Correzione I Appello 19 giugno 2008

Compito 2

1) $B \vee D \vdash (D \& B) \vee B$ non è derivabile in LC né tantomeno in LI. Ci sono 2 modi per provarlo.

I modo: Lo si prova tramite la semantica delle tabelle di verità notando che assegnando a B valore 0 e a D valore 1 allora $B \vee D$ risulta di valore 1 mentre $D \& B$ di valore 0 come pure $(D \& B) \vee B$. (Si può anche costruire l'intera tabella di verità di $\neg(B \vee D) \& ((D \& B) \vee B)$ notando che i suoi valori non sempre 1 ma è più lungo!).

II modo: Usando il calcolo LC_p^* si nota che nella ricerca della sua derivazione si ottiene un albero con una foglia di solo costanti proposizionali che non è assioma ovvero

non è assioma

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}^*}{B \vdash D\&B, B} \qquad \dfrac{\overset{\text{id-ax}^*}{D \vdash D, B} \qquad D \vdash B, B}{D \vdash D\&B, B}\,\&D}{B \vee D \vdash D \& B, B}\,\vee S}{B \vee D \vdash (D \& B) \vee B}\,\vee D^*$$

Quindi il sequente non è derivabile in LC_p^* né tantomeno in LC e in LI

2) $C \to \neg D \vdash \neg\neg D \to \neg C$ è derivabile in LI e quindi in LC.

Ecco una sua derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}}{C \vdash C} \qquad \overset{\neg\text{-ax}^*}{\neg D, \neg\neg D \vdash \bot}}{C,\ C \to \neg D,\ \neg\neg D \vdash \bot}\ \to\text{r.e.}}{C \to \neg D,\ \neg\neg D,\ C \vdash \bot}\ \text{sc}_{sx}}{C \to \neg D,\ \neg\neg D \vdash \neg C}\ \to F}{C \to \neg D \vdash \neg\neg D \to \neg C}\ \to F$$

3) $\exists x\,(C(x) \,\&\, D(x)) \vdash \exists x\, C(x) \vee \forall x\, D(x)$

è derivabile in LI e quindi in LC

Ecco una sua derivazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}^*}{C(x), D(x) \vdash C(x)}}{C(x), D(x) \vdash \exists x\, C(x)}\ \exists\text{-re}}{C(x), D(x) \vdash \exists x\, C(x) \vee \forall x\, D(x)}\ \vee\text{-re}_1}{C(x) \,\&\, D(x) \vdash \exists x\, C(x) \vee \forall x\, D(x)}\ \&S^*}{\exists x\,(C(x) \,\&\, D(x)) \vdash \exists x\, C(x) \vee \forall x\, D(x)}\ \exists\text{-}S \quad x \notin Fv(\exists x\, C(x) \vee \forall x\, D(x))$$

4) Il sequente

Tutti quelli che dormono bene non si ammalano spesso

Carlo non dorme bene

Carlo si ammala spesso

Si può formalizzare così: $D(x) = x$ dorme bene $A(x) = x$ si ammala spesso

$C =$ Carlo

$\forall x\, D(x) \to \neg A(x),\ \neg D(c) \vdash A(c)$

Ora $\forall x\ D(x) \rightarrow \neg A(x), \neg D(c) \vdash A(c)$

non è derivabile nè in LC nè tantomeno in LI

Per provarlo si noti che se fosse derivabile in LC

per sostituzione con $\grave{D}(x) \equiv K \quad x \notin FV(K)$ costanti proposizionali

$\grave{A}(x) \equiv H \quad x \notin FV(K)$

lo sarebbe pure il sequente

$$\forall x\ K \rightarrow \neg H, \neg K \vdash H$$

(si noti $\grave{A}(c) \equiv H$ perchè H, K sono costanti)
$\grave{D}(c) \equiv K$

e per composizione con la derivazione di $K \rightarrow \neg H \vdash \forall x\ K \rightarrow \neg H$

ovvero

$$\cfrac{\cfrac{K \rightarrow \neg H \vdash K \rightarrow \neg H}{K \rightarrow \neg H \vdash \forall x\ K \rightarrow \neg H}\ \forall\text{-D}\ (x \notin FV(K \rightarrow \neg H)) \qquad \overset{\text{(derivabile x ipotesi)}}{\forall x\ K \rightarrow \neg H, \neg K \vdash H}}{K \rightarrow \neg H, \neg K \vdash H}\ \text{comp}_{sx}$$

