Correzione II Appello 17 luglio 2009

- Esercizio su derivabilità.

  1.
$$\vdash \neg\neg(\,(\,C \to C\,) \vee \neg C\,)$$

  è derivabile in LI e quindi in LC ad esempio come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{C \vdash C}}{\vdash C \to C}\ \to -\mathrm{F}}{\vdash (\,C \to C\,) \vee \neg C}\ \vee -\mathrm{re}_1}{\neg(\,(\,C \to C\,) \vee \neg C\,) \vdash \perp}\ \neg -\mathrm{re}}{\vdash \neg\neg(\,(\,C \to C\,) \vee \neg C\,)}\ \neg -\mathrm{F}$$

  2.
$$H\&(M \to \neg H) \vdash \neg M$$

  è derivabile in LI e quindi in LC ad esempio come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ M \vdash M\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ H, \neg H \vdash \perp\end{array}}{H, M \to \neg H, M \vdash \perp}\ \to -\mathrm{re}}{H, M \to \neg H \vdash \neg M}\ \neg -\mathrm{F}}{H\&(M \to \neg H) \vdash \neg M}\ \&-\mathrm{S}$$

  3.
$$\exists x(\,A(x)\ \vee\ B(x)\,) \vdash \exists x\, A(x)\ \vee\ \exists x\, B(x)$$

  è derivabile in LI e quindi in LC ad esempio come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A(x) \vdash A(x)}}{A(x) \vdash \exists x\, A(x)}\ \exists -\mathrm{re}}{A(x) \vdash \exists x\, A(x)\ \vee\ \exists x\, B(x)}\ \vee -\mathrm{re}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{B(x) \vdash B(x)}}{B(x) \vdash \exists x\, B(x)}\ \exists -\mathrm{re}}{A(x) \vdash \exists x\, A(x)\ \vee\ \exists x\, B(x)}\ \vee -\mathrm{re}_2}{A(x)\ \vee\ B(x) \vdash \exists x\, A(x)\ \vee\ \exists x\, B(x)}\ \vee -\mathrm{F}}{\exists x(\,A(x)\ \vee\ B(x)\,) \vdash \exists x\, A(x)\ \vee\ \exists x\, B(x)}\ \exists -\mathrm{F}$$

  ove l'applicazione di $\exists -$F è possibile perchè x non è libera nel resto del sequente.

  4.
$$\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\,x = y\,\&\,y = z\,)$$

  è derivabile in LI e quindi in LC come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash x = x\end{array} \qquad \begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash x = x\end{array}}{\vdash x = x\,\&\,x = x}\ \&-\mathrm{F}}{\vdash \exists z\ (\,x = x\,\&\,x = z\,)}\ \exists -\mathrm{re}}{\vdash \exists y\ \exists z\ (\,x = y\,\&\,y = z\,)}\ \exists -\mathrm{re}}{\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\,x = y\,\&\,y = z\,)}\ \exists -\mathrm{re}$$

  [Attenzione a non usare variabili vincolate con $\exists$-re:
  per esempio NON si può sostituire x con y nel primo passaggio

$$\frac{\vdash \exists y\ \exists z\ (\, y = y \,\&\, y = z\,)}{\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\, x = y \,\&\, y = z\,)}\ \exists\text{-re}\ \mathit{NOOO!!}$$

c'è cattura di variabile libera, vedi lezione]

5.

$$\vdash \forall x\ \forall y\ (\, x = y \,\&\, x \neq y\,)$$

NON è derivabile in LC e quindi nemmeno in LI.
Per dimostrarlo mostriamo che

$$\forall x\ \forall y\ (\, x = y \,\&\, x \neq y\,) \vdash \perp$$

è derivabile in LC come segue

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{x = x, x \neq x \vdash \perp}}{x = x \,\&\, x \neq x \vdash \perp}\ \&\text{-S}}{\forall y\ (\, x = y \,\&\, x \neq y\,) \vdash \perp}\ \forall\text{-re}}{\forall x\ \forall y\ (\, x = y \,\&\, x \neq y\,) \vdash \perp}\ \forall\text{-re}$$

ricordando che $x \neq x \ \equiv\ \neg x = x \ \equiv\ x = x \rightarrow \perp$
Chiamiamo π_1 tale derivazione.
Ora se esistesse una derivazione π_2 di $\vdash \forall x\ \forall y\ (\, x = y \,\&\, x \neq y\,)$ otterremmo che in LC è derivabile il falso, in quanto in LC con composizioni, equivalente a LC, si otterrebbe una derivazione del falso come segue

$$\cfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash \forall x\ \forall y\ (\, x = y \,\&\, x \neq y\,)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \forall x\ \forall y\ (\, x = y \,\&\, x \neq y\,) \vdash \perp\end{array}}{\vdash \perp}\ \text{comp}_{sx}$$

Ma sappiamo che LC è consistente ovvero non deriva il falso e dunque avendo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_2 si conclude che la derivazione π_2 NON esiste.

