se $v^* = 0$.

4. Calcoliamo $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a)

$$x_B^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

che é ammissibile poiché é non-negativa.

(b)

$$y^* = (A_B^{-1})^\top c_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E' facile verificare che y^* ámmissibile nel duale. Poiché $c^\top x^* = -8 = b^\top y^*$ e x^* é ammissibile nel primale, mentre y^*é ammissibile nel duale, allora x^* é ottima per il primale, e y^* é ottima per il duale.

(c) La base B rimane ottima per valori di θ non superiori al valore $\bar{c}_4$ del costo ridotto di x_4 relativo a B. Ora

$$\bar{c}_4 = c_4 - A_4^\top y^* = 6 - [1, 3, 3] \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Dunque la B rimane ottima per $\theta \leq 0$. Poiché la soluzione determinata da B é ancora x^*, x^* rimane ottima per tali valori di θ.

(d) Se $\theta = 3$, il costo ridotto di x_4 nel nuovo problema (ottenuto ponendo $c_4 = 6 + 3$ invece che 6), sará dato da $\bar{c}_4 - \theta = 0 - 3$, mentre tutti gli altri costi ridotti rimangono invariati. Dunque x_4 é l'unica candidata ad entrare in base. La colonna relativa alla variabile x_4 del tableau relativo a B é data da

$$\bar{A}_4 = A_B^{-1} A_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gli unici coefficienti positivi sono 1 e 2, che corrispondono alle variabili in base x_2 e x_3, rispettivamente. Utilizzando la regola dei minimi rapporti $\min\{\frac{4}{1}, \frac{2}{2}\} = 1$, otteniamo che la variabile uscente deve essere x_3.

(e) La base B rimane ottima se e solo se la nuova soluzione di base $\tilde{x}$ relativa a B é non-negativa. Ora

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1}(b + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix}) = x^* + \theta A_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che é non-negativo se e solo se $\theta \leq 3/2$.

(f) Poiché, al punto precedente, il range di θ entro cui B rimane ottima é stato determinato dalla condizione $\tilde{x}_1 = 3 - 2\theta \geq 0$, allora se $\theta = 2$, $\tilde{x}_1 < 0$ e B non é piú ammissibile ne primale. Poiché abbiamo solo modificato uno dei termini noti del problema, i costi ridotti relativi alla base B non cambiano, dunque la base rimane ammissibile nel duale. Pertanto é possibile applicare l'algoritmo del simplesso duale, e la variabile che esce di base é x_1.

5. Poiché abbiamo solo cambiato il vettore dei termini noti, il tableau del nuovo problema relativo alla base $B = \{1, 3, 4\}$ differirá da quello originale solo nell'ultima colonna. Vogliamo dunque determinare i nuovi

coefficienti di tale colonna. Dopo aver aggiunto le variabili di scarto, il problema iniziale diventa

$$\begin{aligned} \max \quad & [c^\top, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix} \\ [A|I] & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix} \qquad = b \\ x & \qquad\qquad \geq 0 \end{aligned}$$

dunque il tableau ottimo dato nell'esercizio, relativo alla base $B = \{1, 3, 4\}$, sará della forma

1	$c_B^\top A_B^{-1} A - c^\top$	$c_B^\top A_B^{-1} I - 0$	$c_B^\top c_B^\top A_B^{-1} b$
0 $\vdots$ 0	$A_B^{-1} A$	$A_B^{-1} I$	$A_B^{-1} b$

Pertanto, la sottomatrice 3×3 relativa alle colonne di e alle ultime 3 righe, é esattamente A_B^{-1}, ovvero

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

e dunque gli ultimi tre coefficienti dell'ultima colonna del nuovo tableau saranno dati da $A_B^{-1}(1, 0, 2)^\top = (-1, 8, 2)^\top$. L'ultimo coefficiente della prima riga contiene il valore della funzione obiettivo duale calcolato nella soluzione duale y^* relativa alla base B, ovvero il numero $(1, 0, 2)y^*$. Poiché $y^* = (A_B^{-1})^\top c_B$, che é precisamente il vettore dato dalle componenti della prima riga del tableau relative alle variabili x_5, x_6, x_7, allora $y^* = (10, 5, 3)^\top$, e $(1, 0, 2)y^* = 16$. Dunque il nuovo tableau é

