Correzione IV Appello settembre 2009

- Mostrare se i sequenti di seguito sono derivabili o meno in LI e LC:

1.
$$\vdash \neg(\,A\vee B\,)\rightarrow(\neg A\vee\,\perp)\&\neg A$$

   è derivabile in LI e quindi in LC ad esempio come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A\vdash A}}{A\vdash A\vee B}\;\vee-\mathrm{re}_1}{\neg(\,A\vee B\,),A\vdash\perp}\;\neg-\mathrm{re}}{\neg(\,A\vee B\,)\vdash\neg A}\;\neg-\mathrm{F}}{\neg(\,A\vee B\,)\vdash\neg A\vee\perp}\;\vee-\mathrm{re}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{B\vdash B}}{B\vdash A\vee B}\;\vee-\mathrm{re}_2}{\neg(\,A\vee B\,),B\vdash\perp}\;\neg-\mathrm{re}}{\neg(\,A\vee B\,)\vdash\neg B}\;\neg-\mathrm{F}}{\dfrac{\neg(\,A\vee B\,)\vdash(\neg A\vee\,\perp)\&\neg A}{\vdash\neg(\,A\vee B\,)\rightarrow(\neg A\vee\,\perp)\&\neg A}\;\rightarrow-\mathrm{F}}\;\&-\mathrm{F}$$

2.
$$\vdash A\vee\neg B\rightarrow\neg A\vee B$$

   non è derivabile in LC, e neppure in LI.
   Per provarlo, basta vedere che nella tabella di verità di

$$A\vee\neg B\rightarrow\neg A\vee B$$

   se si dà valore 1 ad A e valore 0 a B allora $A\vee\neg B$ risulta 1, mentre $\neg A\vee B$ è 0 e quindi $A\vee\neg B\rightarrow\neg A\vee B$ risulta di valore 0.

3.
$$\exists x\,(\,C(x)\&\neg C(x)\,)\vdash\forall x\,C(x)$$

   è derivabile in LI e quindi in LC ad esempio come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\text{ -ax}_{sx1}}{C(x),\neg C(x)\vdash\forall x\,C(x)}}{C(x)\&\neg C(x)\vdash\forall x\,C(x)}\;\&-\mathrm{S}}{\exists x\,(\,C(x)\&\neg C(x)\,)\vdash\forall x\,C(x)}\;\exists-\mathrm{F}$$

   ove l'applicazione di $\exists-$F è possibile perchè x non è libera nel resto del sequente.

4.
$$\vdash\forall y\;\forall z\;\exists x\;(\,x=y\rightarrow y=z\,)$$

   è derivabile in LI e quindi in LC per esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{sm}^*}{z=y\vdash y=z}}{\vdash z=y\rightarrow y=z}\;\rightarrow-\mathrm{F}}{\vdash\exists x\;(\,x=y\rightarrow y=z)}\;\exists-\mathrm{re}}{\vdash\forall z\;\exists x\;(\,x=y\rightarrow y=z)}\;\forall-\mathrm{F}}{\vdash\forall y\;\forall z\;\exists x\;(\,x=y\rightarrow y=z)}\;\forall-\mathrm{F}$$

   ove le applicazioni di $\forall-$F sono possibile perchè x ed y non sono libere nel resto del sequente.

5. Il sequente

$$\vdash \forall y \forall x\,(\,x = y \rightarrow \perp\ \vee \neg x = y\,)$$

NON è derivabile in LC e quindi nemmeno in LI.
Per dimostrarlo mostriamo che

$$\forall y \forall x\,(\,x = y \rightarrow \perp\ \vee \neg x = y\,) \vdash \perp$$

è derivabile in LC come segue

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash y = y\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{id-ax}\\ \perp \vdash \perp\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}= \text{-ax}\\ \vdash y = y\end{array}}{\neg y = y \vdash \perp}\ \neg-\text{re}}{\perp\ \vee \neg y = y \vdash \perp}\ \vee-\text{F}}{y = y \rightarrow \perp\ \vee \neg y = y \vdash \perp}\ \rightarrow-\text{re}}{\forall x\,(\,x = y \rightarrow \perp\ \vee \neg x = y\,) \vdash \perp}\ \forall-\text{re}}{\forall y \forall x\,(\,x = y \rightarrow \perp\ \vee \neg x = y\,) \vdash \perp}\ \forall-\text{re}$$

Chiamiamo π_1 tale derivazione.
Ora se esistesse una derivazione π_2 di $\vdash \forall y \forall x\,(\,x = y \rightarrow \perp\ \vee \neg x = y\,)$ otterremmo che in LC è derivabile il falso, in quanto in LC con composizioni, equivalente a LC, si otterrebbe una derivazione del falso come segue

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash \forall y \forall x\,(\,x = y \rightarrow \perp\ \vee \neg x = y\,)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \forall y \forall x\,(\,x = y \rightarrow \perp\ \vee \neg x = y\,) \vdash \perp\end{array}}{\vdash \perp}\ \text{comp}_{sx}$$

Ma sappiamo che LC è consistente, ovvero non deriva il falso, e dunque avendo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_2 si conclude che la derivazione π_2 NON esiste.