- L'esercizio di formalizzare in sequente alcune argomentazioni si svolge come segue:

1. L'argomentazione
   Chi dorme non produce.
   Chi non dorme è stanco.
   ―――――――――――――――
   O uno è stanco o non produce.
   ove si consiglia di usare:
   D(x)= x dorme
   S(x)=x è stanco
   P(x)= x produce

   si formalizza come segue:

$$\forall x\ (\, D(x) \rightarrow \neg P(x)\,)\,,\ \forall x\ (\, \neg D(x) \rightarrow S(x)\,) \vdash \forall x\ (\, S(x) \vee \neg P(x)\,)$$

   e si può derivare in LC, ad esempio come segue:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{D(x) \vdash D(x)} \qquad \overset{\text{ax-id}^*}{\neg P(x) \vdash S(x), \neg P(x)}}{D(x) \to \neg P(x), D(x) \vdash S(x), \neg P(x)}\; \to-\text{re}}{D(x) \to \neg P(x) \vdash \neg D(x), S(x), \neg P(x)}\; \neg-\text{F}}{\forall x\ (\, D(x) \to \neg P(x)\,) \vdash \neg D(x), S(x), \neg P(x)}\; \forall-\text{re} \qquad \overset{\text{ax-id}^*}{S(x) \vdash S(x), \neg P(x)}}{\neg D(x) \to S(x), \forall x\ (\, D(x) \to \neg P(x)\,) \vdash S(x), \neg P(x)}\; \to-\text{re}_c}{\forall x\ (\, D(x) \to \neg P(x)\,), \neg D(x) \to S(x) \vdash S(x), \neg P(x)}\; \text{sc}_{sx}}{\forall x\ (\, D(x) \to \neg P(x)\,), \forall x\ (\, \neg D(x) \to S(x)\,) \vdash S(x), \neg P(x)}\; \forall-\text{re}}{\forall x\ (\, D(x) \to \neg P(x)\,), \forall x\ (\, \neg D(x) \to S(x)\,) \vdash S(x) \vee \neg P(x)}\; \vee-\text{D}}{\forall x\ (\, D(x) \to \neg P(x)\,), \forall x\ (\, \neg D(x) \to S(x)\,) \vdash \forall x (\, S(x) \vee \neg P(x)\,)}\; \forall-\text{F}
$$

Ma il sequente sopra NON è derivabile in LI. Per mostrarlo basta ricordare che per il teorema di sostituzione se esistesse una derivazione π di

$$\forall x\ (\, D(x) \to \neg P(x)\,)\,,\ \forall x\ (\, \neg D(x) \to S(x)\,) \vdash \forall x\ (\, S(x) \vee \neg P(x)\,)$$

allora esisterebbe una derivazione $\pi[D(x)/A, P(x)/\neg A, S(x)/\neg A]$ del sequente

$$\forall x\ (\, A \to \neg\neg A\,)\,,\ \forall x\ (\, \neg A \to \neg A\,) \vdash \forall x\ (\, \neg A \vee \neg\neg A\,)$$

ottenuta sostituendo in π la formula $D(x)$ con una COSTANTE PROPOSIZIONALE A che non dipende da x e sia $P(x)$ che $S(x)$ con $\neg A$.
Ora si noti che

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\neg\text{-ax}_{sx1}}{A, \neg A \vdash \bot}}{A \vdash \neg\neg A}\; \neg-\text{F}}{\vdash A \to \neg\neg A}\; \to-\text{F}}{\vdash \forall x\ (\, A \to \neg\neg A\,)}\; \forall-\text{F}
$$

è una derivazione, diciamo π_1 in LI, (visto che x non compare in A si può applicare senza problemi $\forall-$F).
Parimenti si ottiene una derivazione π_2 di

$$
\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg A \vdash \neg A}}{\vdash \neg A \to \neg A}\; \to-\text{F}}{\vdash \forall x\ \ (\neg A \to \neg A)}\; \forall-\text{F}
$$

Inoltre si ha pure la derivazione π_3

$$
\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\neg A \vee \neg\neg A \vdash \neg A \vee \neg\neg A}}{\forall x\ (\, \neg A \vee \neg\neg A\,) \vdash \neg A \vee \neg\neg A}\; \forall-\text{re}
$$

