## Correzione I Appello + II compitino 19 giugno 2009

- Esercizio su derivabilità.

  1.
  $$A \vee D \vdash (D \rightarrow A)\&D$$

  non è derivabile in LC, e neppure in LI.
  Per provarlo, basta vedere che nella tabella di verità di

  $$\neg(A \vee D) \vee (\,(D \rightarrow A)\&D\,)$$

  se si dà valore 1 ad $A$ e valore $O$ a $D$ allora $A \vee D$ risulta 1, mentre $(D \rightarrow A)\&D$ è 0 e quindi $\neg(A \vee D) \vee (\,(D \rightarrow A)\&D\,)$ risulta di valore 0.

  2.
  $$\vdash \neg D \vee (D\vee \perp)$$

  è derivabile in LC (usando regole anche di $\mathrm{LC}_p^{abbr}$ che sono derivate pure in LC) ad esempio come segue:

  $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}^*}{D \vdash D, \perp}}{D \vdash D\vee \perp}\ \vee-\mathrm{D}}{\vdash \neg D, D\vee \perp}\ \neg-\mathrm{F}}{\vdash \neg D \vee (D\vee \perp)}\ \vee-\mathrm{D}$$

  Mentre non è derivabile in LI, perchè se lo fosse per il principio di disgiunzione sarebbe derivabile in LI $\vdash \neg D$ oppure $\vdash D\vee \perp$. Ma $\vdash \neg D$ NON è derivabile in LI perchè non lo è neppure in LC (la sua tabella di verità dà 0 se si assegna a $D$ valore 1). Parimenti neppure $\vdash D\vee \perp$ è derivabile in LI perchè non lo è neppure in LC (la sua tabella di verità dà 0 se si assegna a $D$ valore 0).
  Alternativamente si può usare l'algoritmo di decisione per la logica abbreviata $\mathrm{LI}_p^{abbr}$ esplorando tutti i possibili candidati ad essere alberi di derivazione per $\vdash \neg D \vee (D\vee \perp)$. I possibili candidati sono 3: quello che si usa salendo con $\vee$-re$_1$, l'altro è quello ottenuto salendo con $\vee$-re$_2$ e poi con $\vee$-re$_1$, e l'ultimo è quello che si ottiene salendo con $\vee$-re$_2$ e poi di nuovo con $\vee$-re$_2$. Ma nessuno di questi è un albero di derivazione e dunque il sequente non è derivabile in $\mathrm{LI}_p^{abbr}$ e dunque in $\mathrm{LI}_p$ ad esso equivalente e neppure in LI (per conservatività essendo una formula proposizionale).

  3.
  $$\exists x(\,B(x) \rightarrow C(x)\,) \vdash \forall x\, B(x) \ \rightarrow\ \exists y\, C(y)$$

  è derivabile in LI e quindi in LC ad esempio come segue

  $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{B(x) \vdash B(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{C(x) \vdash C(x)}}{C(x) \vdash \exists y\, C(y)}\ \exists-\mathrm{re}}{B(x) \rightarrow C(x), B(x) \vdash \exists y\, C(y)}\ \rightarrow-\mathrm{re}}{B(x) \rightarrow C(x), \forall x\, B(x) \vdash \exists y\, C(y)}\ \forall-\mathrm{re}}{B(x) \rightarrow C(x) \vdash \forall x\, B(x) \ \rightarrow\ \exists y\, C(y)}\ \rightarrow-\mathrm{F}}{\exists x(\,B(x) \rightarrow C(x)\,) \vdash \forall x\, B(x) \ \rightarrow\ \exists y\, C(y)}\ \exists-\mathrm{F}$$

  ove l'applicazione di $\exists-$F è possibile perchè $x$ non è libera nel resto del sequente.

