II appello 8 luglio 2011

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

• Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $((A \to B) \to A) \to A \vdash \perp$
  - 5 punti
    $\exists y\ A(y) \ \to\ \exists x\ B(x)\ \vdash\ \forall x\ \neg A(x)\ \vee\ \exists y\ B(y)$
  - 5 punti
    $\forall x\ \forall y\ (\ \neg C(x)\ \&\ \neg A(y)\ ) \vdash \neg \exists y\ (\ A(y)\ \vee\ C(y)\ )$
  - 7 punti
    $\vdash \forall x\ \neg C(x)\ \leftrightarrow\ \forall y\ C(y)$
  - 5 punti
    $\forall x\ c = x\ \vdash\ \exists y\ \forall x\ x = y$
  - 5 punti
    $\vdash \forall x\ \forall y\ x \neq y$

• Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

  - (3 punti)

    Sono all'estero se non sono a Padova.

    Non si dà il caso che sia a Padova e non sia all'estero.

    si consiglia di usare:
    E ="Sono all'estero"
    P ="Sono a Padova"

- (5 punti)

  $$\frac{\text{Quelli che fanno sport vivono a lungo.}}{\text{Ciascuno o vive a lungo oppure non fa sport.}}$$

  si consiglia di usare:
  S(x) =“x fa sport”
  V(x)= “x vive a lungo”

- (9 punti)

  $$\frac{\text{Quelli tra i programmatori migliori conoscono tutti gli algoritmi classici.}}{\text{Se qualcuno non conosce un algoritmo classico non è tra i programmatori migliori.}}$$

  si consiglia di usare:
  A(x) =“x è un algoritmo classico”
  M(x)= “x è tra i migliori programmatori”
  C(x,y)=“x conosce y”

- (5 punti)

  $$\frac{\text{Non esistono automobilisti prudenti che non mantengono le distanze di sicurezza.}}{\text{Esistono automobilisti che non mantengono le distanze di sicurezza e non sono prudenti.}}$$

  si consiglia di usare:
  A(x)=x è automobilista
  D(x)=x mantiene le distanze di sicurezza
  P(x)=x è prudente

- (5 punti)

  $$\frac{\text{Qualcuno si iscrive ad informatica e qualcuno a matematica.}}{\text{Non si dà il caso che tutti si iscrivano ad informatica.}}$$

  si consiglia di usare:
  I(x,y)=x si iscrive a y
  i=informatica
  m=matematica

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  C‘è un unico programma nella cartella.
  Nella cartella c’è il programma `exp`.
  `fac` è un programma.

  Se il `exp` è diverso da `fac` allora `fac` non è nella cartella.

  si consiglia di usare:
  P(x)= x è un programma
  C(x)= x sta nella cartella
  f=`fac`
  e=`exp`

- (14 punti) Sia T_{mon} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Giacomo non va in montagna se solo se piove.

- Pietro va in montagna se ci va Giacomo o non piove.
- Se Pietro non va in montagna allora Claudio e Giacomo ci vanno.
- Se Claudio va in montagna, Pietro non ci va.

Si consiglia di usare:
M(x)= x va montagna
P= piove
c=Claudio, p=Pietro, g=Giacomo.

Dedurre poi le seguenti affermazioni:

- Se non piove Giacomo va in montagna.
- Se non piove Pietro va in montagna.
- Pietro va in montagna.
- Qualcuno non va in montagna.

• (22 punti) Sia T_{am} la teoria ottenuta estendendo $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Alcuni amici di Aldo non sono europei.
- Tutti gli amici di Aldo sono europei o asiatici.
- Marcel non è nè europeo nè asiatico.
- Jean è amico di Aldo e non è asiatico.

Si consiglia di usare:
A(x,y)= x è amico di y
E(x)= x è europeo
S(x)= x è asiatico
T(x)= x è triste
a=Aldo, j= Jean, m=Marcel

Dopo aver formalizzato le frasi seguenti seguendo i suggerimenti sopra mostrarne una derivazione nella teoria indicata:

- Marcel non è amico di Aldo.
- Jean è europeo.
- Se nessuno fosse amico di Aldo, Aldo sarebbe triste.
- Non tutti gli amici di Aldo sono asiatici.
- Qualcuno ha amici.

• Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

1. (5 punti) $\vdash \forall x\ \forall z\ (\ s(x) + 0 = s(z)\ \rightarrow z = x\ )$
2. (5 punti) $\vdash \exists y\ \exists z\ (\ y = z\ \vee\ s(y) = 5\ )$
3. (5 punti) $\vdash \exists y\ \exists x\ \exists z\ z = x \cdot y$
4. (5 punti) $\vdash \exists z\ \exists y\ s(z) = 2 + y$
5. (10 punti) $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ y \neq 0\ \rightarrow\ y + x \neq 0\ )$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma \vdash x = c, \Delta}{\Gamma, \neg \exists x \; x = c \vdash \Delta} \; 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, e = c, \Delta}{\Gamma, \neg e = c \vdash \Delta} \; 2$$

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \frac{\text{ax-}\bot}{\Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \frac{=-\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \text{comp}_{dx}$$

$$\begin{array}{c}\text{rf}^*\\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{sm}^*\\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{tra}^*\\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{cf}^*\\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta\end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$