FOGLIO 6

Esercizio Sia f una funzione di $\mathbb{R}$ in $]0,+\infty[$ di classe C^1, strettamente monotona crescente e limitata. Usando il Teorema di Tonelli discutere al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la finitezza dei seguenti integrali:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f'(x)}{(f(x)+|y|^\alpha)^2} dxdy, \quad \int_{\mathbb{R}\times[1,+\infty[} \frac{f'(x)}{y^\beta + f^2(x)y^\beta} dxdy.$$

(Risulta $\alpha > 1/2, \beta > 1$.)

Esercizio Sia f la funzione di $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |(x,y)| \leq 1\}$ a valori reali definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \in C \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) La funzione f è continua? Misurabile? Limitata?

(ii) Dedurre che f è integrabile su C secondo Lebesgue (si noti che a tal fine qui non serve scomodare il Teorema di Tonelli).

(iii) Calcolare $\int_C f(x,y)dxdy$ con il Teorema di Fubini.

(iv) Calcolare $\int_C |f(x,y)|dxdy$ mediante il Teorema di Tonelli osservando che tale calcolo dà nuovamente l'integrabilità alla Lebesgue di f su C.

(v) Rifare i calcoli in (iii) e (iv) usando un cambio di coordinate polari.

(Risulta zero il primo e uno il secondo.)

Esercizio Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato. Sia A_n l'insieme del piano euclideo definito da

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1/\pi, \quad \frac{1}{x} < \frac{\sin^n \frac{1}{x}}{y}\right\} \cup ([0,1/\pi] \times \{0\}),$$

e sia f la funzione di A_n in $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^3}}, & \text{se } (x,y) \in A_n, \ x \neq 0 \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) È vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme A_n è un dominio normale? Si abbozzi un disegno prestando attenzione alla distinzione pari/dispari.

(ii) Provare che

$$\int_{A_n} f(x,y)dxdy$$

è finito.

(iii) Si noti che la funzione $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ non è integrabile né in senso generalizzato né alla Lebesgue nell'intevallo $(0,1/\pi)$; inoltre essa - pensata come funzione definita sul piano - non è neppure integrabile alla Lebesgue in alcun intorno di $(0,0)$. Come si concilia tutto ciò con quanto sopra trovato?

Esercizio Sia φ una funzione di $[0,\infty[$ in $]0,\infty[$ strettamente monotona decrescente di classe C^1 tale che $\lim_{\rho\to+\infty}\varphi(\rho)=0$. Sia

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le z\le\varphi(|(x,y)|)\},$$

e sia f una funzione misurabile di $[0,\infty[$ in sè.

(i) Visualizzare graficamente C, osservare che C è un dominio normale e che dunque

$$\int_C f(z)dxdydz=\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\int_0^{\varphi(\sqrt{x^2+y^2})}f(z)dz\right\}dxdy.$$

(ii) Utilizzando il Teorema di Tonelli e scambiando l'ordine di integrazione dedurre la seguente formula

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\int_0^{\varphi(\sqrt{x^2+y^2})}f(z)dz\right\}dxdy=\pi\int_0^{\varphi(0)}f(z)(\varphi^{(-1)}(z))^2dz$$

dove $\varphi^{(-1)}$ è la funzione inversa di φ.

(iii) Si noti che specializzando la formula precedente nel caso $f\equiv 1$ si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\pi\int_0^{\varphi(0)}(\varphi^{(-1)}(z))^2dz \tag{0.1}$$

che porge una nota formula per il calcolo del volume di un solido di rotazione il cui profilo è dato dalla funzione $\varphi^{(-1)}(z)$. Visualizzare graficamente il significato del membro di sinistra e del membro di destra della (0.1).

(iv) Mediante un cambio di coordinate polari nel membro di sinistra della (0.1), un ulteriore naturale cambio di coordinate nel membro di destra della (0.1) e una integrazione per parti, dedurre dalla (0.1) che se il volume del dominio C è finito (ovvero ambo i membri della (0.1) sono finiti) allora

$$\lim_{\rho\to+\infty}\rho^2\varphi(\rho)=0.$$

La quantità $\pi\rho^2\varphi(\rho)$ rappresenta un volume? Quale?