IV appello 23 settembre 2011

nome: cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):
  - 3 punti
    $\vdash \neg(((A \to (A \to B)) \to A) \to A)$
  - 5 punti
    $\exists y\ A(y) \to \forall x\ B(x) \vdash \forall x\ \neg A(x) \vee \forall x\ B(x)$
  - 5 punti
    $\vdash \exists x\ \neg C(x) \leftrightarrow \neg \forall y\, \neg C(y)$
  - 5 punti
    $\vdash \neg \exists y\ (\ A(y) \to C(y)\ ) \to \forall x\ (\neg C(x)\,\&\, A(x))$
  - 5 punti
    $\vdash \neg(\forall x\ x = a \to a = b)$
  - 5 punti
    $\vdash \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\ y = x\ \&\ z \neq x \to z \neq y\ )$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)
  - (3 punti)

    $$\frac{\text{Non c'è vita su Giove ma c'è su Marte e Saturno.}}{\text{Non si dà il caso che, se c'è vita sulla Luna e non su Giove, allora ci sia pure su Marte.}}$$

    si consiglia di usare:
    L ="C'è vita sulla Luna"
    M ="C'è vita su Marte"
    S="C'è vita su Saturno"
    G="C'è vita su Giove"

- (5 punti)

  Non si dà il caso che tutti imparino facilmente tutte le lingue.

  C'è qualche lingua che non è imparata facilmente da qualcuno.

  si consiglia di usare:
  I(x,y) =“x impara facilmente y”
  L(x)= “x è una lingua”

- (6 punti)

  Nessuno stima se stesso nel paese di Cantù.

  Quelli che non sono nel paese di Cantù, e soltanto loro, stimano se stessi.

  si consiglia di usare:
  S(x,y) =“x stima y”
  C(x)=“x è nel paese di Cantù”

- (5 punti)

  Ogni pianeta gira intorno ad una stella e non brilla.

  Quelli che non girano attorno ad una stella non sono pianeti.

  si consiglia di usare:
  G(x) =“x gira attorno ad una stella”
  P(x)=“x è un pianeta”
  B(x)=“x brilla”

- (5 punti)

  Quelli che girano attorno ad una stella sono pianeti.
  La Luna gira attorno alla Terra.

  La Luna è un pianeta.

  si consiglia di usare:
  G(x,y) =“x gira attorno ad y”
  S(x)=“x è una stella”
  P(x)=“x è un pianeta”
  l=“Luna”
  t =“Terra”

• (7 punti)

Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

Titti preferisce un unico colore.
Il verde è diverso dal giallo.
Titti preferisce il colore verde.

Titti non preferisce il colore giallo.

si consiglia di usare:
P(y)= “Titti preferisce il colore y”
v=“verde”
g=“giallo”

• (14 punti) Sia T_{ga} la teoria ottenuta estendendo $LC_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

- Non si dà il caso che il gatto di Carlo non sia persiano e non di razza.

- Solo se il gatto di Carlo è persiano lo è pure il gatto di Gioia.
- Non si dà il caso che, se il gatto di Anna non è persiano, lo sia quello di Noemi.
- Se e solo se il gatto di Anna è persiano allora lo è pure quello di Carlo.

Si consiglia di usare:
P(x)="x è persiano"
R(x)="x è di razza"
a="il gatto di Anna"
c="il gatto di Carlo"
g="il gatto di Gioia"
n="il gatto di Noemi"

Dedurre poi in T_{ga} le seguenti affermazioni:

- Il gatto di Anna non è persiano.
- Il gatto di Noemi non è persiano.
- Il gatto di Carlo non è persiano ma è di razza.
- Il gatto di Gioia non è persiano.

- (22 punti) Sia T_{co} la teoria ottenuta estendendo $\text{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Mimmo corre più veloce di Pino.
  - Nessuno corre più veloce di Mimmo.
  - Pino corre più veloce di Gino.
  - Pino non è Mimmo.
    (per formalizzare usare l'uguaglianza "=")
  - C'è un'unica persona che corre più veloce di Gino.

  Si consiglia di usare:
  C(x,y)= "x corre più veloce di y"
  m="Mimmo"
  g="Gino"
  p="Pino"

  Dedurre poi in T_{co} le seguenti affermazioni:

  - Qualcuno corre più veloce di qualcun altro.
  - Se qualcuno corre più veloce di Mimmo allora corre più veloce di tutti.
  - Non si dà il caso che nessuno corra più veloce di Pino.
  - Mimmo non corre più veloce di Gino.

- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \forall z\ \forall y\ (\ y = s(z) + 0\ \rightarrow y \neq 0)$
  2. (5 punti) $\vdash \neg\exists y\ \forall x\ x = x + y$
  3. (5 punti) $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ s(y) = s(x)\ \rightarrow\ y = x + 0\ )$
  4. (6 punti) $\vdash \neg\neg\ \forall z\ \ s(s(z) + 1) + 0 = s(z) + 2$

5. (9 punti) $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ y \cdot x \neq 0\ \rightarrow\ y \neq 0\ )$

- Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma, c = x \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ x \neq c, \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg(\ A \vee B\ )}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- LC$_=$

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta'} \qquad \frac{\text{ax-}\perp}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad \frac{= -\mathrm{ax}}{\Gamma \vdash t = t, \Delta}$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a LC$_=$ + comp$_{sx}$+ comp$_{dx}$, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \;\equiv\; \neg t = s$

$$\overline{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C}\ \neg\text{-ax}_{sx1} \qquad \overline{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C}\ \neg\text{-ax}_{sx2}$$

$$\overline{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''}\ \neg\text{-ax}_{dx1} \qquad \overline{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''}\ \neg\text{-ax}_{dx2}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg\!-\!\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg\!-\!\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma" \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma" \vdash \Sigma}\ \mathrm{in}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma"}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{in}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \mathrm{cn}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \mathrm{cn}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\!-\!\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\!-\!\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\!-\!\mathrm{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\!-\!\mathrm{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall\!-\!\mathrm{re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists\!-\!\mathrm{re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

$$\overline{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'}\ \mathrm{rf}^*$$

$$\overline{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta}\ \mathrm{sm}^*$$

$$\overline{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta}\ \mathrm{tra}^* \qquad \overline{\Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta}\ \mathrm{cf}^*$$

$$\overline{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta}\ \mathrm{cp}^*$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\,P(x) \to P(s(x))\,)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \mathrm{ind}$$