4.
$$\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x = y \rightarrow x \neq y\ )$$

NON è derivabile in LC e quindi nemmeno in LI.
Per dimostrarlo mostriamo che

$$\forall x\ \forall y\ (\ x = y \rightarrow x \neq y\ ) \vdash \perp$$

è derivabile in LC come segue

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}=\text{-ax}\\ \vdash x = x\end{array} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}=\text{-ax}\\ \vdash x = x\end{array}}{x \neq x \vdash \perp}\ \neg-\text{re}}{x = x \rightarrow x \neq x \vdash \perp}\ \rightarrow -\text{re}}{\forall y\ (\ x = y \rightarrow x \neq y\ ) \vdash \perp}\ \forall-\text{re}}{\forall x\ \forall y\ (\ x = y \rightarrow x \neq y\ ) \vdash \perp}\ \forall-\text{re}$$

ricordando che $x \neq x\ \equiv\ \neg x = x\ \equiv\ x = x \rightarrow \perp$
Chiamiamo $\pi_1$ tale derivazione.
Ora se esistesse una derivazione $\pi_2$ di $\vdash \forall x\ \forall y\ (\ x = y \rightarrow x \neq y\ )$ otterremmo che in LC è derivabile il falso, in quanto in LC con composizioni, equivalente a LC, si otterrebbe una derivazione del falso come segue

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash \forall x\ \forall y\ (\ x = y \rightarrow x \neq y\ )\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \forall x\ \forall y\ (\ x = y \rightarrow x \neq y\ ) \vdash \perp\end{array}}{\vdash \perp}\ \text{comp}_{sx}$$

Ma sappiamo che LC è consistente ovvero non deriva il falso e dunque avendo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di $\pi_2$ si conclude che la derivazione $\pi_2$ NON esiste.

5.
$$\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\ x = y \rightarrow y = z\ )$$

è derivabile in LI e quindi in LC come segue:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ x = x \vdash x = x\end{array}}{\vdash x = x \rightarrow x = x}\ \rightarrow -\text{re}}{\vdash \exists z\ (\ x = x \rightarrow x = z\ )}\ \exists-\text{re}}{\vdash \exists y\ \exists z\ (\ x = y \rightarrow y = z\ )}\ \exists-\text{re}}{\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\ x = y \rightarrow y = z\ )}\ \exists-\text{re}$$

[ Attenzione a non usare variabili vincolate con $\exists$-re:
per esempio NON si può sostituire $x$ con $y$

$$\cfrac{\vdash \exists y\ \exists z\ (\ y = y \rightarrow y = z\ )}{\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\ x = y \rightarrow y = z\ )}\ \exists - re_{NOOO!!}$$

c'è cattura di variabile libera, vedi lezione]

- L'esercizio di formalizzare in sequente alcune argomentazioni si svolge come segue:

1. L'argomentazione

$$\frac{\text{Non si dà il caso che non esista input su cui il programma si ferma.}}{\text{Il programma si ferma su qualche input.}}$$

ove si consiglia di usare:
F(x)= il programma si ferma sull'input x

si può formalizzare come segue:

$$\neg\neg(\exists x\ F(x)) \vdash \exists x\ F(x)$$

e si può derivare in LC ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\neg-\mathrm{ax}_{sx2}}{\vdash \neg(\exists x\ F(x)), \exists x\ F(x)}}{\neg\neg(\exists x\ F(x)) \vdash \exists x\ F(x)}\ \neg-\mathrm{S}$$

Ma il sequente sopra NON è derivabile in LI. Per mostrarlo basta ricordare che per il teorema di sostituzione se esistesse una derivazione $\pi$ di $\neg\neg(\exists x\ F(x)) \vdash \exists x\ F(x)$ allora esisterebbe una derivazione $\pi[F(x)/A]$ del sequente $\neg\neg(\exists x\ A) \vdash \exists x\ A$ ottenuta sostituendo in $\pi$ la formula $F(x)$ con una COSTANTE PROPOSIZIONALE $A$ che non dipende da $x$.
Ora si noti che

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A \vdash A}}{\exists x\ A \vdash A}\ \exists-\mathrm{F}$$

è una derivazione, diciamo $\pi_1$ in LI, (visto che $x$ non compare in $A$ si può applicare senza problemi $\exists-$F). Inoltre si ha pure la derivazione $\pi_2$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A \vdash A}}{A \vdash \exists x A}\ \exists-\mathrm{re}}{\neg\exists x A, A \vdash \perp}\ \neg-\mathrm{re}}{\neg\exists x A \vdash \neg A}\ \neg-\mathrm{F}}{\neg\neg A, \neg\exists x A \vdash \perp}\ \neg-\mathrm{re}}{\neg\neg A \vdash \neg\neg\exists x\ A}\ \neg-\mathrm{F}$$

Allora componendo si otterrebbe una derivazione in LI con composizioni del tipo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \neg\neg A \vdash \neg\neg\exists x\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi[F(x)/A]\\ \neg\neg(\exists x\ A) \vdash \exists x\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \exists x\ A \vdash A\end{array}}{\neg\neg\exists x\ A \vdash A}\ \mathrm{comp}_{sx}}{\neg\neg A \vdash A}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

Ma ciò non è possibile perchè non esiste in LI derivazione di $\neg\neg A \vdash A$ che darebbe per l'equazione definitoria di $\rightarrow$ una derivazione della legge della doppia negazione $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ che sappiamo NON essere derivabile in LI.

