Esercitazione 13/14 maggio 2009

- Aldo afferma: "La non violenza risolve ogni conflitto"
  Marco commenta:
  "Solo un folle può dire quello che hai detto"

  Marco pensa che Aldo è un folle?
  Motivare la risposta formalmente.

- Formalizzare le seguenti argomentazioni in sequente usando le lettere enunciative indicate.
  Mostrare poi se sono corretti o meno derivando il sequente trovato in LI_p o LC_p.
  In questo caso si specifichi la logica in cui si sta derivando.
  Se invece non li si ritiene corretti, motivare la risposta.

1. $$\frac{\text{Se si lavora si guadagna}}{\text{Se non si lavora non si guadagna}}$$

   usare:
   L="Si lavora",
   G="Si guadagna".

2. $$\frac{\text{Se e solo se si lavora si guadagna}}{\text{Se non si lavora non si guadagna}}$$

   usare:
   L="Si lavora",
   G="Si guadagna".

3. $$\frac{\text{Se si lavora allora si guadagna}}{\text{Se non si dà il caso che non si lavori allora si guadagna.}}$$

   usare:
   L="Si lavora",
   G="Si guadagna".

4. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo se abbiamo gas o benzina la nostra auto va}\\ \text{Mancano sia il gas che la benzina}\end{array}}{\text{La nostra auto non va}}$$

   usare:
   B="Abbiamo benzina
   G="Abbiamo gas"
   A="La nostra auto va"

5. $$\frac{\begin{array}{l}\text{Se la legge impedisce lo sciopero allora è ingiusta.}\\ \text{Se la legge non impedisce lo sciopero allora è inutile.}\\ \text{La legge o impedisce lo sciopero o non lo impedisce.}\end{array}}{\text{La legge è ingiusta o inutile}}$$

   usare:
   S="la legge impedisce lo sciopero"

G="la legge è ingiusta"
U="la legge è inutile"

- Derivare in LI_p in appendice i sequenti
  1. $\vdash A \vee (B\&C) \rightarrow (A \vee B)\&(A \vee C)$
  2. $\vdash A \leftrightarrow A \vee (D\&A)$
  3. $\vdash (A \rightarrow B\&C) \rightarrow (A \rightarrow B)\&(A \rightarrow C)$
  4. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
  5. $\vdash \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$
  6. $\neg\neg(A \vee \neg A)$
  7. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
  8. $\vdash \neg A\&\neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
  9. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A\&\neg B$
  10. $\vdash \neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$
  11. $\vdash \neg\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$
  12. $\vdash (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$
  13. $\vdash (A \vee \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$
- Derivare in LC_p in appendice i sequenti
  1. $\vdash D \vee (A \vee \neg A)$
  2. $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  3. $\vdash \neg(A\&B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$
  4. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
  5. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B$
  6. $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
- Formalizzare le seguenti argomentazioni ottenute modificando le precedenti, scriverne il sequente corrispondente e dire in che logica è corretto il sequente ottenuto.
  1. O la legge impedisce lo sciopero e quindi è ingiusta o non lo impedisce e quindi è inutile.
     ___
     La legge è ingiusta o inutile

     usare:
     S="la legge impedisce lo sciopero"
     G="la legge è ingiusta"
     U="la legge è inutile"

     In che logica è corretto il sequente ottenuto?

  2. Se la legge impedisce lo sciopero allora è ingiusta.
     Se la legge non impedisce lo sciopero allora è inutile.
     ___
     La legge è ingiusta o inutile

     usare:
     S="la legge impedisce lo sciopero"
     G="la legge è ingiusta"
     U="la legge è inutile"

In che logica è corretto il sequente ottenuto?

3. $\dfrac{\text{Non si dà il caso che io non ti ami}}{\text{Ti amo}}$

usare:
A="Ti amo"

In che logica è corretto il sequente ottenuto?

4. $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Solo se nevica non vado a sciare}\\ \text{Non nevica}\end{array}}{\text{Vado a sciare}}$

usare:
S="Vado a sciare"
N="Nevica"

In che logica è corretto il sequente ottenuto?

