III Appello 10 settembre 2009

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- Non si contano le brutte copie.

- Specificate la logica in cui fate le derivazioni.
- Specificate le regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)

• Mostrare se i sequenti di seguito sono derivabili o meno in LI e LC:

4 punti

$A \vee B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

si' in LI poichè si deriva cosi' ....
no in LI poichè ....
si' in LC poichè si deriva cosi' ....
no in LC poichè ....

4 punti

$\vdash \neg\neg(\neg A \vee A) \vee \bot$

si' in LI poichè si deriva cosi' ....
no in LI poichè ....
si' in LC poichè si deriva cosi' ....
no in LC poichè ....

5 punti

$\exists x\, C(x) \vee \forall x\, C(x) \vdash \exists x\, (\, C(x) \vee \bot\,)$

si' in LI poichè si deriva cosi' ....
no in LI poichè ....
si' in LC poichè si deriva cosi' ....
no in LC poichè ....

(8 punti)

$$\vdash \forall x\,(\,x = y\,\&\ \perp\,) \quad \begin{cases} \text{si' in LI} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LI} & \text{poichè ....} \\ \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

$$\vdash \forall x\ \exists y\ (\,x = y \vee\ \perp) \quad \begin{cases} \text{si' in LI} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LI} & \text{poichè ....} \\ \text{si' in LC} & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC} & \text{poichè ....} \end{cases}$$

- Formalizzare in sequente le argomentazioni di seguito. Si provi inoltre la loro correttezza sia in logica intuizionista LI che classica LC facendo riferimento ai calcoli per LI e LC che trovate in allegato:
  (12 punti)

  Chi legge molto sa molto.

  Chi non legge molto non sa molto.

  si consiglia di usare:
  L(x)=x legge molto
  S(x)=x sa molto

corretto in LI	sì	no
corretto in LC	sì	no

  Le persone che non amano gli animali approvano la caccia.
  Giorgio non approva la caccia.

  Giorgio ama gli animali.

  si consiglia di usare:
  A(x)= x ama gli animali
  C(x)=x approva la caccia
  g= Giorgio

corretto in LI	sì	no
corretto in LC	sì	no

- (10 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e derivare quest'ultimo in LC:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Il programma non si ferma su un'unico input.}\\ \text{Il programma non si ferma su zero.}\\ \text{Zero è diverso da uno.}\\ \text{Zero è uguale a zero più zero.}\end{array}}{\text{Il programma si ferma su uno e non si ferma su zero più zero.}}$$

si consiglia di usare:
P(x)= Il programma si ferma sull'input x
0=zero
0+0= zero più zero 1=uno

- (20 punti) Dare prova di derivabilità o non derivabilità nell'aritmetica di Heyting HA= LI + comp_{sx} + comp_{dx} dei seguenti sequenti:
  - 8. $\vdash \forall x\ (\, x + 0 = x \cdot 0\,)$
  - 9. $\vdash 0 = 4 + 0$
  - 10. $\vdash \forall x\ (\, 2 = x \to s(x) = s(2)\,)$
  - 11. $\vdash 3 = 2 + 1$
  - 12. $\vdash 2 \cdot 1 = 2$
- (punti 18) Siano T^i_{aul} e T^c_{aul} le teoria ottenute rispettivamente estendendo LI e LC con composizioni dx e sx con la formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Ax1. Tutti gli studenti in aula A stanno seguendo la lezione.
  - Ax2. Carlo è uno studente.
  - Ax3. Se Carlo è in aula A allora Pietro è in aula B.
  - Ax4. Pietro è uno studente e non è in aula B.
  - Ax5. Ogni studente è in aula A o in aula B.
  - Ax6. C'è un unico studente in aula B.
  - Ax7. Non si dà il caso che non ci siano studenti con i capelli rossi in aula B.
  - Ax8. L'aula A è diversa dall'aula B.

  si consiglia di usare:
  $E(x, y)$= x è in y
  $S(x)$= x è studente
  $L(x)$= x sta seguendo la lezione
  $R(x)$= x ha i capelli rossi
  p=Pietro
  c=Carlo
  a=aula A
  b=aula B

  Derivare:
  - 9. Pietro è in aula A. (in T^i_{aul})
  - 10. Pietro sta seguendo la lezione. (in T^i_{aul})
  - 11. Carlo non è in aula A. (in T^i_{aul})
  - 12. Carlo è in aula B. (in T^i_{aul})
  - 13. Carlo ha i capelli rossi. (in T^c_{aul})

- 14. Pietro è diverso da Carlo. (in T^i_{aul})

- (3 punti) Dare la definizione induttiva dell'insieme delle derivazioni di $L^{\exists}$ con connettivo $\exists$ di LI. Enunciare il loro principio di induzione.

- (4 punti)

  Dimostrare per induzione sulle derivazioni di $L^{\exists}$ che

  "se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $L^{\exists}$ allora Δ contiene almeno una formula"

- Risolvere la seguente equazione definitoria (9 punti):

$$\Gamma, A \circ B \vdash \Sigma \qquad \text{sse} \qquad \Gamma, B, A \vdash \Sigma$$

- L' equazione sopra è risolvibile in LI con composizioni a destra e a sinistra senza aggiungere un nuovo connettivo? è risolvibile in LC con composizioni a destra e a sinistra senza aggiunta di un nuovo connettivo ? (ovvero l'esercizio consiste nel dire se $A \circ B$ è definibile in LI con composizioni e in caso positivo occorre mostrare che la definizione considerata di $A \circ B$ soddisfa in LI con composizioni l'equazione sopra; lo stesso dicasi per LC). (9 punti)