SOLUZIONI - FONDAMENTI di ANALISI MATEMATICA 1

Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio - I appello, 27 gennaio 2012

Riportiamo lo svolgimento soltanto dei temi 3 e 4 e le sole soluzioni dei temi 1 e 2. I temi dispari hanno svolgimento simile tra loro, così come i temi pari.

TEMA 3

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 - \sqrt{6}\arctan\frac{1}{x}.$$

Se ne determinino: dominio, insieme di continuità, eventuali asintoti e prolungabilità per continuità, insieme di derivabilità, estremi relativi e assoluti, eventuali massimi, minimi, punti angolosi e cuspidi, andamento di f' al bordo dell'insieme di derivabilità.

Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione.
$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. La funzione f è continua su tutto il suo dominio perché compsizione di funzioni continue.

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\frac{\sqrt{6}}{2}\pi.$$

Dunque f non è prolungabile per continuità in 0; non ci sono asintoti orizzontali né verticali, potrebbero essercene obliqui. Controlliamo:

$$\text{a)} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(|x|\sqrt{x^{-2}+1} - 1 - \sqrt{6}\arctan\frac{1}{x}\right) = \pm 1.$$

$$\text{b)} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = -1 + \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}+x) = -1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = -1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -1 + \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x) = -1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = -1.$$

Quindi le rette $y = -x-1$ e $y = x-1$ sono rispettivamente asintoti sx e dx.

Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{6}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\sqrt{6}}{x^2+1} = \frac{x\sqrt{1+x^2}+\sqrt{6}}{x^2+1}.$$

Ne segue che f è derivabile in tutto il suo dominio. Monotonia:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\sqrt{1+x^2} \geq -\sqrt{6}.$$

Come si risolve questa disuguaglianza? Notiamo innanzitutto che è sempre soddisfatta se $x \geq 0$. Se invece $x < 0$, entrambi i termini sono negativi. Conviene dunque invertirli, ottenendo $\sqrt{6} \geq$

$-x\sqrt{1+x^2}$. Ora, che siamo sicuri che sono entrambi positivi, possiamo elevarli al quadrato, ottenendo $6 \geq x^2(1+x^2)$. Posto $t = x^2$ ricaviamo

$$t + t^2 - 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq t \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x^2 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq \sqrt{2}.$$

Ricordando che siamo nel caso $x < 0$, deduciamo $-\sqrt{2} \leq x < 0$. Ricapitolando,

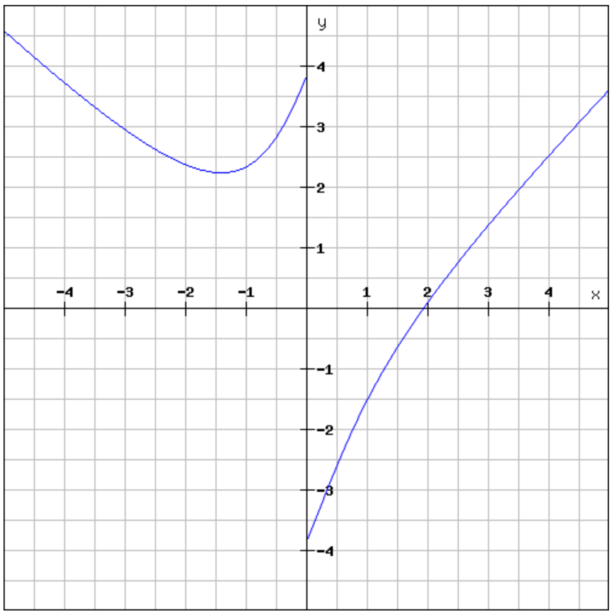
$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\sqrt{2}.$$

Dunque f è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{2}]$ ed è crescente in $[\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\infty)$ e quindi $-\sqrt{2}$ è punto di minimo relativo. Per capire se è assoluto dobbiamo confrontare $f(-\sqrt{2})$ con $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$. Questo si fa immediatamente perché

$$f(-\sqrt{2}) = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{6}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} > 0 > -\frac{\sqrt{6}}{2}\pi.$$

