Calcoli dei sequenti per logica intuizionista e classica predicative con uguaglianza

Presentiamo qui un calcolo dei sequenti con uguaglianza sia per la logica intuizionista predicativa, che indichiamo con $\mathrm{LI}_{=}$ e uno per la logica classica predicativa, che indichiamo con $\mathrm{LC}_{=}$. Le variabili Γ, Δ, Σ indicano liste di formule. Le variabili A, B sono variabili di proposizioni arbitrarie (sia semplici che composte) cosi' come gli $A(x)$ stanno per una qualsiasi funzione proposizionale (o predicato) arbitrariamente composta.
Con $FV(\Delta)$ si intende le "free variables" ovvero variabili libere in Δ. Le variabili libere in Δ sono variabili che compaiono in Δ senza essere legate ad un quantificatore. Dire che $x \notin FV(\Delta)$ significa che x o non compare nelle formule di Δ o ci compare legata ad un quantificatore $\forall x$ oppure $\exists x$.

Calcolo dei sequenti $\mathbf{LI}_{=}$ per logica intuizionista predicativa con uguaglianza

$$A \vdash A \quad \text{id-ax} \qquad\qquad \bot, \Gamma \vdash \Delta \quad \bot\text{-ax}$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ \mathrm{sc}_{sx} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ \mathrm{sc}_{dx}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta}\ \mathrm{i}_{sx} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma}\ \mathrm{i}_{dx}$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta}\ \mathrm{c}_{sx} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma}\ \mathrm{c}_{dx}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A\&B, \Gamma \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}_1 \quad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A\&B, \Gamma \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S}_2 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\ \&\ \mathrm{F}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\ \vee\mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathrm{re}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta}\ \to\mathrm{re} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to F$$

$$\frac{A(t), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \vdash \Delta}\ \forall\mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)}\ \forall\mathrm{F}\ \mathrm{x} \notin FV(\Gamma)$$

$$\frac{A(x), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \vdash \Delta}\ \exists\mathrm{S}\ \mathrm{x} \notin FV(\Gamma, \Delta) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)}\ \exists\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t, t)}{t = s, \Gamma \vdash A(t, s)}\ =\mathrm{S} \qquad\qquad \Gamma \vdash t = t \quad = \mathrm{ax}$$

Calcolo dei sequenti della logica classica proposizionale $\mathrm{LC}_{=}$

$$A \vdash A \quad \text{id-ax} \qquad\qquad \bot, \Gamma \vdash \Delta \quad \bot\text{-ax}$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Pi, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi, \Sigma, \Gamma' \vdash \Delta}\ \mathrm{sc}_{sx} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Pi, \Sigma, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Pi, \Delta'}\ \mathrm{sc}_{dx}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta}\ \mathrm{i}_{sx} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma}\ \mathrm{i}_{dx}$$

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta}\ \mathrm{c}_{sx} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma}\ \mathrm{c}_{dx}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A\&B, \Gamma \vdash \Delta}\ \&\ \mathrm{S}_1 \quad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A\&B, \Gamma \vdash \Delta}\ \&\ \mathrm{S}_2 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&\ \mathrm{D}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}\ \vee\ \mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\ \mathrm{D}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\ \mathrm{D}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \to \mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to \mathrm{D}$$

$$\frac{A(t), \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \vdash \Delta}\ \forall \mathrm{S} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \forall \mathrm{D}\ \mathrm{x} \notin FV(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{A(x), \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \vdash \Delta}\ \exists \mathrm{S}\ \mathrm{x} \notin FV(\Gamma, \Delta) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta}\ \exists \mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t,t), \Delta}{t = s, \Gamma \vdash A(t,s), \Delta}\ = \mathrm{S} \qquad\qquad \Gamma \vdash t = t, \Delta \quad = \mathrm{ax}$$

Regole derivate sull'uguaglianza in $\mathrm{LI}_{=}$ e $\mathrm{LC}_{=}$ con composizioni

Chiamiamo $\mathrm{LI}^{c}_{=}$ la logica intuizionista con uguaglianza $\mathrm{LI}_{=}$ con l'aggiunta delle regole di composizione destra e sinistra:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Sigma \qquad A, \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

Analogamente, chiamiamo $\mathrm{LC}^{c}_{=}$ la logica intuizionista con uguaglianza $\mathrm{LC}_{=}$ con l'aggiunta delle regole di composizione destra e sinistra.
Allora in $\mathrm{LI}^{c}_{=}$ e in $\mathrm{LC}^{c}_{=}$ abbiamo le seguenti regole derivate sull'uguaglianza:

$$\Gamma, t = s \vdash s = t \quad \mathrm{sym} \qquad \Gamma, t = s, s = u \vdash t = u \quad \mathrm{tra}$$

$$\Gamma, t = s, A(t) \vdash A(s) \quad \mathrm{ep} \qquad \Gamma, t = s \vdash f(s) = f(t) \quad \mathrm{ef}$$

Equazione definitoria dell'uguaglianza di variabili

Si noti che l'equazione definitoria per l'uguaglianza con variabili $x = y$ è la seguente:

$$x = y \vdash \Delta(x, y) \qquad sse \qquad \vdash \Delta(x, x)$$

ove $\Delta(x, y) \equiv A_1(x, y), A_2(x, y), \ldots A_n(x, y)$ è una lista di predicati.
Tale equazione è risolvibile in presenza di assioma identità, regole di composizione destra e sinistra e regola di sostituzione di termini nelle variabili libere, ovvero

$$\frac{\Gamma(x) \vdash \Delta(x)}{\Gamma(t) \vdash \Delta(t)}\ \mathrm{so}$$

ove $\Delta(x) \equiv A_1(x), A_2(x), \ldots A_n(x)$ è una lista di predicati e $\Delta(t) \equiv A_1(t), A_2(t), \ldots A_n(t)$ è ottenuto sostituendo x con t nei predicati sopra.