(la prima riga è un assioma id-ax)

risulterebbe che $K \rightarrow \neg H, \neg K \vdash H$ è derivabile in LC mentre si vede che non lo è con la semantica delle tabelle di verità assegnando a K valore 0 e ad H valore 1. Infatti risulta che per tali assegnazioni $K \rightarrow \neg H$ ha valore 1 come $\neg K$ mentre H ha valore 0, dunque $\neg((K \rightarrow \neg H) \& \neg K) \vee H$ ha valore 0, ovvero il sequente non è derivabile in LC perchè c'è una assegnazione di valori 0,1 per H, K che non lo rende valido.

5) Il seguente

$$\frac{\text{Se mi chiami o non mi chiami io comunque ti ricordo}}{\text{Io ti ricordo}}$$

si può formalizzare così: C = mi chiami
R = ti ricordo

$C \vee \neg C \to R \vdash R$ che è derivabile

in LC tramite LC_p^* come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}^*}{C \vdash \bot, C, R}}{\vdash \neg C, C, R}}{\vdash C, \neg C, R}\text{sc}_{dx}}{\vdash C \vee \neg C, R}\vee\text{-D}^* \quad \overset{\text{id-ax}}{R \vdash R}}{C \vee \neg C \to R \vdash R} \to S^*$$

ma non è derivabile in LI poiché se lo fosse sostituendo R con $C \vee \neg C$ per il principio di sostituzione sarebbe derivabile pure

$$C \vee \neg C \to C \vee \neg C \vdash C \vee \neg C$$

e componendo con

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}}{C \vee \neg C \vdash C \vee \neg C}}{\vdash C \vee \neg C \to C \vee \neg C} \to F \qquad C \vee \neg C \to C \vee \neg C \vdash C \vee \neg C}{\vdash C \vee \neg C}\text{comp}_{sx}$$

Si otterrebbe che in LI vale $\vdash C \vee \neg C$ che non può essere derivabile invece. Dunque si è trovato un assurdo e perciò $C \vee \neg C \to R \vdash R$ non è derivabile in LI.

6) Gli assiomi di T^{cla}_{mon} e T^{int}_{mon} si possono formalizzare così

1) $V(c) \& V(p)$

2) $V(p) \rightarrow V(g) \vee V(f)$

3) $V(f) \rightarrow \neg V(c)$

4) $\neg V(e) \rightarrow \neg V(c)$

Si deriva poi $\vdash \neg V(f)$ in T^{int}_{mon} così:

$$\neg\text{-ax}^*$$
$$V(c), V(p), \neg V(c) \vdash \bot \quad \&S^*$$
$$V(c)\&V(p), \neg V(c) \vdash \bot \quad sc_{sx}$$
$$V(f) \vdash V(f) \qquad \neg V(c), V(c)\&V(p) \vdash \bot \quad \rightarrow\text{-re}$$
$$V(f), V(f)\rightarrow \neg V(c), V(c)\&V(p) \vdash \bot \quad sc_{sx}$$
$$V(f), V(c)\&V(p), V(f)\rightarrow \neg V(c) \vdash \bot \quad sc_{sx}$$
$$V(c)\&V(p), V(f)\rightarrow \neg V(c), V(f) \vdash \bot \quad \neg\text{-F}$$
$$\vdash ax① \qquad V(c)\&V(p), V(f)\rightarrow \neg V(c) \vdash \neg V(f) \quad comp_{sx}$$
$$\vdash ax\,3 \qquad V(f)\rightarrow \neg V(c) \vdash \neg V(f) \quad comp_{sx}$$
$$\vdash \neg V(f)$$

Si deriva poi $\vdash V(g)$ in T^{int}_{mon} così:

$$\text{id-ax}^* \qquad \neg\text{-ax}^*$$
$$V(g), \neg V(f) \vdash V(g) \qquad V(f), \neg V(f) \vdash V(g) \quad \vee\text{-}f$$
$$\text{id-ax}^*$$
$$V(c), V(p) \vdash V(p) \qquad V(g)\vee V(f), \neg V(f) \vdash V(g) \quad \rightarrow\text{-re}$$
$$V(c), V(p), V(p)\rightarrow V(g)\vee V(f), \neg V(f) \vdash V(g) \quad \&S^*$$
$$\vdash ax① \qquad V(c)\&V(p), V(p)\rightarrow V(g)\vee V(f), \neg V(f) \vdash V(g) \quad comp_{sx}$$
$$\vdash ax② \qquad V(p)\rightarrow V(g)\vee V(f), \neg V(f) \vdash V(g) \quad comp_{sx}$$
(derivato sopra) $\vdash \neg V(f)$
$$\neg V(f) \vdash V(g) \quad comp_{sx}$$
$$\vdash V(g)$$