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	0	4	0	0	10	5	3	16
0	1	1	0	0	1	1	-1	-1
0	0	1	1	0	2	0	3	8
0	0	4	0	1	4	3	-1	2

Poiché i costi ridotti non sono cambiati, la base rimane ammissibile nel duale, mentre non é piú ammissibile nel primale in quanto il valore della variabile x_1 é -1. Possiamo dunque applicare il metodo del simplesso duale, x_1 é l'unica candidata ad uscire di base, mentre x_7 é l'unica candidata ad entrare, in quanto é l'unica con un coefficiente negativo nella riga corrispondente a x_1. Facendo il pivot corrispondente, é immediato verificare che la nuova soluzione di base é data da $x_3^* = 5, x_4^* = 3, x_7^* = 1$, che é non negativa. Dunque, poiché per la nostra scelta della variabile entrante i costi ridotti rimangono tutti non-positivi, tale soluzione é ottima.

Esercizi - VI

1. Risolviamo con il metodo a) proposto.
   Il gradiente della funzione obiettivo f calcolato in x^* é

$$\nabla f(x^*) = Px^* + q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   L'insieme ammissibile del problema é $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_i \leq 1\,, i = 1, 2, 3\}$. Poiché la funzione obiettivo é convessa e X é convesso, per il teorema visto in classe x^* é ottima se e solo se $\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0$ per ogni $x \in X$, ovvero se e solo se

$$\text{per ogni } x \in X \quad -1(x_1 - 1) + 0(x_2 - 1/2) + 2(x_3 + 1) \geq 0. \quad (*)$$

   Nota che, per ogni $x \in X$, $x_1 - 1 \leq 0$ e $x_3 + 1 \geq 0$, dunque $(*)$ é verificata, e x^* é l'ottimo del problema.

3. (a) Il problema é di ottimizzazione convessa, poiché la funzione obiettivo ha derivata seconda e^{-x} che é sempre non-negativa, mentre per la funzione che definisce il vincolo, verifichiamo la definizione di convessitá ovvero, dati $(x', y'), (x'', y'') \in \mathcal{D}$ e $\lambda \in (0, 1)$

$$\frac{(\lambda x' + (1-\lambda)x'')^2}{\lambda y' + (1-\lambda)y''} \quad \leq \quad \lambda \frac{{x'}^2}{y'} + (1-\lambda)\frac{{x''}^2}{y''}$$

poiché y' e y'' sono positive, allora possiamo moltiplicare da ambo i lati per $\lambda y' + (1-\lambda)y''$, ottenendo, dopo le opportune semplificazioni

$$2\lambda(1-\lambda)x'x'' \leq \lambda(1-\lambda)(x'^2\frac{y''}{y'} + x''^2\frac{y'}{y''})$$

moltiplicando da ambo il lati per $y'y''$, che é positivo, e dividendo per $\lambda(1-\lambda)$, anch'esso positivo otteniamo

$$(x'y'')^2 + (x''y')^2 - 2x'x''y'y'' \geq 0$$

ovvero $(x'y'' - x''y')^2 \geq$, che é sempre verificata.

Chiaramente, se $y > 0$, allora $x^2/y \leq 0$ se e solo se $x = 0$. Dunque l'insieme ammissibile del problema é $\{(0, y) \mid y > 0\}$ e tutti i punti ammissibili sono anche ottimi con valore $p^* = e^0 = 1$.