- L'esercizio di formalizzare in sequente alcune argomentazioni si svolge come segue:

1. L'argomentazione

$$\dfrac{\text{Giorgio non condivide quello che dice Piero.}}{\text{Piero non dice quello che Giorgio condivide.}}$$

ove si consiglia di usare:
C(x,y)=x condivide y
D(x,y)=x dice y
Piero=p
Giorgio=g

si formalizza come segue:

$$\forall y\,(\,D(p, y) \rightarrow \neg C(g, y)\,) \vdash \forall y\,(\,C(g, y) \rightarrow \neg D(p, y)\,)$$

è derivabile in LI e quindi in LC ad esempio come segue

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{D(p,y)\vdash D(p,y)}\,\text{ax-id}\qquad \dfrac{}{C(g,y),\neg C(g,y)\vdash\bot}\,\neg\text{-ax}_{sx1}}{C(g,y),D(p,y)\to\neg C(g,y),D(p,y)\vdash\bot}\,\to-\text{re}}{C(g,y),D(p,y),D(p,y)\to\neg C(g,y)\vdash\bot}\,\text{sc}_{sx}}{C(g,y),D(p,y),\forall y\,(\,D(p,y)\to\neg C(g,y)\,)\vdash\bot}\,\forall-\text{re}}{\forall y\,(\,D(p,y)\to\neg C(g,y)\,),C(g,y),D(p,y)\vdash\bot}\,\text{sc}_{sx}}{\forall y\,(\,D(p,y)\to\neg C(g,y)\,),C(g,y)\vdash\neg D(p,y)}\,\neg-\text{F}}{\forall y\,(\,D(p,y)\to\neg C(g,y)\,)\vdash C(g,y)\to\neg D(p,y)}\,\to-\text{F}}{\forall y\,(\,D(p,y)\to\neg C(g,y)\,)\vdash\forall y\,(\,C(g,y)\to\neg D(p,y)\,)}\,\forall-\text{F}}{}
$$

ove l'applicazione di $\forall-$F è possibile perchè x non è libera nel resto del sequente.

2. L'argomentazione

$$\dfrac{\text{Chi non mangia non sta in piedi.}}{\text{Chi sta in piedi mangia.}}$$

ove si consiglia di usare:
M(x)= x mangia
S(x)=x sta in piedi

si formalizza come segue:

$$\forall x\,(\,\neg M(x)\to\neg S(x)\,)\vdash\forall x\,(\,S(x)\to M(x)\,)$$

è derivabile in LC ad esempio come segue

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash\neg M(x),M(x)}\,\neg\text{-ax}_{dx2}\qquad\dfrac{}{S(x),\neg S(x)\vdash M(x)}\,\neg\text{-ax}_{sx1}}{S(x),\neg M(x)\to\neg S(x)\vdash M(x)}\,\to-\text{re}_c}{\neg M(x)\to\neg S(x),S(x)\vdash M(x)}\,\text{sc}_{sx}}{\neg M(x)\to\neg S(x)\vdash S(x)\to M(x)}\,\to-\text{F}}{\forall x\,(\,\neg M(x)\to\neg S(x)\,)\vdash S(x)\to M(x)}\,\forall-\text{re}}{\forall x\,(\,\neg M(x)\to\neg S(x)\,)\vdash\forall x\,(\,S(x)\to M(x)\,)}\,\forall-\text{F}
$$

ove l'applicazione di $\forall-$F è possibile perchè x non è libera nel resto del sequente.
Ma il sequente sopra NON è derivabile in LI. Per mostrarlo basta ricordare che per il teorema di sostituzione se esistesse una derivazione π di

$$\forall x\,(\,\neg M(x)\to\neg S(x)\,)\vdash\forall x\,(\,S(x)\to M(x)\,)$$

allora esisterebbe una derivazione $\pi[M(x)/K,S(x)/\neg\neg K]$ del sequente

$$\forall x\;(\,\neg K\to\neg\neg\neg K\,)\vdash\forall x\,(\,\neg\neg K\to K\,)$$

ottenuta sostituendo in π la formula $M(x)$ con una COSTANTE PROPOSIZIONALE K che non dipende da x e $S(x)$ con $\neg\neg K$ che pure non dipende da x.
Ora si noti che

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg K,\neg\neg K\vdash\bot}\,\neg\text{-ax}_{sx1}}{\neg K\vdash\neg\neg\neg K}\,\neg-\text{F}}{\vdash\neg K\to\neg\neg\neg K}\,\to-\text{F}}{\vdash\forall x\;\;(\,\neg K\to\neg\neg\neg K\,)}\,\forall-\text{F}
$$

è una derivazione, diciamo π_1 in LI, (visto che x non compare in K si può applicare senza problemi $\forall-$F).
Inoltre, pure

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{\neg\neg K \rightarrow K \vdash \neg\neg K \rightarrow K}}{\forall x\ (\neg\neg K \rightarrow K\ ) \vdash \neg\neg K \rightarrow K}\ \forall-\text{re}$$

è una derivazione, diciamo π_2 in LI.
Allora componendo si otterrebbe una derivazione in LI con composizioni del tipo