L'affermazione

$$\vdash V(f) \to \neg V(c)$$

Coincide con l'assioma ③ e quindi è banalmente derivabile in T^{int}_{mon}.

Infine $\vdash V(e)$ si deriva in T^{cla}_{mon} così:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash ax④$}
\AxiomC{$\vdash ax①$}
\AxiomC{$V(p), V(c), V(e) \vdash \bot, V(e)$}
\RightLabel{$\to F$}
\UnaryInfC{$V(p), V(c) \vdash \neg V(e), V(e)$}
\AxiomC{$\neg V(c), V(p), V(c) \vdash V(e)$}
\RightLabel{$\to S^{*}$}
\BinaryInfC{$\neg V(e) \to \neg V(c), V(p), V(c) \vdash V(e)$}
\RightLabel{sc_{sx}}
\UnaryInfC{$V(p), V(c), \neg V(e) \to \neg V(c) \vdash V(e)$}
\RightLabel{$\& S^{*}$}
\UnaryInfC{$V(p) \& V(c), \neg V(e) \to \neg V(c) \vdash V(e)$}
\LeftLabel{$comp_{sx}$}
\BinaryInfC{$\neg V(e) \to \neg V(c) \vdash V(e)$}
\BinaryInfC{$\vdash V(e)$}
\end{prooftree}
$$

$\neg\text{-}ax^{**}$

---

7) Gli assiomi di T^{cla}_{alt} e T^{int}_{alt} si possono formalizzare così

① $\vdash A(p,a)$

② $\vdash \neg \exists_x A(x,g)$

③ $\vdash \forall x \, (A(x,p) \to A(x,g))$

④ $\vdash A(a,c)$

⑤ $\vdash \neg\neg A(c,t)$

⑥ $\vdash \forall x \, \forall y \, \forall z \; A(x,y) \& A(y,z) \to A(x,z)$

In T^{int}_{alt} $\vdash \exists x\, A(x,q)$ si deriva così

$$\dfrac{\dfrac{A(p,q)\vdash A(p,q)}{A(p,q)\vdash \exists x\, A(x,q)}\ \exists\text{-re} \qquad \vdash ax\,①}{\vdash \exists x\, A(x,q)}\ \text{comp}_{sx}$$

$\vdash \neg\exists x\, A(x,p)$ si deriva così in T^{int}_{alt}:

$$\dfrac{\overset{\text{id-ax}}{A(x,q)\vdash A(x,q)}}{A(x,q)\vdash \exists x\, A(x,q)}\ \exists\text{-D} \qquad \overset{\text{id-ax}}{\perp\vdash\perp}$$

$$\dfrac{A(x,q)\vdash \exists x\, A(x,q) \qquad \perp\vdash\perp}{A(x,q),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}\ \neg\text{re}$$

$$\dfrac{\overset{\text{id-ax}}{A(x,p)\vdash A(x,p)} \qquad A(x,q),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}{A(x,p),\ A(x,p)\to A(x,q),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}$$

$$\dfrac{A(x,p),\ A(x,p)\to A(x,q),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}{A(x,p)\to A(x,q),\ A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}\ sc_{sx}$$

$$\dfrac{A(x,p)\to A(x,q),\ A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}{\forall x\,(A(x,p)\to A(x,q)),\ A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}\ \forall\text{-S}$$

$$\dfrac{\forall x\,(A(x,p)\to A(x,q)),\ A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q)\vdash\perp}{A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\perp}\ sc_{sx}$$

$$\dfrac{A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\perp}{\exists x\, A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\perp}\ \exists\text{-F}$$

$$\dfrac{\exists x\, A(x,p),\ \neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\perp}{\neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q)),\ \exists x\, A(x,p)\vdash\perp}\ sc_{sx}$$

$$\dfrac{\neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q)),\ \exists x\, A(x,p)\vdash\perp}{\neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\neg\exists x\, A(x,p)}\ \neg\text{-F}$$