Allora componendo si otterrebbe una derivazione in LI con composizioni del tipo

$$
\dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots \\ \vdash \forall x\ (\, \neg A \to \neg A\,)\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots \\ \vdash \forall x\ (\, A \to \neg\neg A\,)\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi[D(x)/A,\, P(x)/\neg A,\, S(x)/\neg A]\\ \vdots \\ \forall x\ (\, A \to \neg\neg A\,), \forall x\ (\, \neg A \to \neg A) \vdash \forall x\ (\, \neg A \vee \neg\neg A\,)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_3\\ \vdots \\ \forall x\ (\, \neg A \vee \neg\neg A\,) \vdash \neg A \vee \neg\neg A\end{matrix}}{\forall x\ (\, A \to \neg\neg A\,), \forall x\ (\, \neg A \to \neg A) \vdash \neg A \vee \neg\neg A}\; \text{comp}_{dx}}{\forall x\ (\, \neg A \to \neg A\,) \vdash \neg A \vee \neg\neg A}\; \text{comp}_{sx}}{\vdash \neg A \vee \neg\neg A}\; \text{comp}_{sx}
$$

Ma ciò non è possibile perchè non esiste in LI una derivazione di $\vdash \neg A \vee \neg\neg A$ (e quindi neppure in LI con composizioni in quanto equivalente) poichè per il principio di disgiunzione ci sarebbe una derivazione di $\vdash \neg A$ o di $\vdash \neg\neg A$. Ma nè $\vdash \neg A$ e nè $\vdash \neg\neg A$ sono derivabili in LI perchè non lo sono neppure in LC. Infatti le loro tabelle di verità danno valore 0 nel primo caso con $A = 1$ e nel secondo con $A = 0$.

Dunque il sequente iniziale non è derivabile in LI, in quanto dall'assunzione della sua derivabilità siamo giunti ad una contraddizione.

2. L'argomentazione

$$\frac{\text{Se uno è mite e gentile allora è amabile.}}{\text{Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.}}$$

ove si consiglia di usare:
M(x)=x è mite
G(x)=x è gentile
A(x)=x è amabile
si formalizza come segue:

$$\forall x\ (\ M(x)\&G(x) \to A(x)\ ) \vdash \forall x\ (\ \neg G(x) \to \neg A(x)\&\neg M(x)\ )$$

e NON è derivabile in LC e quindi neppure in LI, poichè se esistesse una sua derivazione, diciamo π, in LC, per il teorema di sostituzione allora esisterebbe una derivazione $\pi[M(x)/P, G(x)/Q, A(x)/S]$

$$\forall x\ (\ P\&Q \to S\ ) \vdash \forall x\ (\ \neg Q \to \neg S\&\neg P\ )$$

ottenuta sostituendo in π le formule $M(x), G(x), A(x)$ rispettivamente con COSTANTI PROPOSIZIONALI P, Q, S che non dipendono da x.

Ora si noti che

$$\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{P\&Q \to S \vdash P\&Q \to S}}{P\&Q \to S \vdash \forall x\ (\ P\&Q \to S\ )}\ \forall\text{−F}$$

è una derivazione, diciamo π_1 in LI, (visto che x non compare in A si può applicare senza problemi $\forall$−F).

Parimenti si ottiene una derivazione π_2 di

$$\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{\neg Q \to \neg S\&\neg P \vdash \neg Q \to \neg S\&\neg P}}{\forall x\ (\ \neg Q \to \neg S\&\neg P\ ) \vdash \neg Q \to \neg S\&\neg P}\ \forall\text{−re}$$

Allora componendo si otterrebbe una derivazione in LC con composizioni del tipo

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash \forall x\ (\ P\&Q \to S\ )\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi[M(x)/P, G(x)/Q, A(x)/S]\\ \vdots\\ \forall x\ (\ P\&Q \to S\ ) \vdash \forall x\ (\ \neg Q \to \neg S\&\neg P\ )\end{matrix}}{P\&Q \to S \vdash \forall x\ (\ \neg Q \to \neg S\&\neg P\ )}\ \text{comp}_{sx} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\\ \forall x\ (\ \neg Q \to \neg S\&\neg P\ ) \vdash \neg Q \to \neg S\&\neg P\end{matrix}}{P\&Q \to S \vdash \neg Q \to \neg S\&\neg P}\ \text{comp}$$

Ma in realtà il sequente

$$P\&Q \to S \vdash \neg Q \to \neg S\&\neg P$$

NON è derivabile in LC. Infatti ispezionando le tabelle di verità delle formule coinvolte, se si pongono i valori $P = 1$, $Q = 0$ ed $S = 1$ allora $P\&Q \to S$ risulta di valore 1 mentre $\neg Q \to \neg S\&\neg P$ di valore 0 e dunque

$$\neg(\ P\&Q \to S\ )\ \vee\ (\ \neg Q \to \neg S\&\neg P\ )$$

assume valore 0.
Dunque il sequente iniziale NON è derivabile in LC in quanto dall'assunzione della sua derivabilità siamo giunti ad una contraddizione.