2. L'argomentazione

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Ho invitato soltanto amici alla festa.}\\ \text{Il mio vicino di casa non è un mio amico.}\end{array}}{\text{Il mio vicino di casa non è invitato alla festa.}}$$

ove si consiglia di usare:
I(x)=x è invitato alla festa
A(x)=x è un mio amico
v=vicino di casa

si può formalizzare come segue:

$$\forall x\ (\ I(x) \rightarrow A(x)\ ), \neg A(c) \vdash \neg I(c)$$

che si può derivare in LI, e quindi anche in LC, ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ I(c) \vdash I(c)\end{array} \quad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \neg A(c)\, A(c) \vdash \perp\end{array}}{\neg A(c), I(c) \rightarrow A(c), I(c) \vdash \perp}\ \rightarrow -\text{re}}{\neg A(c), I(c), I(c) \rightarrow A(c) \vdash \perp}\ \text{sc}_{sx}}{\neg A(c), I(c), \forall x\ (\ I(x) \rightarrow A(x)\ ) \vdash \perp}\ \forall -\text{re}}{\forall x\ (\ I(x) \rightarrow A(x)\ ), \neg A(c), I(c) \vdash \perp}\ \text{sc}_{sx}}{\forall x\ (\ I(x) \rightarrow A(x)\ ), \neg A(c) \vdash \neg I(c)}\ \neg -\text{F}$$

- L'esercizio di formalizzare la seguente argomentazione in sequente e derivare quest'ultimo in LI:

  L'auto di Filippo è una Mercedes.
  L'auto di Carla è uguale a quella di Filippo.
  ---
  L'auto di Carla è una Mercedes.

  ove si consiglia di usare:
  M(x)=x è una Mercedes
  c=auto di Carla
  f=auto di Filippo

  si può svolgere come segue:

  una sua formalizzazione risulta essere

  $$M(f), c = f \vdash M(c)$$

  che è derivabile in LI ad esempio come segue:

  $$\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ M(c) \vdash M(c)\end{array}}{M(f), c = f \vdash M(c)}\ = -\text{F}$$

- L'esercizio di derivazione in aritmetica di Heyting HA= LI + $\text{comp}_{sx}$ + $\text{comp}_{dx}$ si può svolgere come segue:

  - 8. $\vdash 0 = 0 + 0$ si può derivare ad esempio come segue:

  $$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0 + 0 = 0 \vdash 0 + 0 = 0\end{array}}{\forall x\ (\ x + 0 = x\ ) \vdash 0 + 0 = 0}\ \forall -\text{re}}{\text{Ax 3.} \vdash 0 = 0 + 0}\ \text{sy} - \text{r}}{\vdash 0 = 0 + 0}\ \text{comp}_{sx}$$

- 9. $\vdash \forall x\ (\, s(x) = s(2) \to x = 2\,)$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 2.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{s(x) = s(2) \to x = 2 \vdash s(x) = s(2) \to x = 2}}{\forall y\ (\, s(x) = s(y) \to x = y\,) \vdash s(x) = s(2) \to x = 2}\ \forall{-}\text{re}}{\forall x\ \forall y\ (\, s(x) = s(y) \to x = y\,) \vdash s(x) = s(2) \to x = 2}\ \forall{-}\text{re}}{\text{Ax 2.} \vdash \forall x\ (\, s(x) = s(2) \to x = 2\,)}\ \forall{-}\text{F}}{\vdash \forall x\ (\, s(x) = s(2) \to x = 2\,)}\ \text{comp}_{sx}$$

l'applicazione di $\forall{-}$F è possibile perchè $x$ non compare libera nella premessa.