Ne segue che f non ammette minimo, e che $\inf f = -\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$. D'altra parte $\sup f = +\infty$ e quindi non ammette neanche massimo. Rimane da calcolare la pendenza in corrispondenza del punto 0. Si ha che

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \sqrt{6}.$$



Esercizio 2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{2\alpha x} + \ln(1 + \alpha^2 x + x^2 + x^3)}{(e^x - \cos\sqrt{x})\sin x}.$$

Soluzione.
Sviluppando al prim'ordine si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - [1 + 2\alpha x(1 + o(1))] + (\alpha^2 x + x^2 + x^3)(1 + o(1))}{\left[1 + x + o(x) - \left(1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + o((\sqrt{x})^3)\right)\right](x + o(x^2))}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\alpha x(1+o(1)) + (\alpha^2 x + x^2 + x^3)(1+o(1))}{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right)(x + o(x^2))}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\alpha(1+o(1)) + (\alpha^2 + x + x^2)(1+o(1))}{x\left(\frac{3}{2} + o(1)\right)(1 + o(x))}$$

(nell'ultimo passaggio si è diviso sopra e sotto per x). Questa espressione consente di calcolare il limite per $\alpha \neq 0,\ 2$. Infatti possiamo riscriverla come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2\alpha + \alpha^2 + o(1)}{x\left(\frac{3}{2} + o(1)\right)(1 + o(x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha(-2+\alpha) + o(1)}{x\left(\frac{3}{2} + o(1)\right)(1 + o(x))} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \text{ oppure } \alpha > 2 \\ -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Dalla stessa espressione di sopra si ottiene

$$\text{se } \alpha = 0, \qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+x^2)(1+o(1))}{x\left(\frac{3}{2} + o(1)\right)(1 + o(x))} = \frac{2}{3}.$$

Rimane il caso $\alpha = 2$, per cui lo sviluppo del numeratore non è sufficiente. Sviluppandolo al secondo ordine otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{4x} + \ln(1 + 4x + x^2 + x^3)}{(e^x - \cos\sqrt{x})\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x - 8x^2 + o(x^2) + 4x + x^2 + x^3 - \frac{1}{2}(4x + x^2 + x^3)^2(1+o(1))}{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right)(x + o(x^2))}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-8x^2 + o(x^2) + x^2 - 8x^2}{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right)(x + o(x^2))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-15 + o(1)}{\left(\frac{3}{2} + o(1)\right)(1 + o(x))} = -10.$$

3. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^3 + 3k + 5}{k^3 + \alpha(k+2)} \right)^{k^3}.$$

Soluzione.
Notiamo che è una serie a termini definitivamente positivi, perché $k^3 + \alpha(k+2)$ tende a $+\infty$ per $k \to +\infty$, qualunque sia α. Possiamo perciò applicare il metodo della radice k-ma: poniamo, se esiste,

$$l = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k^3 + 3k + 5}{k^3 + \alpha(k+2)} \right)^{k^3}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^3 + 3k + 5}{k^3 + \alpha(k+2)} \right)^{k^2},$$

da cui, sommando e sottraendo $\alpha(k+2)$ al numeratore,

$$l = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{3k + 5 - \alpha(k+2)}{k^3 + \alpha(k+2)} \right)^{k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k(3-\alpha) + 5 - 2\alpha}{k^3 + \alpha(k+2)} \right)^{k^2}.$$

Per comodità riscriviamolo come

$$l = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b_k} \right)^{k^2}, \qquad \text{con } b_k = \frac{k^3 + \alpha(k+2)}{k(3-\alpha) + 5 - 2\alpha}.$$

Si ha che

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Quindi se $\alpha < 3$ si ha

$$l = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{b_k}\right)^{b_k} \right]^{\frac{k^2}{b_k}}.$$

Il termine tra parentesi quadre tende ad e, mentre

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3(3-\alpha) + (5-2\alpha)k^2}{k^3 + \alpha(k+2)} = 3 - \alpha.$$

Perciò, se $\alpha < 3$, $l = e^{3-\alpha} > 1$ e quindi la serie diverge.