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash \forall x\ (\neg K \rightarrow \neg\neg\neg K\ )\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi[M(x)/K, S(x)/\neg\neg K]\\ \vdots\\ \forall x\ (\neg K \rightarrow \neg\neg\neg K\ ) \vdash \forall x\ (\neg\neg K \vdash K\ )\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\\ \forall x\ (\neg\neg K \vdash K\ ) \vdash \neg\neg K \vdash K\end{matrix}}{\forall x\ (\neg K \rightarrow \neg\neg\neg K\ ) \vdash \neg\neg K \rightarrow K}\ \text{comp}_{sx}}{\vdash \neg\neg K \rightarrow K}\ \text{comp}_{sx}$$

Ma ciò non è possibile perchè non esiste in LI con composizioni (essendo equivalente a LI) una derivazione della legge della doppia negazione ovvero di $\vdash \neg\neg K \rightarrow K$. Dunque il sequente iniziale non è derivabile in LI, in quanto dall'assunzione della sua derivabilità siamo giunti ad una contraddizione.

- L'esercizio di formalizzare la seguente argomentazione in sequente e derivare quest'ultimo in LI:

  Esiste solo uno in lista d'attesa.
  In lista d'attesa c'e' la sorella di Aldo.
  In lista d'attesa c'e' Carla.
  ―――――――――――――――――――
  Carla è la sorella di Aldo.

  ove si consiglia di usare:
  L(x)= in lista d'attesa c'è x
  a=la sorella di Aldo
  c=Carla

  si può svolgere come segue:
  una sua formalizzazione risulta essere

$$\exists x\, L(x)\,\&\,\forall y\,\forall z\,(\,L(y)\,\&\,L(z) \rightarrow y = z\,), L(a), L(c) \vdash a = c$$

  che è derivabile in LI ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}^*}{L(a), L(c) \vdash L(a)} \qquad \dfrac{\text{ax-id}^*}{L(a), L(c) \vdash L(c)}}{L(a), L(c) \vdash L(a)\,\&\,L(c)}\ \&-\text{F} \qquad \dfrac{\text{ax-id}}{a = c \vdash a = c}}{L(a)\,\&\,L(c) \rightarrow a = c, L(a), L(c) \vdash a = c}\ \rightarrow-\text{re}}{L(a), L(c), L(a)\,\&\,L(c) \rightarrow a = c \vdash a = c}\ \text{sc}_{sx}}{L(a), L(c),\ \forall z\,(\,L(a)\,\&\,L(z) \rightarrow a = z\,) \vdash a = c}\ \forall-\text{re}}{L(a), L(c), \forall y\,\forall z\,(\,L(y)\,\&\,L(z) \rightarrow y = z\,) \vdash a = c}\ \forall-\text{re}}{L(a), L(c), \exists x\, L(x)\,\&\,\forall y\,\forall z\,(\,L(y)\,\&\,L(z) \rightarrow y = z\,) \vdash a = c}\ \&-\text{re}_2}{\exists x\, L(x)\,\&\,\forall y\,\forall z\,(\,L(y)\,\&\,L(z) \rightarrow y = z\,), L(a), L(c) \vdash a = c}\ \text{sc}_{sx}$$

- Nell'aritmetica di Heyting HA= LI + comp_{sx} + comp_{dx} si mostra che:

  - 8. $\vdash \exists y\ \forall x\ \ x+y=x$
    si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\overset{\text{Ax 3.}}{\vdash \forall x\ \ x+0=x}}{\vdash \exists y\ \forall x\ \ x+y=x}\ \exists\text{−re}$$

  - 9. $\vdash 2\cdot 0=3$ NON è derivabile perchè in HA è derivabile

$$2\cdot 0=3\vdash\bot$$

Chiamiamo π una sua derivazione (vedi sotto).
Ora se esistesse una derivazione π_0 di $\vdash 2\cdot 0=3$ in HA otterremmo che in HA è derivabile il falso ad esempio come segue

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_0\\ \vdots\\ \vdash 2\cdot 0=3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi\\ \vdots\\ 2\cdot 0=3\vdash\bot\end{matrix}}{\vdash\bot}\ \text{comp}_{sx}$$

Ma sappiamo che HA è consistente, ovvero non deriva il falso, e dunque avendo trovato una contraddizione dalla supposta esistenza di π_0 si conclude che la derivazione π_0 NON esiste.
Infine mostriamo una derivazione di

$$2\cdot 0=3\vdash\bot$$

che possiamo scegliere come la derivazione π menzionata sopra. Essa è la seguente