- 10. $\vdash 0 \cdot 0 = 0 + 0$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \pi \\ \vdash 0 \cdot 0 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots \\ \pi_8 \\ \vdash 0 = 0 + 0 \end{matrix}}{\vdash 0 \cdot 0 = 0 + 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove $\pi_8$ è la derivazione di 8. $\vdash 0 = 0 + 0$ mentre $\pi$ è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 5.} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{0 \cdot 0 = 0 \vdash 0 \cdot 0 = 0}}{\forall x\ (\, x \cdot 0 = 0\,) \vdash 0 \cdot 0 = 0}\ \forall{-}\text{re}}{\vdash 0 \cdot 0 = 0}\ \text{comp}_{sx}$$

- 11. $\vdash \forall x\ (\, x = 0 \to s(x) = s(0)\,)$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{cf}^*}{x = 0 \vdash s(x) = s(0)}}{\vdash x = 0 \to s(x) = s(0)}\ \to{-}\text{F}}{\vdash \forall x\ (\, x = 0 \to s(x) = s(0)\,)}\ \forall{-}\text{F}$$

- 12. $\vdash 2 + 1 = 3$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \pi_1 \\ \vdash 2 + 1 = s(2 + 0) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots \\ \pi_2 \\ \vdash s(2 + 0) = s(2) \end{matrix}}{\vdash 2 + 1 = 3}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove $\pi_1$ è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{2 + 1 = s(2 + 0) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}}{\forall y\ (\, 2 + s(y) = s(2 + y)\,) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}\ \forall{-}\text{re}}{\forall x\ \forall y\ (\, x + s(y) = s(x + y)\,) \vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}\ \forall{-}\text{re}}{\vdash 2 + 1 = s(2 + 0)}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre $\pi_2$ è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \dfrac{\overset{\text{cf}^*}{2 + 0 = 2 \vdash s(2 + 0) = s(2)}}{\vdash \forall x\ (\, x + 0 = x\,) \vdash s(2 + 0) = s(2)}\ \forall{-}\text{re}}{\vdash s(2 + 0) = s(2)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 13. $\vdash 0 \cdot 2 = 0$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0\end{array}}{\vdash 0 \cdot 2 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove $\pi_1$ è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0 \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0\end{array}}{\forall y\ (\, 0 \cdot s(y) = 0 \cdot y + 0\,) \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0}\ \forall\text{−re}}{\forall x\ \forall y\ (\, x \cdot s(y) = x \cdot y + x\,) \vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0}\ \forall\text{−re}}{\vdash 0 \cdot 2 = 0 \cdot 1 + 0}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $2 \equiv s(1)$, mentre $\pi_2$ è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_3\\ \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_4\\ \vdash 0 \cdot 1 = 0\end{array}}{\vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove $\pi_3$ è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1 \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1\end{array}}{\forall x\ (\, x + 0 = x\,) \vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1}\ \forall\text{−re}}{\vdash 0 \cdot 1 + 0 = 0 \cdot 1}\ \text{comp}_{sx}$$

mentre $\pi_4$ è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_5\\ \vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_6\\ \vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0\end{array}}{\vdash 0 \cdot 1 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove $\pi_5$ è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0 \vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0\end{array}}{\forall y\ (\, 0 \cdot s(y) = 0 \cdot y + 0\,) \vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0}\ \forall\text{−re}}{\forall x\ \forall y\ (\, x \cdot s(y) = x \cdot y + x\,) \vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0}\ \forall\text{−re}}{\vdash 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 + 0}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre $\pi_6$ è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_7\\ \vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0 \cdot 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi\\ \vdash 0 \cdot 0 = 0\end{array}}{\vdash 0 \cdot 0 + 0 = 0}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove $\pi$ è la derivazione iniziale e infine $\pi_7$ è la seguente derivazione

$$\cfrac{\vdash \text{Ax 3.} \qquad \cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{0\cdot 0+0=0\cdot 0 \vdash 0\cdot 0+0=0\cdot 0}}{\forall x\ (\,x+0=x\,) \vdash 0\cdot 0+0=0\cdot 0}\ \forall\!-\!\text{re}}{\vdash 0\cdot 0+0=0\cdot 0}\ \text{comp}_{sx}$$

- Siano $T^i_{vot}$ e $T^c_{vot}$ le teorie ottenute rispettivamente estendendo LI e LC con composizioni dx e sx con la formalizzazione dei seguenti assiomi indicata a fianco ove si consiglia di usare:
  $E(x)$= x è andato a votare
  $V(x)$= x ha espresso un voto valido
  $P(x,y)$=x ha votato il partito y
  $I(x,y)$=x è un partito che difende gli interessi di y
  $i$=”il partito ideale”
  $f$=Filippo
  $c$=Carla
  $m$=Marco
  $p$=il più potente di turno
  $s$=”intera società”,