$$\dfrac{\vdash ax\,② \qquad \neg\exists x\, A(x,q),\ \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\neg\exists x\, A(x,p)}{\forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\neg\exists x\, A(x,p)}\ \text{comp}_{sx}$$

$$\dfrac{\vdash ax\,③ \qquad \forall x\,(A(x,p)\to A(x,q))\vdash\neg\exists x\, A(x,p)}{\vdash\neg\exists x\, A(x,p)}\ \text{comp}_{sx}$$

poichè $x \notin FV(ax②, ax③)$

in T^{int}_{alt} $\vdash A(p,c)$ si deriva così:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}^*}{A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,a)} \quad \overset{\text{id-ax}^*}{A(p,a),A(a,c)\vdash A(a,c)}}{A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,a)\&A(a,c)}\ \&F \qquad \overset{\text{id-ax}}{A(p,c)\vdash A(p,c)}}{A(p,a),A(a,c),\ A(p,a)\&A(a,c)\to A(p,c)\vdash A(p,c)}\ \to S$$

$$\dfrac{A(p,a),A(a,c),\ A(p,a)\&A(a,c)\to A(p,c)\vdash A(p,c)}{A(p,a)\&A(a,c)\to A(p,c),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}\ sc_{sx}$$

$$\dfrac{A(p,a)\&A(a,c)\to A(p,c),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}{\forall z\, A(p,a)\&A(a,z)\to A(p,z),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}\ \forall S$$

$$\dfrac{\forall z\, A(p,a)\&A(a,z)\to A(p,z),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}{\forall y\forall z\, A(p,y)\&A(y,z)\to A(p,z),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}\ \forall S$$

$$\dfrac{\forall y\forall z\, A(p,y)\&A(y,z)\to A(p,z),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}{\forall x\forall y\forall z\, A(x,y)\&A(y,z)\to A(x,z),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}\ \forall\text{-}S$$

$$\dfrac{\forall x\forall y\forall z\, A(x,y)\&A(y,z)\to A(x,z),\ A(p,a),A(a,c)\vdash A(p,c)}{A(p,a),\ A(a,c),\ \forall x\forall y\forall z\, A(x,y)\&A(y,z)\to A(x,z)\vdash A(p,c)}\ sc_{sx}$$

$$Comp_{sx}\ \dfrac{\vdash ax\ 1 \qquad A(p,a),\ A(a,c),\ \forall x\forall y\forall z\, A(x,y)\&A(y,z)\to A(x,z)\vdash A(p,c)}{A(a,c),\ ax\ 6\vdash A(p,c)}$$

$$Comp_{sx}\ \dfrac{\vdash ax\ 4 \qquad A(a,c),\ ax\ 6\vdash A(p,c)}{ax\ 6\vdash A(p,c)}$$

$$\dfrac{\vdash ax\ 6 \qquad ax\ 6\vdash A(p,c)}{\vdash A(p,c)}\ Comp_{sx}$$

in T^{cla}_{non} $\vdash A(c,t)$ si deriva così

$$\dfrac{\vdash ax\ 5 \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}^*}{A(c,t)\vdash \bot, A(c,t)}}{\vdash \neg A(c,t), A(c,t)}\ \neg F \qquad \overset{\bot\text{-ax}}{\bot\vdash A(c,t)}}{\neg\neg A(c,t)\vdash A(c,t)}}{\vdash A(c,t)}\ Comp_{sx}$$

(compito V)

8) L'insieme delle formule di $L^{\vee}$ con costanti X, Y, con $\bot$ e il connettivo $\vee$ si definisce induttivamente come segue

$\bot \in Frm\, L^{\vee,\bot}$ $\qquad X \in Frm\, L^{\vee,\bot}$ $\qquad Y \in Frm\, L^{\vee,\bot}$

$$\dfrac{A \in Frm\, L^{\vee,\bot} \qquad B \in Frm\, L^{\vee,\bot}}{A\vee B \in Frm\, L^{\vee,\bot}}$$

[si noti che A, B sono usate come (meta)-variabili per formule di $L^{\vee,\bot}$]

Il loro principio d'inclusione è il seguente

Sia $P(A)$ propietà su formula $A \in Frm\,L^{\vee,\perp}$

si ha che se valgono

- $P(\perp)$ è vero
- $P(x)$ è vera
- $P(y)$ è vera
- se $P(A)$ è vera e $P(B)$ è vera allora $P(A \vee B)$ è vera

si conclude che

per ogni formula $A \in Frm\,L^{\vee,\perp}$ $P(A)$ è vera.

