PROGRAMMAZIONE MATEMATICA
21 Maggio 2008

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

 # matricola: ______________________________

Esercizio	Valore	Punti assegnati
1	8	
2	7	
3	6	
4	5	
5	7	
Totale	33	

ESERCIZIO 1 [8 punti]

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0.} \end{array} \qquad (P)$$

(a) [2 pt] Scrivere il problema in forma standard, e costruire il tableau del problema rispetto alla base corrispondente alla soluzione $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

(b) [2 pt] Risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso primale, utilizzando la base iniziale data al punto (a).

(c) [2 pt] Disegnare la rappresentazione grafica del problema rispetto alle variabili originali x_1 e x_2, indicando il cammino percorso dall'algoritmo.

(d) [2 t] Scrivere il problema duale di (P) e determinare, dal tableau ottimo ottenuto al punto (b), la soluzione ottima di tale problema duale.

ESERCIZIO 2 [7 punti]

Si consideri il problema di PL

$$\max \quad 9x_1 + 7x_2$$
$$-10x_1 - 7x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 1$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 2$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Una volta scritto il problema in forma standard aggiungendo variabili di scarto x_3, x_4, x_5 (relative al primo, secondo e terzo vincolo rispettivamente) e risolto il problema, si ottiene il seguente tableau ottimo, relativo alla base $B = \{1, 2, 3\}$:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	0	2	1	4
0	1	0	0	$-3/4$	$1/2$	$1/4$
0	0	1	0	$5/4$	$-1/2$	$1/4$
0	0	0	1	$5/4$	$3/2$	$21/4$

(a) [2 pt] Si derivino dal tablau le soluzioni ottime per il problema originale e per il suo duale, verificando che sono ottime.

(b) [2 pt] Si consideri il problema ottenuto dal precedente rimpiazzando il termine noto del secondo vincolo (ovvero $2x_1 + 2x_2 \leq 1$) con $1 + \theta$. Per quali valori di θ la base B rimane ottima?

(c) [3 pt] Al punto (b), si ponga $\theta = -1$. Si risolva nuovamente il problema con una singola iterazione dell'algoritmo del simplesso duale.

ESERCIZIO 3 [6 punti]

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^\top x + \gamma z & & \\ & Ax + \alpha z & = & b \qquad (P) \\ & x\,,\, z & \geq & 0 \end{array}$$

ove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha, b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, x é un vettore di variabili in $\mathbb{R}^n$ e z é una variabile. Si consideri inoltre il problema

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^\top x & & \\ & Ax & = & b \qquad (P') \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

(a) [2 pt] Si scrivano il duale (D) di (P), e (D') di (P'), rispettivamente.

(b) [4 pt] Si supponga che (P) sia ammissibile e (P') non ammetta ottimo. Si dimostri che o (P) é illimitato, oppure (D') é illimitato.

ESERCIZIO 4 [5 punti]

(a) [2 pt] Si scriva il duale del problema:

$$\begin{array}{lrrrcl} \min & 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & & \\ & 3x_1 & +x_2 & & \geq & 1 \\ & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

(b) [3 pt] Data la coppia di problemi primale e duale $z_P^* = \max\{c^\top x \,:\, Ax = b,\, x \geq 0\}$ e $z_D^* = \min\{b^\top y \,:\, A^\top y \geq c\}$, ove $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, si dimostri che $z_P^* \leq z_D^*$. (Ovvero, si dimostri il Teorema di Dualitá debole.)

ESERCIZIO 5 [7 punti]

Considerate il seguente problema di minimizzazione convessa, definito sul dominio $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}$:

$$\begin{array}{lrl} \min & \frac{1}{x} & \\ & |\,x-1| & \leq 0 \end{array}$$

(a) [1pt] Valgono le condizioni di Slater?

(b) [4pt] Si scriva il problema duale Lagrangiano.

(c) [2pt] Si determinino le soluzioni ottime per il primale e il duale. Vale dualitá forte?