- L'esercizio di formalizzare la seguente argomentazione in sequente e derivare quest'ultimo in LI:

  Franco è venuto ad una sola riunione.
  Franco è venuto all'ultima riunione.
  Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.
  ———————————————————
  L'ultima riunione è quella del 10 giugno.

  ove si consiglia di usare:
  V(x,y)= x è venuto alla riunione y
  u=ultima riunione
  d=riunione del 10 giugno
  f=Franco

  si può svolgere come segue:
  una sua formalizzazione risulta essere

$$\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\ V(f,y_1)\&V(f,y_2) \to y_1 = y_2\ )\ ,\ V(f,u),\ V(f,d) \vdash u = d$$

  che è derivabile in LI ad esempio come segue:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}^*}{V(f,u),V(f,d)\vdash V(f,u)} \qquad \overset{\text{ax-id}^*}{V(f,u),V(f,d)\vdash V(f,d)}}{V(f,u),V(f,d)\vdash V(f,u)\&V(f,d)}\ \&-\text{F} \qquad \overset{\text{ax-id}}{u=d\vdash u=d}}{V(f,u)\&V(f,d)\to u=d, V(f,u), V(f,d)\vdash u=d}\ \to-\text{re}}{V(f,u),V(f,d),V(f,u)\&V(f,d)\to u=d\vdash u=d}\ \text{sc}_{sx}}{V(f,u),V(f,d),\forall y_2\ (\ V(f,u)\&V(f,y_2)\to u=y_2\ )\vdash u=d}\ \forall-\text{re}}{V(f,u),V(f,d),\forall y_1\ \forall y_2\ (\ V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\ )\vdash u=d}\ \forall-\text{re}}{V(f,u),V(f,d),\exists y\ V(f,y)\ \&\forall y_1\ \forall y_2\ (\ V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\ )\vdash u=d}\ \&-\text{re}_2}{\exists y\ V(f,y)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\ V(f,y_1)\&V(f,y_2)\to y_1=y_2\ )\ ,\ V(f,u),\ V(f,d)\vdash u=d}\ \text{sc}_{sx}$$

- L'esercizio di derivazione in aritmetica di Heyting HA= LI + comp_{sx} + comp_{dx} si può svolgere come segue:

  - 8. $\vdash \forall x\ (\ s(x) = s(5) \to x = 5\ )$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\cfrac{\vdash \text{Ax 2.} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{ax-id}}{s(x)=s(5)\to x=5 \vdash s(x)=s(5)\to x=5}}{\forall y\ (\ s(x)=s(y)\to x=y\ )\vdash s(x)=s(5)\to x=5}\ \forall-\text{re}}{\forall x\ \forall y\ (\ s(x)=s(y)\to x=y\ )\vdash s(x)=s(5)\to x=5}\ \forall-\text{re}}{\text{Ax 2.}\vdash \forall x\ (\ s(x)=s(2)\to x=5\ )}\ \forall-\text{F}}{\vdash \forall x\ (\ s(x)=s(5)\to x=5\ )}\ \text{comp}_{sx}$$

    l'applicazione di $\forall-$F è possibile perchè x non compare libera nella premessa.

  - 9. $\vdash 0 = 4 \cdot 0$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\cfrac{\vdash \text{Ax 5.} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{\text{sym}^*}{4\cdot 0=0\vdash 0=4\cdot 0}}{\forall x\ (\ x\cdot 0=0\ )\vdash 0=4\cdot 0}\ \forall-\text{re}}{\text{Ax 5.}\vdash 0=4\cdot 0}\ \text{sy}-\text{r}}{\vdash 0=4\cdot 0}\ \text{comp}_{sx}$$

- 10. $\vdash \forall x\ (x = 7 \rightarrow s(x) = s(7))$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{cf}^*}{x = 7 \vdash s(x) = s(7)}}{\vdash x = 7 \rightarrow s(x) = s(7)}\ \rightarrow\text{-F}}{\vdash \forall x\ (x = 7 \rightarrow s(x) = s(7))}\ \forall\text{-F}$$

l'applicazione di $\forall$–F è possibile perchè x non compare libera nella premessa.