Se $\alpha \geq 3$ allora $-b_k$ tende a $+\infty$ per $k \to \infty$. Scrivendo

$$l = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{-b_k}\right)^{k^2}$$

otteniamo

$$l = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{-b_k}\right)^{-b_k} \right]^{\frac{k^2}{-b_k}}.$$

Il termine tra parentesi quadre è di tipo $(1 - \frac{1}{x})^x$ con $x \to +\infty$, e dunque tende a e^{-1}. Il termine $\frac{k^2}{-b_k}$ tende a $\alpha - 3$. Quindi, nuovamente, $l = e^{3-\alpha}$. Deduciamo che se $\alpha > 3$ allora $l < 1$ e dunque la serie converge. Se $\alpha = 3$ è il caso critico in cui il criterio della radice non ci dà informazioni.

Per $\alpha = 3$ studiamo la validità della condizione necessaria:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^3+3k+5}{k^3+3k+6}\right)^{k^3} &= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k^3+3k+6}\right)^{k^3} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{k^3+3k+6}\right)^{k^3+3k+6} \right]^{\frac{k^3}{k^3+3k+6}} \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

Il termine generico non tende a 0 e dunque la serie diverge.

4. Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e g una funzione decrescente in $\mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che $g \circ f$ ammette minimo e massimo in $[0, 1]$.

(ii) Mostrare con un controesempio che $f \circ g$ può non ammettere massimo (o minimo) in $[0, 1]$. *(suggerimento: prendere f con un massimo assoluto stretto in 0 e g tale che 0 è un punto di accumulazione di $g([0, 1])$ che non appartiene a $g([0, 1])$).*

Soluzione.

(i) Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua f ammette minimo e massimo nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$. Cioè esistono $y, z \in [0, 1]$ tali che

$$f(y) = \min_{[0,1]} f, \qquad f(z) = \max_{[0,1]} f.$$

Ovvero, $\forall x \in [0,1]$, $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ e dunque la decrescenza di g implica $g(f(y)) \geq g(f(x)) \geq g(f(z))$. Vale a dire che y è punto di massimo assoluto per $g \circ f$ in $[0,1]$ e z di minimo assoluto.

(ii) Un controesempio è dato dalle funzioni

$$f(x) = -x^2, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

L'espressione di $f \circ g$ in $[0,1]$ è data da

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

che è sempre negativa, ma il cui estremo superiore è 0.

TEMA 4

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3} + x - 1.$$

Se ne determinino: dominio, insieme di continuità, eventuali asintoti e prolungabilità per continuità, insieme di derivabilità, estremi relativi e assoluti, eventuali massimi, minimi, punti angolosi e cuspidi, andamento di f' al bordo dell'insieme di derivabilità.

Se ne tracci un grafico qualitativo.

Soluzione.
$\mathrm{dom}(f) = (-\infty, 1]$. La funzione f è continua su tutto il suo dominio perché compsizione di funzioni continue.

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.$$

Dunque f non è prolungabile per continuità in 0; non ci sono asintoti orizzontali né verticali, potrebbe essercene obliquo. Controlliamo:

$$\text{a)} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-x} + x - 1}{x} = \lim_{x\to-\infty} (-\sqrt{1-x} + 1 - x^{-1}) = -\infty.$$

Quindi non c'è.