(si può anche scrivere brevemente così

$$\frac{P(\perp) \text{ è vero} \quad P(x) \text{ è vero} \quad P(y) \text{ è vero} \qquad \text{se } P(A) \text{ è vera e } P(B) \text{ è vera allora } P(A \vee B) \text{ è vera}}{\text{per ogni } A \in Frm\,L^{\vee,\perp} \quad P(A) \text{ è vera}}$$
)

(compito V)

9) L'insieme delle derivazioni di $L^{\vee}$ con costanti X, Y e $\perp$ si definisce induttivamente così:

(per ogni $A \in Frm\,L^{\vee}$) $A \vdash A \in Der\,L^{\vee,\perp}$ $\qquad \perp \vdash \Delta \in Der\,L^{\vee,\perp}$

$$\frac{\overset{\Pi}{\nabla}\; \Gamma \vdash A \in Der\,L^{\vee,\perp}}{\overset{\Pi}{\nabla}\; \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee\text{-re}_1 \in Der\,L^{\vee,\perp}} \qquad \frac{\overset{\Pi}{\nabla}\; \Gamma \vdash A \in Der\,L^{\vee,\perp}}{\overset{\Pi}{\nabla}\; \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}\,\vee\text{-re}_2 \in Der\,L^{\vee,\perp}}$$

$$\frac{\overset{\pi}{A \vdash \Delta} \in Der\, L^{\vee,\perp} \qquad \overset{\pi'}{B \vdash \Delta} \in Der\, L^{\vee,\perp}}{\dfrac{\overset{\pi}{A \vdash \Delta} \quad \overset{\pi'}{B \vdash \Delta}}{A \vee B \vdash \Delta}\vee\text{-}F \in Der\, L^{\vee,\perp}}$$

Il loro principio d'induzione è il seguente

Sia $P\left(\overset{\pi}{\Gamma \vdash \Delta}\right)$ proprietà su derivazioni in $L^{\vee}$ con $X, Y, \perp$.

Si ha che se valgono

$P(A \vdash A)$ è vero

$P(\perp \vdash \Delta)$ è vero

- Se $P\left(\overset{\pi}{\Gamma \vdash A}\right)$ è vero allora $P\left(\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee\text{-}re_1\right)$ è vero
- Se $P\left(\overset{\pi}{\Gamma \vdash A}\right)$ è vero allora $P\left(\dfrac{\overset{\pi}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B \vee A}\vee\text{-}re_2\right)$ è vero
- Se $P\left(\overset{\pi}{A \vdash \Gamma}\right)$ è vero e $P\left(\overset{\pi'}{B \vdash \Gamma}\right)$ è vero allora $P\left(\dfrac{\overset{\pi}{A \vdash \Delta} \quad \overset{\pi'}{B \vdash \Delta}}{A \vee B \vdash \Delta}\right)$ è vero

Si conclude che

per ogni $\overset{\pi}{\Gamma \vdash \Delta} \in Der\, L^{\vee}$ $\quad P\left(\overset{\pi}{\Gamma \vdash \Delta}\right)$ è vero.

Compito V

10) Mostriamo per induzione sulle derivazioni che $\boxed{11}$

"se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $L^{\vee}$ allora $\Gamma \neq \emptyset$ e $\Delta \neq \emptyset$"

Lo proviamo mostrando che in $L^{\vee}$ (con solo $\vee$)

$$P\left(\Gamma \overset{\pi}{\vdash} \Delta\right) \equiv \Gamma \neq \emptyset \ \& \ \Delta \neq \emptyset$$

Vale per il principio d'induzione. Infatti vale sul caso base

$$P(A \vdash A) \equiv A \neq \emptyset \ \& \ A \neq \emptyset \quad \text{ovviamente è vero}$$

e Vale sui casi induttivi:

- Se $P(A \overset{\pi}{\vdash} \Delta)$ e $P(B \overset{\pi}{\vdash} \Delta)$ vero, ossia

  se $A \neq \emptyset \ \& \ \Delta \neq \emptyset$ e se $B \neq \emptyset \ \& \ \Delta \neq \emptyset$

  Si ottiene che $P\left(\dfrac{A \overset{\pi}{\vdash} \Delta \quad B \overset{\pi}{\vdash} \Delta}{A \vee B \vdash \Delta}\right) \neq \emptyset$

  ossia $A \vee B \neq \emptyset \ \& \ \Delta \neq \emptyset$

  in quanto $\Delta \neq \emptyset$ vale per ipotesi.