- 11. $\vdash 5 + 1 = 6$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash s(5 + 0) = s(5)\end{array}}{\vdash 5 + 1 = 6}\ \text{tr} - \text{r}$$

ricordando che $6 \equiv s(5)$, ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{5 + 1 = s(5 + 0) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}}{\forall y\ (5 + s(y) = s(5 + y)) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}\ \forall\text{-re}}{\forall x\, \forall y\ (x + s(y) = s(x + y)) \vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}\ \forall\text{-re}}{\vdash 5 + 1 = s(5 + 0)}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 3.} \quad \dfrac{\dfrac{\text{cf}^*}{5 + 0 = 5 \vdash s(5 + 0) = s(5)}}{\forall x\ (x + 0 = x) \vdash s(5 + 0) = s(5)}\ \forall\text{-re}}{\vdash s(5 + 0) = s(5)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 12. $\vdash 5 \cdot 1 = 5$ si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash 5 \cdot 0 + 5 = 5\end{array}}{\vdash 5 \cdot 1 = 5}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5 \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}}{\forall y\ (5 \cdot s(y) = 5 \cdot y + 5) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}\ \forall\text{-re}}{\forall x\, \forall y\ (x \cdot s(y) = x \cdot y + x) \vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}\ \forall\text{-re}}{\vdash 5 \cdot 1 = 5 \cdot 0 + 5}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $1 \equiv s(0)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash 5 \cdot 0 + 5 = 0 + 5\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_4\\ \vdots\\ \vdash 0 + 5 = 5\end{array}}{\vdash 5 \cdot 0 + 5 = 5}\ \text{tr} - \text{r}$$

ove π_3 è la derivazione seguente:

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax } 5. \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{sym}^*}{5\cdot 0 = 0 \vdash 0 = 5\cdot 0} \qquad \dfrac{\dfrac{=\text{-ax}}{\vdash 0+5 = 0+5}}{0 = 5\cdot 0 \vdash 5\cdot 0 + 5 = 0+5}\; = -\mathrm{F}}{5\cdot 0 = 0 \vdash 5\cdot 0+5 = 0+5}\;\text{comp}_{sx}}{\forall x\,(\,x\cdot 0 = 0\,) \vdash 5\cdot 0 + 5 = 0+5}\;\forall-\text{re}}{\vdash 5\cdot 0 + 5 = 0 + 5}\;\text{comp}_{sx}
$$

mentre π_4 è la derivazione seguente:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ \vdots\\ \vdash \forall x\; 0+x = x\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_6\\ \vdots\\ \forall x\,(\,0+x = x\,) \vdash 0+5 = 5\end{array}}{\vdash 0+5 = 5}\;\text{tr} - \text{r}
$$

ove π_6 è la derivazione seguente:

$$
\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{0+5 = 5 \vdash 0+5 = 5}}{\forall x\,(\,0+x = x\,) \vdash 0+5 = 5}\;\forall-\mathrm{F}
$$

mentre π_5 è la seguente derivazione ottenuta usando l'assioma di induzione:

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax } 7_{A(x)\,\equiv\, 0+x=x} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_7\\ \vdots\\ \vdash 0+0 = 0\ \&\ \forall x\,(\,0+x = x \to 0+s(x) = s(x)\,)\end{array} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{\forall x\,(\,0+x = x\,) \vdash \forall x\,(\,0+x = x\,)}}{\text{Ax } 7._{A(x)\,\equiv\, 0+x=x} \vdash \forall x\,(\,0+x = x\,)}\;\to -\text{re}}{\vdash \forall x\,(\,0+x = x\,)}\;\text{comp}_{sx}
$$

ove posto

$$
\text{Ax } 7._{A(x)\,\equiv\, 0+x=x} \;\equiv\; 0+0 = 0\ \&\ \forall x\,(\,0+x = x \to 0+s(x) = s(x)\,) \to \forall x\,(\,0+x = x\,)
$$

poi π_7 è costruito come segue:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\pi_8\\ \vdots\\ \vdash 0+0 = 0\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_9\\ \vdots\\ \vdash \forall x\,(\,0+x = x \to 0+s(x) = s(x)\,)\end{array}}{\vdash 0+0 = 0\ \&\ \forall x\,(\,0+x = x \to 0+s(x) = s(x)\,)}\;\&-\mathrm{F}
$$

ove π_8 è la seguente derivazione

$$
\dfrac{\vdash \text{Ax } 3. \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{0+0 = 0 \vdash 0+0 = 0}}{\text{Ax } 3. \vdash 0+0 = 0}\;\text{sy} - \text{r}}{\vdash 0+0 = 0}\;\text{comp}_{sx}
$$

mentre π_9 è la seguente derivazione

$$
\dfrac{
\dfrac{
\vdash \text{Ax } 4. \qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\text{ax-id}}{0+s(x)=s(0+x) \vdash 0+s(x)=s(0+x)}
}{\forall y\ (\,0+s(y)=s(0+y)\,) \vdash 0+s(x)=s(0+x)}\ \forall-\text{re}
}{\text{Ax } 4. \vdash 0+s(x)=s(0+x)}\ \forall-\text{re}
}{\vdash 0+s(x)=s(0+x)}\ \text{comp}_{sx}
\qquad
\dfrac{\text{cf}^*}{0+x=x \vdash s(0+x)=s(x)}
}{
\dfrac{
\dfrac{0+x=x \vdash 0+s(x)=s(x)}{\vdash 0+x=x \to 0+s(x)=s(x)}\ \to-\text{F}
}{\vdash \forall x\ (\,0+x=x \to 0+s(x)=s(x)\,)}\ \forall-\text{F}
}\ \text{tr}-\text{r}
$$

ove l'applicazione di $\forall-$F è possibile perchè x non compare libera nella premessa.