  -
  - Ax1 Filippo non è andato a votare.

    $$\neg E(f)$$

  - Ax2. Carla non è andata a votare se e solo se ci è andato Filippo.

    $$\neg E(c) \leftrightarrow E(f)\ \equiv\ (\,\neg E(c) \to E(f)\,)\,\&\,(\,E(f) \to \neg E(c)\,)$$

  - Ax3. Se uno ha espresso un voto valido allora è andato a votare.

    $$\forall x\ (\,V(x) \to E(x)\,)$$

  - Ax4. Marco ha espresso un voto valido.

    $$V(m)$$

  - Ax5. Marco ha votato un partito che difende gli interessi dell’intera società.

    $$\exists y\ (\,P(m,y)\,\&\,I(y,s)\,)$$

  - Ax 6. Il “partito ideale” è l’unico partito che difende gli interessi dell’intera società.

    $$I(i,s)\,\&\,\forall y\ (\,I(y,s) \to y=i\,)$$

  - Ax 7. Ogni partito che difende solo gli interessi del più potente di turno non è un partito che difende gli interessi dell’intera società.

    $$\forall y\ (\,\forall z\ (\,I(y,z) \to z=p\,) \to \neg I(y,s)\,)$$

  Derivare nella teoria indicata:

- 8. Carla è andata a votare.

$$\neg E(c)$$

si può derivare in $T^c_{vot}$ ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 1.}$}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 2.}$}
\AxiomC{$\neg\text{-ax}_{dx2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \neg E(c), E(c)$}
\AxiomC{$\neg\text{-ax}_{sx1}$}
\noLine
\UnaryInfC{$E(f), \neg E(f) \vdash E(c)$}
\RightLabel{$\rightarrow -\text{re}_c$}
\BinaryInfC{$\neg E(c) \rightarrow E(f), \neg E(f) \vdash E(c)$}
\RightLabel{$\text{sc}_{sx}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 1.}, \neg E(c) \rightarrow E(f) \vdash E(c)$}
\RightLabel{$\&-\text{re}_1$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 1.}, (\,\neg E(c) \rightarrow E(f)\,) \,\&\, (\,E(f) \rightarrow \neg E(c)\,) \vdash E(c)$}
\RightLabel{$\text{comp}_{sx}$}
\BinaryInfC{$\text{Ax 1.} \vdash E(c)$}
\RightLabel{$\text{comp}_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash E(c)$}
\end{prooftree}
$$

- 9. Qualcuno non è andato a votare

$$\exists x \; \neg E(x)$$

si può derivare in $T^i_{vot}$ ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 1.}$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg E(f) \vdash \neg E(f)$}
\RightLabel{$\exists -\text{re}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 1.} \vdash \exists x \; \neg E(x)$}
\RightLabel{$\text{comp}_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \exists x \; \neg E(x)$}
\end{prooftree}
$$

- 10. Marco è andato a votare

$$E(m)$$

si può derivare in $T^i_{vot}$ ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 4.}$}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 3.}$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$E(m) \vdash E(m)$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$V(m) \vdash V(m)$}
\RightLabel{$\rightarrow -\text{re}$}
\BinaryInfC{$V(m), V(m) \rightarrow E(m) \vdash E(m)$}
\RightLabel{$\forall -\text{re}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 4.}, \forall x \; (\,V(x) \rightarrow E(x)\,) \vdash E(m)$}
\RightLabel{$\text{comp}_{sx}$}
\BinaryInfC{$\text{Ax 4.} \vdash E(m)$}
\RightLabel{$\text{comp}_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash E(m)$}
\end{prooftree}
$$

- 11. Marco ha votato il "partito ideale".