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\\ 2\cdot 0=3\vdash 3=0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\\ 3=0\vdash\bot\end{matrix}}{2\cdot 0=3\vdash\bot}\ \text{comp}_{sx}$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 1.} \qquad \dfrac{\overset{\neg\ \text{-ax}_{sx1}}{3=0, s(2)\neq 0\vdash\bot}}{3=0,\forall x\, s(x)\neq 0\vdash\bot}\ \forall\text{−re}}{3=0\vdash\bot}\ \text{comp}_{sx}$$

ricordando che $3\ \equiv\ s(2)$ e π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\overset{\text{sm}^*}{2\cdot 0=3\vdash 3=2\cdot 0} \qquad \dfrac{\vdash \text{Ax5.} \qquad \dfrac{\overset{\text{ax-id}}{2\cdot 0=0\vdash 2\cdot 0=0}}{\forall x\ x\cdot 0=0\vdash 2\cdot 0=0}\ \forall\text{−re}}{\vdash 2\cdot 0=0}\ \text{comp}_{sx}}{2\cdot 0=3\vdash 3=0}\ \text{tr}-\text{r}$$

  - 10. $\vdash \exists x\ \ (\ s(x)=s(7)\rightarrow 7=x\ )$
    si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{rf}^*}{7=7\vdash s(7)=s(7)}}{\vdash 7=7\to s(7)=s(7)}\ \to\!-\text{F}}{\vdash \exists x\ (\ s(x)=s(7)\to 7=x\ )}\ \exists\!-\text{re}$$

- 11. $\vdash 2+4=s(s(2+2))$
  si può derivare ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash 2+4=s(2+3)\end{array}\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash s(2+3)=s(s(2+2))\end{array}}{\vdash 2+4=s(s(2+2))}\ \text{tr}-\text{r}$$

  ove π_1 è la derivazione seguente:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.}\quad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{2+4=s(2+3)\vdash 2+4=s(2+3)}}{\forall y\ 2+s(y)=s(2+y)\vdash 2+4=s(2+3)}\ \forall\!-\text{re}}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y)\vdash 2+4=s(2+3)}\ \forall\!-\text{re}}{\vdash 2+4=s(2+3)}\ \text{comp}_{sx}$$

  ricordando che $4\ \equiv\ s(3)$, mentre π_2 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.}\quad \dfrac{\dfrac{\overset{\text{cf}^*}{2+3=s(2+2)\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}}{\forall y\ 2+s(y)=s(2+y)\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \forall\!-\text{re}}{\forall x\ \forall y\ x+s(y)=s(x+y)\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \forall\!-\text{re}}{\vdash s(2+3)=s(s(2+2))}\ \text{comp}_{sx}$$

- Siano T^i_{an} e T^c_{an} le teoria ottenute rispettivamente estendendo LI e LC con composizioni dx e sx con la formalizzazione dei seguenti assiomi ove si consiglia di usare:
  $P(x,y)$= x piace ad y
  $C(x)$= x è un cavallo
  $G(x)$= x è un gatto
  $A(x)$= x è un animale
  $B(x)$=x è di Berto
  g=Gino
  f=Furia
  j=Jerry

  - Ax1. Un animale di Berto piace a Gino.

$$\exists x\ (\ A(x)\,\&\,(\ B(x)\,\&\,P(x,g)\ )\ )$$

  - Ax2. Gli animali di Berto sono Furia e Jerry.

$$\forall x\ (\ A(x)\,\&\,B(x)\ \to x=f\vee x=j\ )\,\&\,(\ (\ A(f)\&B(f)\ )\,\&\,(\ A(j)\&B(j)\ )$$

  - Ax3. Furia è un cavallo e i cavalli sono animali.

$$C(f)\,\&\,\forall x\,(\ C(x)\to A(x)\ )$$

- Ax4. Jerry è un gatto e i gatti sono animali.

$$G(j)\,\&\,\forall x\,(\,G(x)\rightarrow A(x)\,)$$

- Ax5. Non c'è cavallo che piaccia a Gino.

$$\neg\exists x\ (\,C(x)\,\&\,P(x,g)\,)$$

- Ax6. A non tutti piace Jerry.

$$\neg\forall y\,P(j,y)$$

Derivare:

- 7. A Gino piace Furia o Jerry.

$$P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$$

si può derivare in T^{i}_{an} ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{Ax\ 1.}$}
\AxiomC{$\vdash \mathrm{Ax\ 2.}$}
\AxiomC{π_1}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A(x),B(x)\vdash A(x)\,\&\,B(x)$}
\AxiomC{π_2}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash P(x,g),x=f\vee x=j\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$\rightarrow-$re}
\BinaryInfC{$P(x,g),A(x)\,\&\,B(x)\ \rightarrow x=f\vee x=j,A(x),B(x)\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{sc$_{sx}$}
\UnaryInfC{$A(x)\,,\,B(x)\,,\,P(x,g),A(x)\,\&\,B(x)\ \rightarrow x=f\vee x=j\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$\forall-$re}
\UnaryInfC{$A(x)\,,\,B(x)\,,\,P(x,g),\forall x\ (\,A(x)\,\&\,B(x)\ \rightarrow x=f\vee x=j\,)\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$\&-$re$_1$}
\UnaryInfC{$A(x)\,,\,B(x)\,,\,P(x,g),\mathrm{Ax\ 2.}\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{sc$_{sx}$}
\UnaryInfC{$\mathrm{Ax\ 2.},A(x)\,,\,B(x)\,,\,P(x,g)\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$\&-$S}
\UnaryInfC{$\mathrm{Ax\ 2.},A(x)\,,B(x)\,\&\,P(x,g)\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$\&-$S}
\UnaryInfC{$\mathrm{Ax\ 2.},A(x)\,\&\,(\,B(x)\,\&\,P(x,g)\,)\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$\exists-$F}
\UnaryInfC{$\mathrm{Ax\ 2.},\exists x\ (\,A(x)\,\&\,(\,B(x)\,\&\,P(x,g)\,)\,)\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\mathrm{Ax\ 1.}\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\end{prooftree}
$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id*}
\noLine
\UnaryInfC{$A(x),B(x)\vdash A(x)$}
\AxiomC{ax-id*}
\noLine
\UnaryInfC{$A(x),B(x)\vdash\vdash B(x)$}
\RightLabel{$\&-$F}
\BinaryInfC{$A(x),B(x)\vdash A(x)\,\&\,B(x)$}
\end{prooftree}
$$