- Si dica se ciascuno dei sequenti sotto è derivabile in LI_p e in LC_P e in caso positivo mostrarne una derivazione. In caso negativo dare una prova della non derivabilità nella logica specificata. Inoltre nel caso il sequente non sia derivabile neppure in LC_p si suggerisce di convincersi anche tramite sillogismi di cui il sequente è la formalizzazione:

$$\vdash A\&\neg A \quad \left\{\begin{array}{ll} \text{si' in } \mathrm{LI}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in } \mathrm{LI}_p & \text{poichè ....} \\ \text{si' in } \mathrm{LC}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in } \mathrm{LC}_p & \text{poichè ....} \end{array}\right.$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \left\{\begin{array}{ll} \text{si' in } \mathrm{LI}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in } \mathrm{LI}_p & \text{poichè ....} \\ \text{si' in } \mathrm{LC}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in } \mathrm{LC}_p & \text{poichè ....} \end{array}\right.$$

$$\vdash (\neg\neg A \to A) \vee D \quad \begin{cases} \text{si' in LI}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LI}_p & \text{poichè ....} \\ \text{si' in LC}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC}_p & \text{poichè ....} \end{cases}$$

$$\vdash \neg\neg A \quad \begin{cases} \text{si' in LI}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LI}_p & \text{poichè ....} \\ \text{si' in LC}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC}_p & \text{poichè ....} \end{cases}$$

$$\vdash \neg A \quad \begin{cases} \text{si' in LI}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LI}_p & \text{poichè ....} \\ \text{si' in LC}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC}_p & \text{poichè ....} \end{cases}$$

$$\vdash A\&B \quad \begin{cases} \text{si' in LI}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LI}_p & \text{poichè ....} \\ \text{si' in LC}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC}_p & \text{poichè ....} \end{cases}$$

$$\vdash (A \to (A \to B)) \to A \quad \begin{cases} \text{si' in LI}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LI}_p & \text{poichè ....} \\ \text{si' in LC}_p & \text{poichè si deriva cosi' ....} \\ \text{no in LC}_p & \text{poichè ....} \end{cases}$$

- Risolvere la seguente equazione definitoria:

$$A \circ B \vdash \Gamma \qquad \text{sse} \qquad A \vdash \Gamma \;\text{ e } B \vdash \Gamma$$

  e dire se $\circ$ è definibile in LI_p o LC_p.

- Risolvere la seguente equazione definitoria:

$$A, B \vdash \Delta \qquad \text{sse} \qquad A \circ B \vdash \Delta$$

  e dire in LI_p o LC_p se $A \circ B$ è definibile e chi è.

Logica intuizionista proposizionale LI_p

$$\begin{array}{cc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\ A \vdash A & \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma'}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B}\ \&\text{--F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A\&B \vdash C}\ \&\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A\&B \vdash C}\ \&\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ \vee\text{--F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\text{--F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B, \Gamma' \vdash C}\ \to\text{re}$$

Logica classica proposizionale LC_p

$$\begin{array}{cc} \text{ax-id} & \text{ax-}\bot \\ A \vdash A & \bot \vdash \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma'}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \text{sc}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \text{sc}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash \nabla}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \nabla \quad \Gamma \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \& B, \nabla}\ \&-\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \nabla}{\Gamma, A \& B \vdash \nabla}\ \&\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \& B \vdash \nabla}\ \&\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \nabla \quad \Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \vee B \vdash \nabla}\ \vee-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \nabla}{\Gamma \vdash A \vee B, \nabla}\ \vee\mathrm{D}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \vee B, \nabla}\ \vee\mathrm{D}_2$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \nabla}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \nabla}\ \rightarrow -\mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A, \nabla \quad \Gamma, B \vdash \nabla}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \nabla}\ \rightarrow \mathrm{S}$$

Regole derivate per $\mathbf{LI}_p$ e $\mathbf{LC}_p$ per abbreviare derivazioni

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\bot^*\\ \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \Sigma\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg-\mathrm{F} \qquad \frac{\Gamma' \vdash A}{\Gamma, \neg A, \Gamma' \vdash \nabla}\ \neg\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C}\ \&\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C}\ \rightarrow \mathrm{re}^*$$

Strategia di derivazione

- Applica una regola di formazione (quella che segue da equazione definitoria del connettivo)
  motivo: le regole di formazione conservano la validità dal basso verso l'alto (oltrechè dall'alto verso il basso per definizione)
  e quindi non portano fuori strada nella ricerca della derivazione (se esiste!)
- Se non si può applicare una regola di formazione, procedere ad applicare le altre, dando preferenza alle regole derivate che abbreviano le derivazioni.