- Se $P(\Delta \overset{\pi}{\vdash} A)$ vale ossia $\Delta \neq \emptyset \ \& \ A \neq \emptyset$

  si ottiene che $P\left(\dfrac{\Delta \overset{\pi}{\vdash} A}{\Delta \vdash A \vee B} \, \vee\text{-re}_1\right)$ vale

  perchè $\Delta \neq \emptyset \ \& \ A \vee B \neq \emptyset$

  in quanto $\Delta \neq \emptyset$ per ipotesi.

- se $P(\Delta \overset{\pi}{\vdash} A)$ vale allora $P\left(\dfrac{\Delta \overset{\pi}{\vdash} A}{\Delta \vdash B \vee A}\right)$ si dimostra come il caso precedente.

11)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}^*}{B(\ell),B(u)\vdash B(\ell)} \quad \overset{\text{id-ax}^*}{B(\ell),B(u)\vdash B(u)}}{B(\ell),B(u)\vdash B(\ell)\&B(u)} \qquad \overset{\neg\text{-ax}^*}{\ell=u,\ \ell\neq u\vdash\bot}}{B(\ell),\ B(u),\ B(\ell)\&B(u)\to \ell=u,\ \ell\neq u\vdash\bot}\ \to\text{-c}$$

$$\dfrac{B(\ell),\ B(u),\ B(\ell)\&B(u)\to \ell=u,\ \ell\neq u\vdash\bot}{B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u),\ B(\ell)\&B(u)\to \ell=u\vdash\bot}\ sc_{sx}$$

$$\dfrac{B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u),\ B(\ell)\&B(u)\to \ell=u\vdash\bot}{B(\ell)\&B(u)\to \ell=u,\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}\ sc_{sx}$$

$$\dfrac{B(\ell)\&B(u)\to \ell=u,\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}{\forall z\,(B(\ell)\&B(z)\to \ell=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}\ \forall\text{-S}$$

$$\dfrac{\forall z\,(B(\ell)\&B(z)\to \ell=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}{\forall y\forall z\,(B(y)\&B(z)\to y=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}\ \forall\text{-S}$$

$$\dfrac{\forall y\forall z\,(B(y)\&B(z)\to y=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}{\exists x B(x),\ \forall y\forall z\,(B(y)\&B(z)\to y=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}\ i_{sx}$$

$$\dfrac{\exists x B(x),\ \forall y\forall z\,(B(y)\&B(z)\to y=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u,\ B(u)\vdash\bot}{\exists x B(x),\ \forall y\forall z\,(B(y)\&B(z)\to y=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u\vdash\neg B(u)}\ \to\text{F}$$

$$\dfrac{\exists x B(x),\ \forall y\forall z\,(B(y)\&B(z)\to y=z),\ B(\ell),\ \ell\neq u\vdash\neg B(u)}{\exists x B(x)\ \&\ (\forall y\forall z\,(B(y)\&B(z)\to y=z)),\ B(\ell),\ \ell\neq u\vdash\neg B(u)}\ \&\text{-S}$$

---

12) (compito V) La derivazione del sequente in $LI^c_=$ è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{tra-ax}}{s=e,\ e=t\vdash s=t} \qquad \overset{\bot\text{-ax}}{\bot\vdash e\neq u}}{s=e,\ e=t,\ s\neq t\vdash e\neq u}\ \to\text{-c}}{s=e,\ s\neq t,\ e=t\vdash e\neq u}\ sc_{sx}$$

---

13) (compito V) Il sequente $\vdash (A\&\neg A)\to(A\vee\neg A)$

è valido in ogni modello di Kripke per il teorema di validità di LI_p rispetto ai modelli di Kripke in quanto è derivabile in LI_p come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{id-ax}}{A\vdash A}}{A\vdash A\vee\neg A}\ \vee\text{-re}_1}{A\&\neg A\vdash A\vee\neg A}\ \&\text{-re}_1}{\vdash A\&\neg A\to A\vee\neg A}\ \to\text{F}$$