e π_2 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$P(x,g)\vdash P(x,g)$}
\RightLabel{$\vee-$re$_1$}
\UnaryInfC{$P(x,g)\vdash P(x,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$=-$F}
\UnaryInfC{$P(x,g),x=f\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$P(x,g)\vdash P(x,g)$}
\RightLabel{$\vee-$re$_2$}
\UnaryInfC{$P(x,g)\vdash P(f,g)\ \vee\ P(x,g)$}
\RightLabel{$=-$F}
\UnaryInfC{$P(x,g),x=j\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\RightLabel{$\vee-$F}
\BinaryInfC{$P(x,g),x=f\vee x=j\vdash P(f,g)\ \vee\ P(j,g)$}
\end{prooftree}
$$

- 8. Furia e Jerry sono animali.

$$A(f)\,\&\,A(j)$$

si può derivare in T^{i}_{an} ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{π_1}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A(f)$}
\AxiomC{π_2}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A(j)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash A(f)\,\&\,A(j)$}
\end{prooftree}
$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 3.}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$C(f)\vdash C(f)$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(f)\vdash A(f)$}
\RightLabel{$\rightarrow-$re}
\BinaryInfC{$C(f)\rightarrow A(f), C(f)\vdash A(f)$}
\RightLabel{sc$_{sx}$}
\UnaryInfC{$C(f), C(f)\rightarrow A(f)\vdash A(f)$}
\RightLabel{$\forall-$re}
\UnaryInfC{$C(f), \forall x\,(\,C(x)\rightarrow A(x)\,)\vdash A(f)$}
\RightLabel{$\&-$S}
\UnaryInfC{$C(f)\,\&\,\forall x\,(\,C(x)\rightarrow A(x)\,)\vdash A(f)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash A(f)$}
\end{prooftree}
$$

e π_2 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 4.}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$G(j)\vdash G(j)$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$A(j)\vdash A(j)$}
\RightLabel{$\rightarrow-$re}
\BinaryInfC{$G(j)\rightarrow A(j), G(j)\vdash A(j)$}
\RightLabel{sc$_{sx}$}
\UnaryInfC{$G(j), G(j)\rightarrow A(j)\vdash A(j)$}
\RightLabel{$\forall-$re}
\UnaryInfC{$G(j), \forall x\,(\,G(x)\rightarrow A(x)\,)\vdash A(j)$}
\RightLabel{$\&-$S}
\UnaryInfC{$G(j)\,\&\,\forall x\,(\,G(x)\rightarrow A(x)\,)\vdash A(j)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash A(f)$}
\end{prooftree}
$$

- 9. A Gino non piace Furia e piace Jerry.

$$\neg P(f,g)\,\&\,P(j,g)$$

si può derivare in T^{i}_{an} ad esempio come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{π_3}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \neg P(f,g)$}
\AxiomC{π_4}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash P(j,g)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg P(f,g)\,\&\,P(j,g)$}
\end{prooftree}
$$

ove π_3 è la seguente derivazione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 5.}
\AxiomC{$\vdash$ Ax 3.}
\AxiomC{ax-id*}
\noLine
\UnaryInfC{$P(f,g), C(f)\vdash C(f)$}
\RightLabel{$\&-$re$_1$}
\UnaryInfC{$P(f,g), C(f)\,\&\,\forall x\,(\,C(x)\rightarrow A(x)\,)\vdash C(f)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$P(f,g)\vdash C(f)$}
\AxiomC{ax-id}
\noLine
\UnaryInfC{$P(f,g)\vdash P(f,g)$}
\RightLabel{$\&-$F}
\BinaryInfC{$P(f,g)\vdash C(f)\,\&\,P(f,g)$}
\RightLabel{$\exists-$re}
\UnaryInfC{$P(f,g)\vdash \exists x\ (\,C(x)\,\&\,P(x,g)$}
\RightLabel{$\neg-$re}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ (\,C(x)\,\&\,P(x,g)\,), P(f,g)\vdash\perp$}
\RightLabel{$\neg-$F}
\UnaryInfC{$\neg\exists x\ (\,C(x)\,\&\,P(x,g)\,)\vdash \neg P(f,g)$}
\RightLabel{comp$_{sx}$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg P(f,g)$}
\end{prooftree}
$$

e π_4 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_5\\ \vdots\\ \vdash P(f,g)\vee P(j,g)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\\ \vdash \neg P(f,g)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{ -ax}_{sx1}\\ P(f,g),\neg P(f,g)\vdash P(j,g)\end{array}}{P(f,g)\vdash P(j,g)}\ \text{comp}_{sx} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-id}\\ P(j,g)\vdash P(j,g)\end{array}}{P(f,g)\vee P(j,g)\vdash P(j,g)}\ \vee\text{−F}}{\vdash P(j,g)}\ \text{comp}_{sx}$$

ove π_3 è la derivazione precedente e π_5 è la derivazione di 7.