$$P(m, i)$$

si può derivare in $T^i_{vot}$ ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 5.}$}
\AxiomC{$\vdash \text{Ax 6.}$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$I(y, s) \vdash I(y, s)$}
\AxiomC{cp*}
\noLine
\UnaryInfC{$P(m, y), y = i \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\rightarrow -\text{re}$}
\BinaryInfC{$P(m, y), I(y, s) \rightarrow y = i, I(y, s) \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\text{sc}_{sx}$}
\UnaryInfC{$P(m, y), I(y, s), I(y, s) \rightarrow y = i \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\forall -\text{re}$}
\UnaryInfC{$P(m, y), I(y, s), \forall y \; (\,I(y, s) \rightarrow y = i\,) \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\&-\text{re}_2$}
\UnaryInfC{$P(m, y), I(y, s), I(i, s) \,\&\, \forall y \; (\,I(y, s) \rightarrow y = i\,) \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\text{sc}_{sx}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 6.}, P(m, y), I(y, s) \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\&-\text{S}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 6.}, P(m, y) \,\&\, I(y, s) \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\exists -\text{F}$}
\UnaryInfC{$\text{Ax 6.}, \exists y \; (\,P(m, y) \,\&\, I(y, s)\,) \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\text{comp}_{sx}$}
\BinaryInfC{$\text{Ax 5.} \vdash P(m, i)$}
\RightLabel{$\text{comp}_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash P(m, i)$}
\end{prooftree}
$$

ove l'applicazione di $\exists -$F è possibile perchè $x$ non è libera nel resto del sequente.

- 12. Il “partito ideale” non difende solo gli interessi del più potente di turno

$$\neg\forall z\ (\, I(i,z) \to z = p\,)$$

si può derivare in $T^{i}_{vot}$ ad esempio come segue: per semplificare usiamo l'abbreviazione

$$S(y)\ \equiv\ \forall z\ (\, I(y,z) \to z = p\,)$$

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax 7.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{S(i)\vdash S(i)} \qquad \overset{\neg\text{ -ax}_{sx1}}{I(i,s),\neg I(i,s)\vdash\bot}}{I(i,s), S(i)\to\neg I(i,s), S(i)\vdash\bot}\ \to\!-\text{re}}{S(i), I(i,s), S(i)\to\neg I(i,s)\vdash\bot}\ \text{sc}_{sx}}{S(i), I(i,s), \forall y\ (\, S(y)\to\neg I(y,s)\,)\vdash\bot}\ \forall\!-\text{re}}{\text{Ax 7.}, I(i,s), S(i)\vdash\bot}\ \text{sc}_{sx}}{\text{Ax 7.}, I(i,s)\vdash\neg S(i)}\ \neg\!-\text{F}}{\text{Ax 7.}, I(i,s)\,\&\,\forall y\ (\, I(y,s)\to y=i\,)\vdash\neg S(i)}\ \&\!-\text{re}_1}{\text{Ax 6.}\vdash\neg S(i)}\ \text{comp}_{sx}}{\vdash\neg S(i)}\ \text{comp}_{sx}$$

in quanto usando l'abbreviazione l'assioma Ax7. è divenuto

$$\forall y\ (\,\forall z\ (\, I(y,z)\to z=p\,)\to\neg I(y,s)\,)\ \equiv\ \forall y\ (\, S(y)\to\neg I(y,s)\,)$$

- - Dare la definizione induttiva dell'insieme delle derivazioni di $L^{\to,\bot}$ con connettivo $\to$ e il falso $\bot$ di LI. Enunciare il loro principio di induzione.

  L'insieme delle derivazioni di $L^{\to,\bot}$ è generato induttivamente come segue:

  - $\overset{\text{ax-id}}{A\vdash A}\ \in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$
  - $\overset{\text{ax-}\bot}{\bot\vdash\Gamma}\ \in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$
  - se $\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array}\ \in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$

    allora $\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array}}{\Gamma\vdash A\to B}\ \to\!-\text{F} \in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$.
  - se $\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma'\vdash A\end{array}\ \in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$ e $\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array}\ \in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$

    allora $\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma',\vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array}}{\Gamma, A\to B, \Gamma'\vdash C}\ \to\!-\text{re}\ \in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$

  Il principio di induzione sulle derivazioni di $L^{\to,\bot}$ è il seguente:
  Sia $P(\pi)$ proprietà su derivazione $\pi\in Der(\, L^{\to,\bot}\,)$.
  Se valgono le seguenti:

  - caso base: $P(\ \overset{\text{ax-id}}{A\vdash A}\ )$ vale

- caso base: $P\left(\begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \bot\vdash\Gamma\end{array}\right)$ vale

- caso induttivo: se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array}\right)$ vale

  allora $P\left(\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array}}{\Gamma\vdash A\to B}\to\text{-F}\right)$ vale.