- Siano T^i_{tre} e T^c_{tre} le teoria ottenute rispettivamente estendendo LI e LC con composizioni dx e sx con la formalizzazione dei seguenti assiomi indicata a fianco ove si consiglia di usare:
  $T(x,y)$= x è persona nello scompartimento y del treno
  $P(x)$= x ha pagato il biglietto
  p=primo scompartimento
  s=secondo scompartimento
  g=Giuliano
  a=Angela
  c=il controllore del treno

  - Ax1. Angela è nel primo scompartimento

    $$T(a,p)$$

  - Ax2. Non si dà il caso che nel secondo scompartimento non ci sia nessuno.

    $$\neg\neg\exists x\ T(x,s)$$

  - Ax3. Nel primo scompartimento c'e' il controllore del treno.

    $$T(c,p)$$

  - Ax4. Il controllore del treno non ha pagato il biglietto.

    $$\neg P(c)$$

  - Ax5. Angela ha pagato il biglietto.

    $$P(a)$$

  - Ax6. Giuliano non è (uguale ad) Angela.

    $$g \neq a$$

  - Ax7. Giuliano é nel primo scompartimento del treno.

    $$T(g,p)$$

  - Ax8. Nel primo scompartimento ci sono soltanto Giuliano e Angela.

    $$(\,T(g,p) \& T(a,p)\,)\ \&\ \forall y\ (\,T(y,p) \to y=g \vee y=a\,)$$

- 9. Non si dà il caso che nessuno sia nel primo scompartimento. (in T^i_{tre})

$$\neg\neg\exists x\ T(x,p)$$

si può derivare in T^i_{tre} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{T(a,p) \vdash T(a,p)}}{T(a,p) \vdash \exists x\ T(x,p)}\ \exists\text{-re}}{\neg\exists x\ T(x,p), T(a,p) \vdash \bot}\ \neg\text{-re}}{T(a,p), \neg\exists x\ T(x,p) \vdash \bot}\ \text{sc}_{sx}}{\text{Ax 1.} \vdash \neg\neg\exists x\ T(x,p)}\ \neg\text{-F}}{\vdash \neg\neg\exists x\ T(x,p)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 10. Nel secondo scompartimento c'e' qualcuno. (in T^c_{tre})

$$\exists x\ T(x,s)$$

si può derivare in T^c_{tre} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 2.} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{dx2}}{\vdash \neg\exists x\ T(x,s), \exists x\ T(x,s)}}{\text{Ax 2.} \vdash \exists x\ T(x,s)}\ \neg\text{-S}}{\vdash \exists x\ T(x,s)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 11. Angela non è (uguale al) controllore del treno. (in T^i_{tre})

$$a \neq c$$

si può derivare in T^i_{tre} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax 5.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{cp}^*}{P(a), a = c \vdash P(c)}}{\neg P(c), P(a), a = c \vdash \bot}\ \neg\text{-re}}{\neg P(c), P(a) \vdash a \neq c}\ \neg\text{-F}}{\text{Ax 4.} \vdash a \neq c}\ \text{comp}_{sx}}{\vdash a \neq c}\ \text{comp}_{sx}$$

- 12. Se Angela fosse (uguale al) controllore del treno allora sarebbe l'unica persona nel primo scompartimento. (in T^i_{tre})

$$a = c \rightarrow T(a,p)\ \&\ \forall y\ (\,T(y,p) \rightarrow y = a\,)$$

si può derivare in T^i_{tre} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash 11. \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{sx2}}{a \neq c, a = c \vdash T(a,p)\ \&\ \forall y\ (\,T(y,p) \rightarrow y = a\,)}}{11. \vdash a = c \rightarrow T(a,p)\ \&\ \forall y\ (\,T(y,p) \rightarrow y = a\,)}\ \rightarrow\text{-F}}{\vdash a = c \rightarrow T(a,p)\ \&\ \forall y\ (\,T(y,p) \rightarrow y = a\,)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 13. Giuliano è il controllore del treno. (in T^i_{tre})

$$g = c$$

si può derivare in T^{i}_{tre} ad esempio come segue:

$$
\dfrac{\vdash 8. \qquad \dfrac{\vdash 11. \qquad \dfrac{\vdash 3. \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ T(c,p)\vdash T(c,p)\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{sym}^*\\ a\neq c, c=g\vdash g=c\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}=\text{-ax}\\ \vdash c=c\end{array}}{c\neq c\vdash g=c}\;\neg-\text{re}}{a\neq c, c=a\vdash g=c}\;=-\text{F}}{a\neq c, c=g\vee c=a\vdash g=c}\;\vee-\text{F}}{a\neq c, T(c,p)\rightarrow c=g\vee c=a, T(c,p)\vdash g=c}\;\rightarrow-\text{re}}{3., 11., T(c,p)\rightarrow c=g\vee c=a\vdash g=c}\;\text{sc}_{sx}}{3., 11., \forall y\;(T(y,p)\rightarrow y=g\vee y=a)\vdash g=c}\;\forall-\text{re}}{3., 11., 8., \vdash g=c}\;\&-\text{re}_2}{11., 8.\vdash g=c}\;\text{comp}_{sx}}{8.\vdash g=c}\;\text{comp}_{sx}}{\vdash g=c}\;\text{comp}_{sx}
$$

- Dare la definizione induttiva dell'insieme delle derivazioni di $L^{\forall}$ con connettivo $\forall$ di LI. Enunciare il loro principio di induzione.
  L'insieme delle derivazioni di $L^{\forall}$ è generato induttivamente come segue:

  - $\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A\end{array} \in Der(L^{\forall})$

  - se $\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A(x)\end{array} \in Der(L^{\forall})$ e $x \notin VL(\Gamma)$

    $$\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\end{array}$$

    allora $\dfrac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \forall\text{-F}\ (x \notin VL(\Gamma)) \in Der(L^{\forall})$.

  - se $\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array} \in Der(L^{\forall})$

    $$\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\end{array}$$

    allora $\dfrac{\Gamma, A(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash C}\ \forall\text{-re} \in Der(L^{\forall})$

  Il principio di induzione sulle derivazioni di $L^{\forall}$ è il seguente:
  Sia $P(\pi)$ proprietà su derivazione $\pi \in Der(L^{\forall})$.
  Se valgono le seguenti:

  - caso base: $P(\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A\end{array})$ vale

  - caso induttivo: se $P(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A(x)\end{array})$ vale e $x \notin VL(\Gamma)$

    allora $P(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \dfrac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \forall\text{-F}\ (x \notin VL(\Gamma))\end{array})$ vale.

- caso induttivo: se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array}\right)$ vale

allora $P\left(\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \dfrac{\Gamma, A(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash C}\ \forall\text{−re}\end{array}\right)$ vale

allora $P(\pi)$ vale per ogni derivazione di $L^\forall$.

- Dimostrare per induzione sulle derivazioni di $L^\forall$ che
"se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $L^\forall$ allora sia Γ che Δ contengono almeno una formula"
Consideriamo la proprietà su una derivazione π di $L^\forall$

$P(\pi) \equiv$ la radice di π ha sia premesse che conclusioni che contengono almeno una formula

Ora proviamo per induzione che vale su ogni derivazione π mostrando che vale sulle ipotesi induttive:

  - caso base: $P\left(\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A\end{array}\right)$ vale perchè A è sia premessa che conclusione.

  - caso induttivo: se $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A(x)\end{array}\right)$ vale e $x \notin VL(\Gamma)$

    allora $P\left(\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \dfrac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \forall\text{−F}\ (x \notin VL(\Gamma))\end{array}\right)$ vale perchè la conclusione ha la formula quantificata e la premessa contiene per ipotesi induttiva una formula.

  - caso induttivo: se $P\left(\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array}\right)$ vale

    allora $P\left(\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \dfrac{\Gamma, A(t) \vdash C}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash C}\ \forall\text{−re}\end{array}\right)$ vale perchè sia le premesse che le conclusioni contengono almeno una formula.

- L'equazione

$$\Gamma \vdash A \circ B \circ C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma, A, B \vdash C$$

si risolve come segue.
L'equazione suggerisce la regola di $\circ$-formazione da dx a sx

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\text{−F}$$

e suggerisce una regola di $\circ$-riflessione implicita da sinistra a destra

$$\frac{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}{\Gamma, A, B \vdash C}\ \circ\text{−ri}$$

Chiamiamo $Lbr_\circ$ la logica ottenuta con assioma identità

$$\frac{\text{ax-id}}{A \vdash A}$$

e composizioni a destra e a sinistra

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash B}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash B}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

assieme alla regola di $\circ$-formazione e le regole di riflessione implicita.