Calcoliamo

$$f'(x) = 1 + \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}.$$

f è derivabile in tutto il suo dominio, tranne in 1 e forse in 0, dove si ha una forma indeterminata. Per scoprirlo calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1 + \lim_{x\to 0^\pm} \frac{2x - 3x^2}{2|x|\sqrt{1-x}} = 1 \pm 1.$$

Cioè $f'_-(0) = 0$ e $f'_+(0) = 2$: non è derivabile in 0, che è punto angoloso. Monotonia:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x \leq 2\sqrt{x^2 - x^3}.$$

Come si risolve questa disuguaglianza? Notiamo innanzitutto che è sempre soddisfatta se

$$3x^2 - 2x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x-2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

Se invece $x < 0$ o $x > \frac{2}{3}$, entrambi i termini sono positivi e possiamo perciò elevarli al quadrato, ottenendo

$$x^2(3x-2)^2 \leq 4(x^2 - x^3).$$

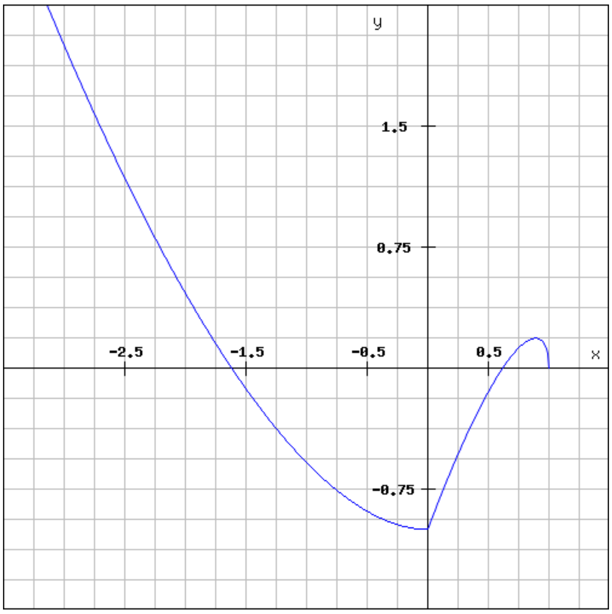
Dividendo ambo i membri per x^2 (che è positivo) e svolgendo i calcoli troviamo $9x^2 - 8x \leq 0$, cioè $0 \leq x \leq \frac{8}{9}$. Ricapitolando,

$$f' \geq 0 \text{ in } (-\infty, 0) \cup (0, \frac{8}{9}], \qquad f' < 0 \text{ in } (\frac{8}{9}, 1).$$

Dunque f è crescente in $(-\infty, \frac{8}{9}]$ ed è decrescente in $[\frac{8}{9}, 1]$ e quindi $\frac{8}{9}$ è punto di massimo assoluto. Il punto 1 è di minimo relativo, ma non assoluto perché $\inf f = -\infty$.

Rimane da calcolare la pendenza in corrispondenza del punto 1. Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty.$$



Esercizio 2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(e^x - \cos\sqrt{x})}{e^{\alpha x} - 1 + \ln(1 + \alpha^2 x + x^2 + x^4)}.$$

Soluzione.
Sviluppando al prim'ordine si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(1 + x + o(x) - 1 + \frac{1}{2}x + o(x^{\frac{3}{2}}))}{\alpha x(1 + o(1)) + (\alpha^2 x + x^2 + x^4)(1 + o(1))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x + o(x)}{\alpha(1 + o(1)) + (\alpha^2 + x + x^3)(1 + o(1))}$$

(nell'ultimo passaggio si è diviso sopra e sotto per x).

Questa espressione consente di calcolare il limite per $\alpha \neq 0,\ -1$. Infatti possiamo riscriverla come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x + o(x)}{\alpha + \alpha^2 + o(1)} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq 0,\ -1.$$

Dalla stessa espressione di sopra si ottiene

$$\text{se } \alpha = 0, \qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x + o(x)}{(x + x^3)(1 + o(1))} = \frac{3}{2}.$$

Rimane il caso $\alpha = -1$, per cui lo sviluppo del denominatore non è sufficiente. Sviluppandolo al secondo ordine otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(e^x - \cos\sqrt{x})}{e^{-x} - 1 + \ln(1 + x + x^2 + x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + x^2 + x^4 - \frac{1}{2}(x + x^2 + x^4)^2(1 + o(1))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{3}{2}.$$

3. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2 + \alpha(k + \frac{\pi}{2})}{k^2 + k + \arctan k} \right)^{k^2}.$$

Soluzione.
Notiamo che è una serie a termini definitivamente positivi, perché $k^2 + \alpha(k + \pi/2)$ tende a $+\infty$ per $k \to +\infty$, qualunque sia α. Possiamo perciò applicare il metodo della radice k-ma: poniamo, se esiste,

$$l = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k^2 + \alpha(k + \frac{\pi}{2})}{k^2 + k + \arctan k} \right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^2 + \alpha(k + \frac{\pi}{2})}{k^2 + k + \arctan k} \right)^{k},$$

da cui, sommando e sottraendo $k + \arctan k$ al numeratore,

$$l = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha(k + \frac{\pi}{2}) - k - \arctan k}{k^2 + k + \arctan k} \right)^{k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{(\alpha - 1)k + \alpha\frac{\pi}{2} - \arctan k}{k^2 + k + \arctan k} \right)^{k}.$$

Per comodità riscriviamolo come

$$l = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b_k} \right)^{k}, \qquad \text{con } b_k = \frac{k^2 + k + \arctan k}{(\alpha - 1)k + \alpha\frac{\pi}{2} - \arctan k}.$$

Si ha che

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Quindi se $\alpha > 1$ si ha

$$l = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{b_k} \right)^{b_k} \right]^{\frac{k}{b_k}}.$$

Il termine tra parentesi quadre tende ad e, mentre

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(\alpha - 1)k^2 + \alpha\frac{\pi}{2}k - k \arctan k}{k^2 + k + \arctan k} = \alpha - 1.$$

Perciò, se $\alpha > 1$, $l = e^{\alpha - 1} > 1$ e quindi la serie diverge.

Se $\alpha < 1$ allora $-b_k$ tende a $+\infty$ per $k \to \infty$. Scrivendo

$$l = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{-b_k} \right)^{k}$$

otteniamo

$$l = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{-b_k} \right)^{-b_k} \right]^{\frac{k}{-b_k}}.$$

Il termine tra parentesi quadre è di tipo $(1-\frac{1}{x})^x$ con $x \to +\infty$, e dunque tende a e^{-1}. Il termine $\frac{k}{-b_k}$ tende a $1-\alpha$. Quindi, $l = e^{\alpha} - 1 < 1$ e dunque la serie converge. Se $\alpha = 1$ è il caso critico in cui il criterio della radice non ci dà informazioni.

Per $\alpha = 1$ il termine generico della serie è

$$\left(\frac{k^2 + k + \frac{\pi}{2}}{k^2 + k + \arctan k} \right)^{k^2}$$

che è sempre maggiore di 1, perché $\arctan k < \frac{\pi}{2}$. Dunque non può tendere a 0 e quindi la serie diverge.

4. Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e g una funzione crescente in $\mathbb{R}$.

(i) Dimostrare che $g \circ f$ ammette minimo e massimo in $[0,1]$.

(ii) Mostrare con un controesempio che $f \circ g$ può non ammettere massimo (o minimo) in $[0,1]$. *(suggerimento: prendere f con un massimo assoluto stretto in 0 e g tale che 0 è un punto di accumulazione di $g([0,1])$ che non appartiene a $g([0,1])$).*

Soluzione.

(i) Per il teorema di Weierstrass, la funzione continua f ammette minimo e massimo nell'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$. Cioè esistono $y, z \in [0,1]$ tali che

$$f(y) = \min_{[0,1]} f, \qquad f(z) = \max_{[0,1]} f.$$

Ovvero, $\forall x \in [0,1]$, $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ e dunque la crescenza di g implica $g(f(y)) \leq g(f(x)) \leq g(f(z))$. Vale a dire che y è punto di minimo assoluto per $g \circ f$ in $[0,1]$ e z di massimo assoluto.