(b) La funzione Lagrangiana del problema é $L(x, y, \lambda) = e^{-x} + \lambda x^2/y$. Notate che, per ogni $(x, y) \in \mathcal{D}$, $L(x, y, \lambda) > 0$, dunque $g(\lambda) = \inf_{(x,y)\in\mathcal{D}} L(x, \lambda) \geq 0$. Poiché per ogni scalare $t > 0$ il punto $(t^{1/3}, t)$ é in $\mathcal{D}$, e poiché $\lim_{t\to+\infty}(e^{-t^{1/3}} + \lambda(t^{2/3}/t)) = 0$, allora $g(\lambda) = 0$ per ogni λ.
Dunque il problema duale Lagrangiano é

$$d^* = \max\{0 \mid \lambda \geq 0\},$$

che banalmente ha valore ottimo $d^* = 0$.
Pertanto il gap ottimo di dualitá del problema é $p^* - d^* = 1 - 0 = 1$.

(c) Il problema non soddisfa la condizione di Slater. Questo fatto deve necessariamente sussistere, in quanto la dualitá forte non vale per il problema, e sappiamo che per ogni problema di ottimizzazione convessa che soddisfa le condizioni di Slater, vale la dualitá forte. Possiamo anche verificare la non sussistenza delle condizioni di Slater direttamente, in quanto i punti ammissibili sono tutti della forma $(0, y)$, $y > 0$, e soddisfano sempre l'unico vincolo del problema ad uguaglianza.

5. L'insieme ammissibile del primo vincolo é il cerchio di raggio 1 e centro $(1, 1)$, mentre l'insieme ammissibile del secondo vincolo é il cerchio di raggio 1 e centro $(1, -1)$, dunque l'insieme ammissibile del problema é $\{(1, 0)\}$. Pertanto $x^* = (1, 0)$ é l'unica soluzione ammissibile, ed é dunque ottima, con valore $p^* = 1$.

(a) La funzione lagrangiana é

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = x_1^2+x_2^2+\lambda_1((x_1-1)^2+(x_2-1)^2-1)+\lambda_2((x_1-1)^2+(x_2+1)^2-1).$$

Riarrangiando i termini:

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = x_1^2(1+\lambda_1+\lambda_2)+x_2^2(1+\lambda_1+\lambda_2)-2x_1(\lambda_1+\lambda_2)-2x_2(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1+\lambda_2.$$

Il gradiente é

$$\nabla L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} 2x_1(1+\lambda_1+\lambda_2)-2(\lambda_1+\lambda_2) \\ 2x_2(1+\lambda_1+\lambda_2)-2(\lambda_1-\lambda_2) \end{pmatrix}$$

che si annulla nel punto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Le condizioni KKT sono dunque

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\lambda_1+\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \\
x_2 &= \frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \\
(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 &\le 1 \\
(x_1-1)^2+(x_2+1)^2 &\le 1 \\
\lambda_1 &\ge 0 \\
\lambda_2 &\ge 0 \\
\lambda_1((x_1-1)^2+(x_2-1)^2-1) &= 0 \\
\lambda_2((x_1-1)^2+(x_2+1)^2-1) &= 0
\end{aligned}$$

Poiché l'unica soluzione ammissibile é $(1,0)$, allora i primi due vincoli impongono che

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1+\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} &= 1 \\
\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} &= 0
\end{aligned}$$

Ma il primo vincolo non é mai soddisfatto. Dunque le condizioni KKT per il problema non sono mai verificate.

(b) Per quanto visto al punto (b), la funzione duale lagrangiana é ottenuta sostituendo il punto

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \end{pmatrix}$$

in $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$, ottenendo

$$\begin{aligned} g(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2 + (\lambda_1-\lambda_2)^2 - 2(\lambda_1+\lambda_2)^2 - 2(\lambda_1-\lambda_2)^2}{1+\lambda_1+\lambda_2} + \lambda_1 + \lambda_2 \\ &= 1 + \frac{-(\lambda_1+\lambda_2)^2 - (\lambda_1-\lambda_2)^2 + (\lambda_1+\lambda_2-1)(1+\lambda_1+\lambda_2)}{1+\lambda_1+\lambda_2} \\ &= 1 - \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2+1}{1+\lambda_1+\lambda_2} \end{aligned}$$

