4. Esercitazione 10 giugno 2011

Si ricorda che con *teoria* si intende un'*estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza* $LC_=$ *CON degli assiomi extralogici e regole di composizione a dx e a sx.*
Nel seguito identificheremo una teoria designando i SOLI assiomi extralogici.

- il sequente $\vdash \forall\ x\ x \neq s(x)$ è valido in PA?
- il sequente $\vdash \exists x\ \forall y\ x = y$ è valido in $\mathrm{LC}_=$? è soddisfacibile se non è valido?
- il sequente $\vdash \exists x\ \forall y\ x = y$ è valido in PA ? è soddisfacibile se non è valido?
- Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. $\vdash \forall x\ \exists y\ x \neq y$
  2. $\vdash \forall x\ \forall y\ x = y$
  3. $\vdash \forall x\ (\ s(x) = 0 \rightarrow 7 = x\ )$
  4. $\vdash 0 = 100$
  5. $\vdash \exists y\ \forall x\ x = x + y$
  6. $\vdash \forall y\ \exists x(\ x = s(y) \rightarrow y = 4\ )$
  7. $\vdash \exists x\ \exists y\ x \cdot y = 2$
  8. $\vdash (7 + 1) + 1 = 9$
  9. $\vdash \forall x\ 1 + x = s(x)$

- Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $\mathrm{LC}_=$:

  Mirko è uno studente nell'aula 1A150.
  Non c'è nessun studente diverso da Mirko nell'aula 1A 150.

  Nell'aula 1A150 c'è un'unico studente.

  si consiglia di usare:
  S(x)= x è uno studente nell'aula 1A150
  m="Mirko"

  corretto in $\mathrm{LC}_=$ sì no

- Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $\mathrm{LC}_=$:

  Tutte le amiche di Carla sono venete.
  Gianna è amica di Carla.
  Carla ha un'unica amica.

  Gianna è veneta.

  si consiglia di usare:
  A(x)= x è amica di Carla
  V(x)= x è veneta
  g='Gianna"

  corretto in $\mathrm{LC}_=$ sì no

- Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  Qualche amica di Carla è veneta.
  Gianna è amica di Carla.
  Carla ha un'unica amica.
  ———
  Gianna è veneta.

  si consiglia di usare:
  A(x)= x è amica di Carla
  V(x)= x è veneta
  g='Gianna"

  corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$\neg a = b \vdash \neg(\ c = a \& b = c\ )$$

  corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$u = v \rightarrow v = w \vdash u = w \vee u \neq v$$

  corretto in $LC_=$ sì no

- Stabilire quali delle seguenti sono VALIDE rispetto alla semantica classica e nel caso di NON validità dire se sono SODDISFACIBILI o INSODDISFACIBILI:

  $\models \exists y\ (\ \neg B(x) \rightarrow (\ B(y) \rightarrow \neg C(x)\ )\ )$
  $\models \exists x\ (\ \neg B(x) \rightarrow B(x) \& \perp\ )$
  $\models \neg \exists y\ \forall z\ (\ z = y \rightarrow y = z\ )$

- Sia T^c_{vot} la teoria ottenuta dalla formalizzazione dei seguenti assiomi:
  - Ax1 Filippo non è andato a votare alle ultime elezioni europee.
  - Ax2. Carla non è andata a votare alle ultime elezioni europee se e solo se ci è andato Filippo.

- Ax3. Se uno ha espresso un voto valido alle ultime elezioni europee allora è andato a votare alle ultime elezioni europee.
- Ax4. Marco ha espresso un voto valido alle ultime elezioni europee.
- Ax5. Marco ha votato un partito che difende gli interessi di tutti alle ultime elezioni europee.
- Ax 6. Il "partito degli intelligenti" è un partito che difende gli interessi di tutti.
- Ax 7. C'e' un unico partito che difende gli interessi di tutti.
- Ax 8. Ogni partito che difende solo gli interessi del più potente di turno non è un partito che difende gli interessi di tutti.

si consiglia di usare:
$E(x)$= x è andato a votare alle ultime elezioni europee
$V(x)$= x ha espresso un voto valido alle ultime elezioni europee
$P(x, y)$=x ha votato il partito y alle ultime elezioni europee
$I(x, y)$=x è un partito che difende gli interessi di y
i=il partito degli intelligenti
f=Filippo
c=Carla
m=Marco
p=il più potente di turno

Derivare nella teoria T^c_{vot}:

- 6. Carla è andata a votare alle ultime elezioni.
- 7. Non tutti sono andati a votare alle ultime elezioni.
- 8. Marco è andato a votare alle ultime elezioni.
- 9. Marco ha votato il "partito degli intelligenti".
- 10. Il "partito degli intelligenti" non difende solo gli interessi del più potente di turno.

- Sia T_{nuoto} la teoria ottenuta dalla formalizzazione dei seguenti assiomi:

  1. Ax. Se Paolo va a fare una nuotata allora Carlo ci va.
  2. Ax. Barbara va a fare una nuotata solo se ci va Paolo.
  3. Ax. Se Mario va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.
  4. Ax. Se qualcuno va a fare una nuotata allora Paolo non ci va.
  5. Ax. Se Carlo non va a fare una nuotata allora Barbara ci va.
  6. Ax. Anna va a fare una nuotata.

     Suggerimento: usare
     N(x)= x va a fare una nuotata
     p=Paolo, c=Carlo, m=Mario

     Derivare in T_{nuoto} le seguenti frasi opportunamente formalizzate supposto che questa teoria sia consistente:

  7. Paolo non va a fare una nuotata.
  8. Barbara non va a fare una nuotata.
  9. Carlo va a fare una nuotata.

- Sia $T_{squadre}$ la teoria ottenuta estendendo $\mathrm{LC}_=$ con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  1. Ogni persona tifosa di una squadra di calcio è tifosa di una sola squadra.
  2. Non tutti sono tifosi di una squadra di calcio.

3. Esistono persone tifose di una squadra di calcio diversa dalla Juventus.
4. Carlo non è tifoso dell'Inter ma è un tifoso della Juventus o del Milan.
5. la Juventus è diversa dal Milan.
   suggerimento: si usi $T(x, y)$= x è persona tifosa della squadra di calcio y.

   Derivare in $T_{squadre}$ supposta consistente:
6. Se Carlo non è tifoso della Juventus allora è tifoso del Milan.
7. Esistono tifosi di una squadra di calcio.
8. Se tutti fossero tifosi allora tutti sarebbero tifosi della Juventus.
9. Se qualcuno è tifoso della Juventus allora non è tifoso del Milan.

   È derivabile in $T_{squadre}$
10. "Tutti sono tifosi" ???

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\text{ax-id} \quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad\qquad \text{ax-}\bot \quad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to -\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to -\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x\ A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ = -\mathrm{S} \qquad = -\mathrm{ax} \quad \Gamma \vdash t = t, \Delta$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \ldots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx1}\\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{sx2}\\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx1}\\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''\end{array} \qquad \begin{array}{c}\neg\text{-ax}_{dx2}\\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''\end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma\text{"} \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma\text{"}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma\text{"} \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma\text{"} \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma\text{"}}\ \text{comp}_{dx}$$

$$\begin{array}{c}\text{rf}^*\\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{sm}^*\\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{tra}^*\\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{cf}^*\\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\text{cp}^*\\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta\end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \rightarrow P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$