(ii) Un controesempio è dato dalle funzioni

$$f(x) = -x^2, \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

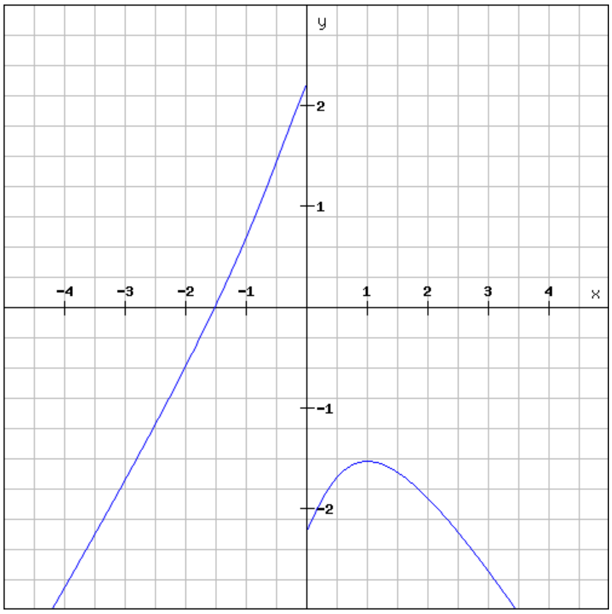
L'espressione di $f \circ g$ in $[0,1]$ è data da

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

che è sempre negativa, ma il cui estremo superiore è 0.

TEMA 1

Soluzione Esercizio 1.



Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; continua e derivabile in tutto il dominio. Non può essere prolungata per continuità in 0.
Asintoti obliqui: sx: $y = x + 1$; dx $y = -x + 1$.
Ha massimo relativo nel punto 1; estremo inferiore $-\infty$, superiore $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$; non ammette minimo né massimo; $f'_{\pm}(0) = \sqrt{2}$.

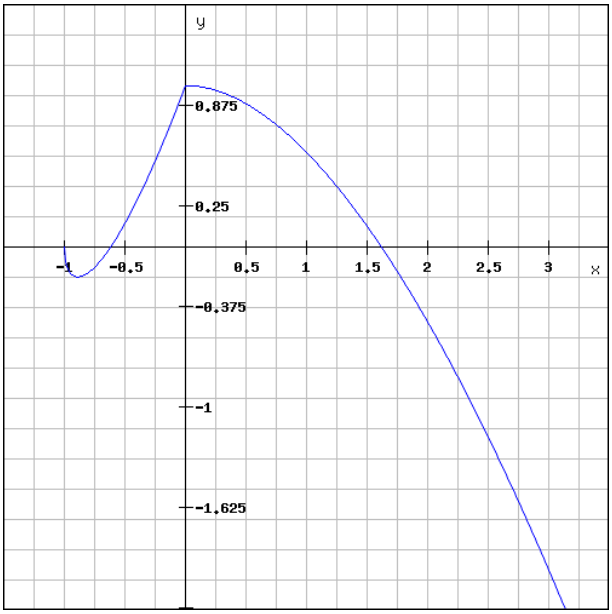
Soluzione Esercizio 2.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\alpha x+5x^2-2x^3} + \ln(1+2\alpha^2 x) - 1}{\cos x - e^{x^2}} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < -\frac{1}{2} \ \cup \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \\ -\frac{10}{3} & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2},\ 0. \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 3.
Diverge per $\alpha \leq -7$ e converge per $\alpha > -7$.

TEMA 2

Soluzione Esercizio 1.



Dominio: $[-1, +\infty)$; continua in tutto il dominio, derivabile in tutto il dominio eccetto -1 e 0. Non ha asintoti.
Ha massimo assoluto nel punto 0; estremo inferiore $-\infty$, quindi non ammette minimo;
$f'_+ \pm (-1) = -\infty$, $f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 0$.

Soluzione Esercizio 2.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos x}{1 - e^{\alpha x} + \ln(1 + \alpha^2 x - 3x^2 - 6x^3)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq 0,\ 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 0 \\ -\frac{3}{8} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 3.
Diverge per $\alpha \leq 2$ e converge per $\alpha > 2$.