- caso induttivo: se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma'\vdash A\end{array}\right)$ vale e se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array}\right)$ vale

  allora $P\left(\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma',\vdash A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array}}{\Gamma, A\to B, \Gamma'\vdash C}\to\text{-re}\right)$ vale.

allora $P(\pi)$ vale per ogni derivazione di $L^{\to,\bot}$.

- Dimostrare per induzione sulle derivazioni di $L^{\to,\bot}$ che
  "se $\Gamma\vdash\Delta$ è derivabile in $L^{\to,\bot}$ allora $\Gamma$ oppure $\Delta$ contiene almeno una formula"
  Consideriamo la proprietà su una derivazione $\pi$ di $L^{\to,\bot}$

  $P(\pi)\equiv$ la radice di $\pi$ ha premesse o conclusioni che contengono almeno una formula

  Ora proviamo per induzione che vale su ogni derivazione $\pi$ mostrando che vale sulle ipotesi induttive:

  - caso base: $P\left(\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A\vdash A\end{array}\right)$ vale perchè $A$ è sia premessa che conclusione.

  - caso base: $P\left(\begin{array}{c}\text{ax-}\bot\\ \bot\vdash\Gamma\end{array}\right)$ vale poichè le premesse contengono $\bot$.

  - caso induttivo: se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array}\right)$ vale

    allora $P\left(\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array}}{\Gamma\vdash A\to B}\to\text{-F}\right)$ vale perchè la conclusione è $A\to B$.

  - caso induttivo: se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma'\vdash A\end{array}\right)$ vale e se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array}\right)$ vale

    allora $P\left(\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma',\vdash A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array}}{\Gamma, A\to B, \Gamma'\vdash C}\to\text{-re}\right)$ vale perchè le premesse contengono $A\to B$.

- In $L^{\to,\bot}$ si può dimostrare che
  -

“se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $L^{\rightarrow,\perp}$ allora $\Gamma$ contiene almeno una formula”
?
No, perchè in presenza di $\rightarrow$-F si può derivare

$$\vdash A \rightarrow A$$

che non ha premesse.
“se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $L^{\rightarrow,\perp}$ allora $\Delta$ contiene almeno una formula”
?
No, perchè in presenza di ax-$\perp$ si può derivare

$$\perp \vdash$$

che non ha conclusione.

- L'equazione

$$\Gamma \vdash A \circ B \circ C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash A, B \qquad \text{e} \qquad \Gamma \vdash C$$

si risolve come segue.

L'equazione suggerisce la regola di $\circ$-formazione da dx a sx

$$\frac{\Gamma \vdash A, B \quad \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\text{−F}$$

e suggerisce due regole di $\circ$-riflessione implicita da sinistra a destra

$$\frac{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}{\Gamma \vdash A, B}\ \circ\text{−ri}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}{\Gamma \vdash C}\ \circ\text{−ri}_2$$

Chiamiamo $Lbr_\circ$ la logica ottenuta con assioma identità

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A\end{array}$$

e composizioni a destra e a sinistra

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash B}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash B}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

assieme alla regola di $\circ$-formazione e le regole di riflessione implicita.

Ora cerchiamo di ottenere una logica con regole belle che si semplificano dal basso verso l'alto. A tal fine banalizziamo le premesse delle riflessioni implicite ponendo $\Gamma \equiv A \circ B \circ C$ in entrambe e otteniamo quindi gli assiomi derivabili in $Lbr_\circ$ come segue:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \circ B \circ C \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{A \circ B \circ C \vdash A, B}\ \circ\text{−ri}_1 \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \circ B \circ C \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{A \circ B \circ C \vdash B}\ \circ\text{−ri}_2$$

Definiamo poi $Lax_\circ$ la logica ottenuta con assioma identità e composizioni a destra e a sinistra, la regola di formazione per $\circ$ e gli assiomi

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\circ_1\\ A \circ B \circ C \vdash A, B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\circ_2\\ A \circ B \circ C \vdash C\end{array}$$

Per costruzione vale chiaramente $Lax_\circ \subseteq Lbr_\circ$.