- 10. A Gino piace un gatto.

$$\exists x\,(\,G(x)\,\&\,P(x,g)\,)$$

si può derivare in T^i_{an} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_6\\ \vdots\\ \vdash \neg P(f,g)\,\&\,P(j,g)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_7\\ \vdots\\ P(j,g)\vdash G(j)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-id}\\ P(j,g)\vdash P(j,g)\end{array}}{P(j,g)\vdash G(j)\,\&\,P(j,g)}\ \&\text{−F}}{\neg P(f,g)\,\&\,P(j,g)\vdash G(j)\,\&\,P(j,g)}\ \&\text{−re}_2}{\neg P(f,g)\,\&\,P(j,g)\vdash \exists x\,(\,G(x)\,\&\,P(x,g)\,)}\ \exists\text{−re}}{\vdash \exists x\,(\,G(x)\,\&\,P(x,g)\,)}\ \text{comp}_{sx}$$

ove π_6 è la derivazione di .9 e π_7 è la seguente derivazione

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 4.} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\text{ax-id}^*\\ P(j,g),G(j)\vdash G(j)\end{array}}{P(j,g),G(j)\,\&\,\forall x\,(\,G(x)\rightarrow A(x)\,)\vdash G(j)}\ \&\text{−re}_1}{P(j,g)\vdash G(j)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 11. A qualcuno non piace Jerry.

$$\exists y\ \neg P(j,y)$$

si può derivare in T^c_{an} ad esempio come segue:

$$\dfrac{\vdash \text{Ax 6.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg\text{ -ax}_{dx2}\\ \vdash \neg P(j,y),P(j,y)\end{array}}{\vdash \exists y\ \neg P(j,y),P(j,y)}\ \exists\text{−re}}{\vdash P(j,y),\exists y\ \neg P(j,y)}\ \text{sc}_{dx}}{\vdash \forall y\,P(j,y),\exists y\ \neg P(j,y)}\ \forall\text{−F}}{\neg\forall y\,P(j,y)\vdash \exists y\ \neg P(j,y)}\ \neg\text{−F}}{\vdash \exists y\ \neg P(j,y)}\ \text{comp}_{sx}$$

- 12. Furia è diverso da Jerry.

$$f\neq j$$

si può derivare in T^i_{an} ad esempio come segue:

$$
\dfrac{
\begin{array}{c} \pi_6 \\ \vdots \\ \vdash \neg P(f,g)\,\&\,P(j,g) \end{array}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\text{-ax}_{sx2}}{\neg P(f,g)\,,\,P(f,g)\vdash\perp}}{\neg P(f,g)\,\&\,P(f,g)\vdash\perp}\,\&-\mathrm{S}}{\neg P(f,g)\,\&\,P(j,g), f=j\vdash\perp}\,=-\mathrm{F}}{\neg P(f,g)\,\&\,P(j,g)\vdash f\neq j}\,\neg-\mathrm{F}
}{\vdash f\neq j}\,\mathrm{comp}_{sx}
$$

ove π_6 è la derivazione di .9.

- Dare la definizione induttiva dell'insieme delle derivazioni di $L^{\rightarrow,\forall}$ con connettivo $\rightarrow,\forall$ di LI. Enunciare il loro principio di induzione.

  Soluzione: L'insieme delle derivazioni di $L^{\rightarrow,\forall}$ è generato induttivamente come segue:

  - $\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A\vdash A\end{array} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$

  - se $\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$

    allora $\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A\vdash B\end{array}}{\Gamma\vdash A\rightarrow B}\rightarrow-\mathrm{F} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$.

  - se $\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma'\vdash A\end{array} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$ e $\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$

    allora $\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma'\vdash A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B\vdash C\end{array}}{\Gamma, A\rightarrow B, \Gamma'\vdash C}\rightarrow-\mathrm{re} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$

  - se $\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma\vdash A(x)\end{array} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$

    con $x\notin VL(\Gamma)$

    allora $\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma\vdash A(x)\end{array}}{\Gamma\vdash\forall x\, A(x)}\forall-\mathrm{F}\ (x\notin VL(\Gamma)) \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$.

  - se $\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma, A(t)\vdash C\end{array} \in Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$

allora $\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array}}{\Gamma, \forall x\, A(x) \vdash C}\ \forall\!-\!\mathrm{re} \quad \in Der(\, L^{\rightarrow,\forall}\,)$

Il principio di induzione sulle derivazioni di $L^{\rightarrow,\forall}$ è il seguente:
Sia $P(\pi)$ proprietà su derivazione $\pi \in Der(\, L^{\rightarrow,\forall}\,)$.
Se valgono le seguenti:

- caso base: $P(\ \begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A\end{array}\ )$ vale

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A \vdash B\end{array}\ )$ vale

  allora $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ \rightarrow\!-\!\mathrm{F}\ )$ vale.

