III appello 2 settembre 2011

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):

  - 3 punti
    $((B \vee A) \to B) \to B \vdash B \to A$

  - 5 punti
    $\forall y\ A(y) \ \to\ \forall x\ B(x) \ \vdash\ \exists x\ \neg A(x) \ \vee\ \forall x\ B(x)$

  - 5 punti
    $\vdash \exists x\ \neg C(x) \ \leftrightarrow\ \exists y\ C(y)$

  - 5 punti
    $\vdash \neg \exists y\ (\ A(y) \ \vee\ C(y)\ ) \ \to\ \forall x\ (\, C(x) \ \to A(x)\,)$

  - 5 punti
    $\vdash\ \exists y\ \exists x\ \forall z\ (\, x = z \ \to\ z = x \ \vee\ x \neq y\,)$

  - 5 punti
    $\vdash \forall x\ \forall y\ (\, x \neq y \ \vee\ y = x\,)$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)

  - (3 punti)

    Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna, ci sia vita su Marte o su Saturno, o su Giove.

    Se c'è vita sulla Luna e non su Giove allora c'è pure su Marte e Saturno.

    si consiglia di usare:
    L ="C'è vita sulla Luna"
    M ="C'è vita su Marte"
    S="C'è vita su Saturno"
    G="C'è vita su Giove"

- (5 punti)

  Non si dà il caso che tutti i quadrilateri siano rettangoli.

  Esiste un quadrilatero che non è rettangolo o non è regolare.

  si consiglia di usare:
  Q(x) =“x è un quadrilatero”
  R(x)= “x è rettangolo”
  G(x)= “x è regolare”

- (5 punti)

  Non si dà il caso che i quadrilateri siano rettangoli.

  Esiste un quadrilatero che non è rettangolo ma è regolare.

  si consiglia di usare:
  Q(x) =“x è un quadrilatero”
  R(x)= “x è rettangolo”
  G(x)= “x è regolare”

- (9 punti)

  Soltanto un amante di tutti i francobolli colleziona ogni francobollo.

  Chi colleziona tutti i francobolli è un amante di qualche francobollo.

  si consiglia di usare:
  F(x) =“x è un francobollo”
  A(x,y)= “x ama y”
  C(x,y)=“x colleziona y”

- (5 punti)

  Vivono a lungo quelli che alternano lavoro e vacanza in modo equilibrato.
  Chi vive a lungo fa molte esperienze.

  Tutti quelli che non fanno molte esperienze non alternano lavoro e vacanza in modo equilibrato.

  si consiglia di usare:
  A(x)= “x alterna lavoro e vacanza in modo equilibrato”
  V(x)=“x vive a lungo”
  E(x)=“x fa molte esperienze”

- (7 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Martedì è l’unico giorno libero di Piero.
  Martedì non è Giovedí.

  Giovedì non un giorno libero di Piero.

  si consiglia di usare:
  L(x,y)= “y è un giorno libero di x”
  m=“Martedì”
  g=“Giovedì”
  p=“Piero”

- (9 punti)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

Martedì è l'unico giorno libero di Piero.
Piero fa sport soltanto nel suo giorno libero.
Martedì non è Domenica.

Piero non fa sport nel giorno di Domenica.

si consiglia di usare:
L(x,y)= "y è un giorno libero di x"
S(x,y)="x fa sport nel giorno y"
m="Martedì"
d="Domenica"
p="Piero"

- (14 punti) Sia T_{lav} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Non si dà il caso che Piero non sia un imbianchino e non sia un muratore.
  - Piero è un muratore se e solo se Bianca è una parrucchiera.
  - Aldo è un muratore solo se Bianca non è una parrucchiera.
  - Bianca è una parrucchiera oppure Aldo non è un muratore.
  - Piero è un muratore solo se Aldo lo è.

  Si consiglia di usare:
  M(x)= "x è un muratore"
  P(x)="x è una parrucchiera"
  I(x)="x è un imbianchino"

  b=Bianca, p=Piero, a=Aldo.

  Dedurre poi in T_{lav} le seguenti affermazioni:

  - Piero non è un muratore.
  - Bianca non è una parrucchiera.
  - Aldo non è un muratore.
  - Piero è un imbianchino.

- (22 punti) Sia T_{or} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Qualche pomodoro dell'orto è maturo.
  - Non tutte le zucchine dell'orto sono mature.
  - Nessun pomodoro dell'orto è maturo se qualche melanzana dell'orto è matura.
  - Se tutti i pomodori dell'orto sono maturi allora lo sono anche tutte le zucchine dell'orto.

  Si consiglia di usare:
  M(x)= "x è una melanzana dell'orto"
  P(x)="x è un pomodoro dell'orto"
  Z(x)="x è una zucchina dell'orto"
  A(x)="x è maturo"

  Dedurre poi in T_{or} le seguenti affermazioni:

  - Nessuna melanzana dell'orto è matura.
  - Qualcosa è maturo.

- Qualche pomodoro dell'orto non è maturo.
- Tutte le zucchine dell'orto sono mature solo se lo sono tutte le melanzane dell'orto.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \forall z\ \forall y\ (\ z = y\ \ \rightarrow s(z) + 0 = s(y)\ )$
  2. (5 punti) $\vdash \exists x\ 0 = s(x)$
  3. (5 punti) $\vdash \exists y\ \exists x\ \exists z\ (\ s(y) = s(x)\ \rightarrow\ y = z\ \&\ z = x\ )$
  4. (6 punti) $\vdash \forall z\ \ s(z) + 0 = z + 1$
  5. (9 punti) $\vdash \forall y\ (\ y + y \neq 0\ \rightarrow\ \ y \neq 0\ )$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma, d = c \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ x \neq c, \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\,(\,x \neq c\ \vee\ c = x\,)}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{ax-}\perp\\ \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla\end{array}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \rightarrow-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad \begin{array}{c}=-\mathrm{ax}\\ \Gamma \vdash t = t, \Delta\end{array}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \rightarrow x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \rightarrow A(s(x))\ ) \rightarrow \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\begin{array}{cc}
\neg\text{-ax}_{sx1} & \neg\text{-ax}_{sx2} \\
\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C & \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg\text{-ax}_{dx1} & \neg\text{-ax}_{dx2} \\
\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' & \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\text{−S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\text{−D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{''} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{''}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{−re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\text{−re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\text{−re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma\text{''} \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma\text{''} \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{''}}\ \text{comp}_{dx}$$

$$\begin{array}{c}
\text{rf}^* \\
\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{sm}^* \\
\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\text{tra}^* & \text{cf}^* \\
\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta & \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{cp}^* \\
\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta
\end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\, P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$