Esercitazione 5 giugno 2009

Di seguito usiamo le seguenti abbreviazioni:

$\mathrm{LC}^c \equiv \mathrm{LC} + \mathrm{comp}_{sx} + \mathrm{comp}_{dx}$
$\mathrm{LI}^c \equiv \mathrm{LI} + \mathrm{comp}_{sx} + \mathrm{comp}_{dx}$

1. Siano T^c_{nuo} e T^i_{nuo} le teorie ottenute rispettivamente estendendo LC^c ed LI^c con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Ax 1. Se Paolo va a fare una nuotata allora Carlo ci va.
   - Ax 2. Barbara va a fare una nuotata solo se ci va Paolo.
   - Ax 3. Se Mario va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.
   - Ax 4. Se qualcuno va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.
   - Ax 5. Se Carlo non va a fare una nuotata allora Barbara ci va.
   - Ax 6. Anna va a fare una nuotata.

   Suggerimento: usare N(x)= x va a fare una nuotata, p=Paolo, c=Carlo, m=Mario

   Dire se è possibile derivare in T^c_{nuo} e in T^i_{nuo} le seguenti frasi opportunamente formalizzate supposto che queste teorie siano consistenti:

   - 7. Paolo non va a fare una nuotata.
   - 8. Barbara non va a fare una nuotata.
   - 9. Carlo va a fare una nuotata.

2. Dire se è derivabile in LI o LC

$$\vdash \neg(A \& x \neq y) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow x = y)$$

3. Derivare in LI con composizioni dx e sx, ovvero LI^c i sequenti che seguono:

$$u = s, t \neq s, t = u \vdash \perp \qquad\qquad t = s, t = u \vdash s = u$$

$$t = s, t = u, t = z \vdash s = u \vee s = z$$

   Mostrare che le seguenti regole si derivano in LI con composizioni dx e sx (e quindi in LC con composizioni),

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash s = t}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma \vdash t = s \qquad \Gamma \vdash s = u}{\Gamma \vdash t = u}\ \text{tr-r}$$

4. Siano T^c_{libri} e T^i_{libri} le teorie ottenute rispettivamente estendendo LC^c ed LI^c con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

   - Ax 1. Giulio ama leggere solo romanzi classici o fumetti.
   - Ax 2. I romanzi classici sono acquistabili in ogni libreria.
   - Ax 3. Giulio ama leggere tutti i fumetti.
   - Ax 4. Giulio ama leggere Topolino.
   - Ax 5. Topolino non è un romanzo classico.
   - Ax 6. La Divina Commedia non è un romanzo classico e nemmeno un fumetto.
   - Ax 7. Cime Tempestose è un romanzo classico.

suggerimento: si consiglia di usare:
A(x,y)= x ama leggere y
F(x)= x è un fumetto
R(x)=x è un romanzo classico
Q(x,y)= x è acquistabile nella libreria y
g=Giulio, d= La Divina Commedia, t= topolino, c= Cime Tempestose, f=La Feltrinelli.

Dire se è possibile derivare in T^c_{libri} e in T^i_{libri} le seguenti frasi opportunamente formalizzate supposto che queste teorie siano consistenti:

- 8. Topolino è un fumetto.
- 9. Se ci fosse un fumetto che Giulio non ama leggere allora tutti amerebbero leggere Topolino.
- 10. Qualcuno ama leggere qualche fumetto.
- 11. Cime Tempestose è acquistabile alla Feltrinelli.

5. Siano Par_{LI} e Par_{LC} le teorie ottenuto estendendo LC^c ed LI^c con gli assiomi:
Ax 1. $\neg\exists x\ \ (\ U(x)\ \&\ D(x)\ )$.
Ax 2. $\forall x\ \exists y\ \exists z\ \ \ (\ F(x,y,z)\ \&\ (\ U(y)\ \&\ D(z)\ )\ )$
Ax 3. $\forall x\ \ \forall y\ \ \ \ \forall z\ \ (\ F(x,y,z) \rightarrow (\ U(y)\ \&\ D(z)\ )\ )$
Ax 4. $\neg\forall y\ \ \exists x\ \ \exists z\ \ (\ F(x,y,z)\ \ \vee\ \ F(x,z,y)\ )$
$F(x,y,z)\ \equiv\ x$ è figlio di y e z
$U(x)\ \equiv\ \ x$ è maschio
$D(x)\ \equiv\ \ x$ è femmina

Mostrare che si derivano in Par_{LI}

- 6. Nessun individuo è sia padre che madre di sè stesso. (in Par_{LI})
$\neg\exists x\ \ F(x,x,x)$
- 7. Ogni individuo ha padre e madre diversi. (in Par_{LI})
$\forall x\ \ \exists y\ \ \exists z\ \ (\ F(x,y,z)\ \&\ y \neq z\ )$
- 8. Esiste qualcuno che non è padre. (in Par_{LC})
$\exists y\ \ \neg\exists x\ \ \exists z\ \ F(x,y,z)$

6. Si ricorda che l'aritmetica di Heyting e di Peano sono ottenute rispettivamente aggiungendo a LI^c e a LC^c i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x+y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0) \& (\ \forall x\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ ) \rightarrow \forall x\ A(x)$$

Dimostrare che sia nell'aritmetica PA di Peano che in quella di Heyting si prova che (si consiglia di usare le regole sy-r e tr-r descritte poco sopra):
ricorda che $\overline{n}\ \equiv\ \underbrace{s(s\dots(0))))}_{\text{n-volte}}$

- 8. $\exists x\ s(x) = 2$

- 9. $0+0=0$
- 10. $0+1=1$
- 11. $1+1=2$
- 12. $\forall x \ \ 0+x=x$

7. Dare la definizione induttiva dell'insieme delle formule per LI_p con solo $\rightarrow$ e il $\perp$ e definire il suo principio di induzione.

8. Dare la definizione induttiva dell'insieme delle derivazioni per $\mathrm{LI}_{\&,\vee}$ con solo & ed $\vee$ e due costanti proposizionali C, D. Definire il suo principio di induzione.

   Dimostrare poi per induzione sull'insieme delle derivazioni di $\mathrm{LI}_{\&,\vee}$ che:

   "Se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathrm{LI}_{\&,\vee}$ allora Γ è diverso dal vuoto."