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma' \vdash A\end{array}\ )$ vale e se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, B \vdash C\end{array}\ )$ vale

  allora $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma', \vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B \vdash C\end{array}}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash C}\ \rightarrow\!-\!\mathrm{re}\ )$ vale.

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A(x)\end{array}\ )$ vale

  con $x \notin VL(\Gamma)$ allora

  $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A(x)\end{array}}{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}\ \forall\!-\!\mathrm{F}\ (x \notin VL(\Gamma))\ )$ vale.

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array}\ )$ vale

  allora $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array}}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash C}\ \forall\!-\!\mathrm{re}\ )$ vale.

allora $P(\,\pi\,)$ vale per ogni derivazione di $L^{\rightarrow,\forall}$.

- Dimostrare per induzione sulle derivazioni di $L^{\rightarrow,\forall}$ che
  "se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $L^{\rightarrow,\forall}$ allora Γ o Δ contiene almeno una formula"

Consideriamo la proprietà su una derivazione π di $L^{\rightarrow,\forall}$

$$P(\,\pi\,) \equiv \text{ la radice di } \pi \text{ ha premesse o conclusioni che contengono almeno una formula}$$

Ora proviamo per induzione che vale su ogni derivazione π mostrando che vale sulle ipotesi induttive:

- caso base: $P(\ \dfrac{\text{ax-id}}{A \vdash A}\ )$ vale perchè A è sia premessa che conclusione.

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A \vdash B\end{array}\ )$ vale

  allora $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ \rightarrow\!-\text{F}\ )$ vale perchè la conclusione è $A \rightarrow B$.

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma' \vdash A\end{array}\ )$ vale e se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, B \vdash C\end{array}\ )$ vale

  allora $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma', \vdash A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \Gamma, B \vdash C\end{array}}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash C}\ \rightarrow\!-\text{re}\ )$ vale perchè le premesse contengono $A \rightarrow B$.

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A(x)\end{array}\ )$ vale

  allora $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma \vdash A(x)\end{array}}{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}\ \forall\!-\text{F}\ (x \notin VL(\Gamma))\ )$ vale perchè c'e' $\forall x\, A(x)$ nella conclusione.

- caso induttivo: se $P(\ \begin{array}{c}\pi\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array}\ )$ vale

  allora $P(\ \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \Gamma, A(t) \vdash C\end{array}}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash C}\ \forall\!-\text{re}\ )$ vale perchè c'e' C nella conclusione.

Allora per il principio di induzione per le derivazioni in $Der(\,L^{\rightarrow,\forall}\,)$ la proprietà $P(\,\pi\,)$ vale per ogni derivazione di $L^{\rightarrow,\forall}$.

- La seguente equazione definitoria:

$$\Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma \qquad \text{sse} \qquad \Gamma, B \vdash \Sigma \qquad \text{e} \qquad \Gamma, C \vdash \Sigma \qquad \text{e} \qquad \Gamma, A \vdash \Sigma$$

suggerisce la regola di $\circ$-formazione da dx a sx

$$\dfrac{\Gamma, B \vdash \Sigma \quad \Gamma, C \vdash \Sigma \quad \Gamma, A \vdash \Sigma}{\Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma}\ \circ\!-\text{F}$$

e suggerisce tre regole di $\circ$-riflessione implicita da sinistra a destra

$$\frac{\Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma}{\Gamma, B \vdash \Sigma}\ \circ\!-\!\mathrm{ri}_1 \qquad \frac{\Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma}{\Gamma, C \vdash \Sigma}\ \circ\!-\!\mathrm{ri}_2 \qquad \frac{\Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma}{\Gamma, A \vdash \Sigma}\ \circ\!-\!\mathrm{ri}_3$$

Chiamiamo $Lbr_\circ$ la logica ottenuta con assioma identità

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \vdash A\end{array}$$

e composizioni a destra e a sinistra

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash B}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash B}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

assieme alla regola di $\circ$-formazione e le regole di riflessione implicita.

Ora cerchiamo di ottenere una logica con regole belle che si semplificano dal basso verso l'alto. A tal fine banalizziamo le conclusioni delle riflessioni implicite ponendo $\Sigma \equiv A \circ B \circ C$ senza Γ e otteniamo quindi gli assiomi derivabili in $Lbr_\circ$ come segue:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \circ B \circ C \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{B \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\mathrm{ri}_1 \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \circ B \circ C \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{C \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\mathrm{ri}_2 \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ A \circ B \circ C \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{A \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\mathrm{ri}_3$$

Definiamo poi $Lax_\circ$ la logica ottenuta con assioma identità e composizioni a destra e a sinistra, la regola di formazione per $\circ$ e gli assiomi

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\circ_1\\ B \vdash A \circ B \circ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\circ_2\\ C \vdash A \circ B \circ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\circ_3\\ A \vdash A \circ B \circ C\end{array}$$

Per costruzione vale chiaramente $Lax_\circ \subseteq Lbr_\circ$.