Il problema duale é dunque

$$d^* = \sup\left\{1 - \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2+1}{1+\lambda_1+\lambda_2} \;:\; \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0\right\}.$$

Nota che, per $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $g(\lambda_1, \lambda_2) < 1$, dunque $d^* \leq 1$. Inoltre, per ogni $\theta \geq 0$, il punto $(\lambda_1, \lambda_2) = (\theta, \theta)$ é ammissibile per il duale, e $g(\theta, \theta) = 1 - \frac{1}{1+2\theta}$. Poiché $\lim_{\theta\to+\infty} g(\theta, \theta) = 1$, allora $d^* = 1$, e la dualitá forte vale.

Abbiamo visto in (b) che le condizioni KKT non ammettono alcuna soluzione, eppure la dualitá forte vale lo stesso. **Cosa é successo?**

Notate che in classe abbiamo dimostrato che, se vale dualitá forte, e <u>se</u> l'ottimo primale e l'ottimo duale sono entrambi attenuti, allora l'ottimo primale e l'ottimo duale sono soluzioni per le condizioni KKT. In questo caso, la dualitá forte vale, ma nessuna coppia (λ_1, λ_2) massimizza la funzione $g(\lambda_1, \lambda_2)$.

6. (a) Il dominio della funzione é $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. La funzione lagrangiana é

$$L(x, \lambda) = -\ln x + \lambda(|x-2| - 1),$$

che é derivabile in ogni punto $x \neq 2$, con derivata

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = -\frac{1}{x} + \begin{cases} \lambda & \text{se } x > 2 \\ -\lambda & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Se $\lambda^{-1} > 2$ (ovvero $0 < \lambda < 1/2$) allora la derivata si annulla in $\bar{x} = \lambda^{-1}$ (poiché $\bar{x} > 2$), altrimenti se $\lambda > 1/2$ la derivata prima si annulla in $\bar{x} = -\lambda^{-1}$. Nota peró che per $\lambda > 1/2$, $-\lambda^{-1} < 0$, e dunque il punto che annulla la derivata non appartiene al dominio della funzione obiettivo. Notate tuttavia che, per $\lambda \geq 1/2$, $L(x,\lambda)$ é convessa, $\lim_{x\to 0^+} L(x,\lambda) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} L(x,\lambda) = +\infty$, dunque $L(x,\lambda)$ ammette un minimo. Poiché $L(x,\lambda)$ é derivabile ovuque eccetto che in $x \neq 0$, e la derivata non si annulla mai, il minimo deve essere attenuto da $x = 2$. Dunque

$$g(\lambda) = \begin{cases} L(\lambda^{-1},\lambda) = \ln\lambda - 3\lambda + 1 & 0 < \lambda < 1/2 \\ L(2,\lambda) = \ln\frac{1}{2} - \lambda & \lambda \geq 1/2 \end{cases}$$

e il dominio di $g(\lambda)$ é $\mathbf{dom}\, g =]0, +\infty[$.

Dobbiamo dunque calcolare $d^* = \sup\{g(\lambda) \mid \lambda > 0)\}$

(b) g é una funzione concava e derivabile. Notiamo che la sua derivata é

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} - 3 & 0 < \lambda < 1/2 \\ -1 & \lambda \geq 1/2 \end{cases}$$

e si annulla per $\lambda^* = 1/3$. Il valore ottimo del duale é $d^* = \ln 1/3 = -\ln 3$.

(c) Se esiste una soluzione $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ alle condizioni KKT, allora necessariamente $\bar{\lambda} = \lambda^* = 1/3$. Per il punto (a), il gradiente del lagrangiano si annulla in $(\bar{x}, 1/3)$ se e solo se $x = 3$. La soluzione $x = 3$ é ammissibile e ha valore $-\ln 3$ nella funzione obiettivo, dunque vale la dualitá forte e l'ottimo é attenuto sia nel primale che nel duale. Dunque devono valere le condizioni di KKT.