Ora cerchiamo di ottenere una logica con regole belle che si semplificano dal basso verso l'alto. A tal fine banalizziamo le premesse della riflessione implicita ponendo $\Gamma \equiv A \circ B \circ C$ ~~in entrambe e~~ otteniamo quindi gli assiomi derivabili in $Lbr_\circ$ come segue:

$$\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{A \circ B \circ C \vdash A \circ B \circ C}}{A \circ B \circ C, A, B \vdash C}\ \circ\text{-ri}$$

Definiamo poi $Lax_\circ$ la logica ottenuta con assioma identità e composizioni a destra e a sinistra, la regola di formazione per $\circ$ e l'assioma

$$\frac{\text{ax-}\circ}{A \circ B \circ C, A, B \vdash C}$$

Per costruzione vale chiaramente $Lax_\circ \subseteq Lbr_\circ$.

Ora cerchiamo delle regole belle componendo con l'assioma come segue

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\circ\text{-ax}}{A \circ B \circ C, A, B \vdash C} \quad A \vdash \Gamma}{A \circ B \circ C, \Gamma, B \vdash C}\ \text{comp}_{dx} \quad B \vdash \Gamma'}{A \circ B \circ C, \Gamma, \Gamma' \vdash C}\ \text{comp}_{dx} \quad \Gamma''', C \vdash D}{\Gamma''', A \circ B \circ C, \Gamma, \Gamma', \vdash D}\ \text{comp}_{sx}$$

e ora prendiamo questa regola come riflessione esplicita:

$$\frac{A \vdash \Gamma \quad B \vdash \Gamma' \quad \Gamma''', C \vdash D}{\Gamma", A \circ B \circ C, \Gamma, \Gamma' \vdash D}\ \circ\text{-re}$$

e definiamo la logica $Lbe_\circ$ ottenuta estendendo l'assioma identità e le composizioni a dx e a sx con la regola di riflessione esplicita sopra e la regola di formazione per $\circ$.

Per costruzione vale chiaramente $Lbe_\circ \subseteq Lax_\circ$ e per transitività anche $Lbe_\circ \subseteq Lbr_\circ$ ovvero la regole della logica bella $Lbe_\circ$ seguono dall'equazione definitoria tramite composizioni.

Ora mostriamo che le regole della logica bella $Lbe_\circ$ sono potenti tanto quanto $Lbr_\circ$ e quindi sono sufficienti a risolvere l'equazione definitoria tramite composizioni.

A tal fine mostriamo che $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$

$$\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{A \vdash A} \quad \cfrac{\text{ax-id}}{B \vdash B} \quad \cfrac{\text{ax-id}}{C \vdash C}}{A \circ B \circ C, A, B \vdash C}\ \circ\text{-re}$$

dice che l'assioma $\circ$-ax, è derivabile in $Lbe_{\&}$. Dunque $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$ vale.

Ora mostriamo che $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A \circ B \circ C\end{array} \qquad \dfrac{}{A \circ B \circ C, A, B \vdash C}\,\text{o-ax}}{\Gamma, A, B \vdash C}\,\text{comp}_{sx}$$

dice che la regola o−ri è derivata in $Lax_\circ$.

Per transitività da $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$ e $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$ si conclude che $Lbr_\circ \subseteq Lbe_\circ$ e quindi le regole belle sono sufficienti per risolvere l'equazione definitoria in presenza di composizioni a destra e a sinistra.

Dal fatto che vale pure $Lbe_\circ \subseteq Lbr_\circ$ segue che le regole belle sono necessarie e sufficienti a risolvere l'equazione definitoria data tramite composizioni.

- L' equazione sopra è risolvibile in LI con composizioni a destra e a sinistra senza aggiungere un nuovo connettivo? è risolvibile in LC con composizioni a destra e a sinistra senza aggiunta di un nuovo connettivo ? (ovvero l'esercizio consiste nel dire se $A \circ B \circ C$ è definibile in LI con composizioni e in caso positivo occorre mostrare che la definizione considerata di $A \circ B \circ C$ soddisfa in LI con composizioni l'equazione sopra; lo stesso dicasi per LC).

  Svolgimento: L'equazione sopra è risolvibile in LI con composizioni, e quindi pure in LC.

  A lezione è stato mostrato che in LI con composizioni vale

  $$\Gamma, A, B \vdash C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma, A\&B \vdash C$$

  Poi, usando l'equazione definitoria della $\rightarrow$ si ottiene che vale

  $$\Gamma, A\&B \vdash C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash A\&B \rightarrow C$$

  da cui mettendo insieme le due equazioni si conclude

  $$\Gamma, A, B \vdash C \qquad \text{sse} \qquad \Gamma \vdash (A\&B) \rightarrow C$$

  ovvero si può definere $A \circ B \circ C \equiv A\&B \rightarrow C$.

  Dato che le regole di LI sono regole derivate in LC allora $A \circ B \circ C$ è definibile in LC come in LI.