Ora cerchiamo delle regole belle componendo con gli assiomi come segue

$$\frac{\Gamma \vdash B \qquad \begin{array}{c}\circ\text{-ax}_1\\ B \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

$$\frac{\Gamma \vdash C \qquad \begin{array}{c}\circ\text{-ax}_2\\ C \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \begin{array}{c}\circ\text{-ax}_3\\ A \vdash A \circ B \circ C\end{array}}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \mathrm{comp}_{sx}$$

Ora prendiamo queste regole come riflessioni esplicite:

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\mathrm{re}_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\mathrm{re}_3$$

e definiamo la logica $Lbe_\circ$ ottenuta estendendo l'assioma identità e le composizioni a dx e a sx con le regole di riflessione esplicita sopra e la regola di formazione per $\circ$.

Per costruzione vale chiaramente $Lbe_\circ \subseteq Lax_\circ$ e per transitività anche $Lbe_\circ \subseteq Lbr_\circ$ ovvero la regole della logica bella $Lbe_\circ$ seguono dall'equazione definitoria tramite composizioni.

Ora mostriamo che le regole della logica bella $Lbe_\circ$ sono potenti tanto quanto $Lbr_\circ$ e quindi sono sufficienti a risolvere l'equazione definitoria tramite composizioni.

A tal fine mostriamo che $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{B \vdash B}}{B \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\text{re}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{C \vdash C}}{C \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\text{re}_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ax-id}}{A \vdash A}}{A \vdash A \circ B \circ C}\ \circ\!-\!\text{re}_3$$

dicono che gli assiomi $\circ$-ax$_1$, $\circ$-ax$_2$, $\circ$-ax$_3$ sono derivabili in $Lbe_{\&}$. Dunque $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$ vale.

Ora mostriamo che $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$

$$\dfrac{\overset{\circ\text{-ax}_1}{B \vdash A \circ B \circ C} \qquad \Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma}{\Gamma, B \vdash \Sigma}\ \text{comp}_{sx}$$

dice che la regola $\circ\!-\!\text{ri}_1$ è derivata in $Lax_\circ$.

$$\dfrac{\overset{\circ\text{-ax}_2}{C \vdash A \circ B \circ C} \qquad \Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma}{\Gamma, C \vdash \Sigma}\ \text{comp}_{sx}$$

dice che la regola $\circ\!-\!\text{ri}_2$ è derivata in $Lax_\circ$.

$$\dfrac{\overset{\circ\text{-ax}_3}{A \vdash A \circ B \circ C} \qquad \Gamma, A \circ B \circ C \vdash \Sigma}{\Gamma, A \vdash \Sigma}\ \text{comp}_{sx}$$

dice che la regola $\circ\!-\!\text{ri}_3$ è derivata in $Lax_\circ$.

Dunque $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$.

Per transitività da $Lbr_\circ \subseteq Lax_\circ$ e $Lax_\circ \subseteq Lbe_\circ$ si conclude che $Lbr_\circ \subseteq Lbe_\circ$ e quindi le regole belle sono sufficienti per risolvere l'equazione definitoria in presenza di composizioni a destra e a sinistra.

Dal fatto che vale pure $Lbe_\circ \subseteq Lbr_\circ$ segue che le regole belle sono necessarie e sufficienti a risolvere l'equazione definitoria data tramite composizioni.

- L' equazione sopra è risolvibile in LI con composizioni a destra e a sinistra senza aggiungere un nuovo connettivo? è risolvibile in LC con composizioni a destra e a sinistra senza aggiunta di un nuovo connettivo ? (ovvero l'esercizio consiste nel dire se $A \circ B \circ C$ è definibile in LI con composizioni e in caso positivo occorre mostrare che la definizione considerata di $A \circ B \circ C$ soddisfa in LI con composizioni l'equazione sopra; lo stesso dicasi per LC).

  Svolgimento: Utilizzando l'equazione definitoria della $\vee$ sia in LI con composizioni che in LC con composizioni vale

$$\Gamma, B \vdash \Sigma \qquad \text{e} \qquad \Gamma, C \vdash \Sigma \qquad \text{sse} \qquad \Gamma, B \vee C \vdash \Sigma$$

ed inoltre

$$\Gamma, B \vee C \vdash \Sigma \qquad \text{e} \qquad \Gamma, A \vdash \Sigma \qquad \text{sse} \qquad \Gamma, (B \vee C) \vee A \vdash \Sigma$$

da cui si conclude

$$\Gamma, B \vdash \Sigma \qquad \text{e} \qquad \Gamma, C \vdash \Sigma \qquad \text{e} \qquad \Gamma, A \vdash \Sigma \qquad \text{sse} \qquad \Gamma, (B \vee C) \vee A \vdash \Sigma$$

Quindi, ponendo

$$A \circ B \circ C \equiv (B \vee C) \vee A$$

si risolve l'equazione data sia in LI con composizioni che in LC con composizioni.