Ora cerchiamo delle regole belle componendo con gli assiomi come segue

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\circ\text{-ax}_1}{A \circ B \circ C \vdash A, B} \qquad A \vdash \Gamma}{A \circ B \circ C \vdash \Gamma, B}\ \text{comp}_{dx} \qquad B \vdash \Gamma'}{A \circ B \circ C \vdash \Gamma, \Gamma'}\ \text{comp}_{dx}$$

e

$$\dfrac{\overset{\circ\text{-ax}_2}{A \circ B \circ C \vdash C} \qquad C \vdash \Gamma}{A \circ B \circ C \vdash \Gamma}\ \text{comp}_{sx}$$

Ora prendiamo queste regole come riflessioni esplicite:

$$\dfrac{A \vdash \Gamma \quad B \vdash \Gamma'}{A \circ B \circ C \vdash \Gamma, \Gamma'}\ \circ\text{−re}_1 \qquad \dfrac{C \vdash \Gamma}{A \circ B \circ C \vdash \Gamma}\ \circ\text{−ri}_2$$

e definiamo la logica $Lbe_\circ$ ottenuta estendendo l'assioma identità e le composizioni a dx e a sx con le regole di riflessione esplicita sopra e la regola di formazione per $\circ$.

Per costruzione vale chiaramente $Lbe_\circ \subseteq Lax_\circ$ e per transitività anche $Lbe_\circ \subseteq Lbr_\circ$ ovvero la regole della logica bella $Lbe_\circ$ seguono dall'equazione definitoria tramite composizioni.

Ora mostriamo che le regole della logica bella $Lbe_\circ$ sono potenti tanto quanto $Lbr_\circ$ e quindi sono sufficienti a risolvere l'equazione definitoria tramite composizioni.

A tal fine mostriamo che $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$

$$\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{A \vdash A} \qquad \overset{\text{ax-id}}{B \vdash B}}{A \circ B \circ C \vdash A, B}\ \circ\text{−re}_1 \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{C \vdash C}}{A \circ B \circ C \vdash C}\ \circ\text{−re}_2$$

dicono che gli assiomi $\circ$-ax$_1$, $\circ$-ax$_2$ sono derivabili in $Lbe_{\&}$. Dunque $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$ vale.

Ora mostriamo che $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi \\ \vdots \\ \Gamma \vdash A \circ B \circ C\end{array} \qquad \overset{\circ\text{-ax}_1}{A \circ B \circ C \vdash A, B}}{\Gamma \vdash A, B}\ \text{comp}_{sx}$$

dice che la regola $\circ$−ri$_1$ è derivata in $Lax_\circ$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi \\ \vdots \\ \Gamma \vdash A \circ B \circ C\end{array} \qquad \overset{\circ\text{-ax}_2}{A \circ B \circ C \vdash C}}{\Gamma \vdash C}\ \text{comp}_{sx}$$

dice che la regola $\circ$−ri$_2$ è derivata in $Lax_\circ$. Dunque $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$.

Per transitività da $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$ e $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$ si conclude che $Lbr_\circ \subseteq Lbe_\circ$ e quindi le regole belle sono sufficienti per risolvere l'equazione definitoria in presenza di composizioni a destra e a sinistra.

Dal fatto che vale pure $Lbe_\circ \subseteq Lbr_\circ$ segue che le regole belle sono necessarie e sufficienti a risolvere l'equazione definitoria data tramite composizioni.

- L' equazione sopra è risolvibile in LC con composizioni a destra e a sinistra senza aggiunta di un nuovo connettivo ? (ovvero l'esercizio consiste nel dire se $A \circ B \circ C$ è definibile in LC con composizioni e in caso positivo occorre mostrare che la definizione considerata di $A \circ B \circ C$ soddisfa in LC con composizioni l'equazione sopra. (9 punti)

  Svolgimento: L'equazione sopra è risolvibile in LC con composizioni. A lezione è stato mostrato che in LC con composizioni vale

  $$\Gamma \vdash A, B \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash A \vee B$$

  da cui segue che

  $$\Gamma \vdash A, B \qquad \text{e} \qquad \Gamma \vdash C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash A \vee B \qquad \text{e} \qquad \Gamma \vdash C$$

  ma ricordando l'equazione definitoria della & che riflette la "e" a destra si ottiene che vale

  $$\Gamma \vdash A \vee B \quad \text{e} \qquad \Gamma \vdash C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash (A \vee B) \& C$$

  da cui mettendo insieme le due equazioni si conclude

  $$\Gamma \vdash A, B \quad \text{e} \quad \Gamma \vdash C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash (A \vee B) \& C$$

  ovvero si può definere $A \circ B \circ C \equiv (A \vee B) \& C$.