Pre-appello 15 giugno 2011

nome: cognome:

appello II compitino

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si contano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente.
- Ricordatevi di LABELLARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!)
- Specificate le eventuali regole derivate che usate e che non sono menzionate nel foglio allegato al compito.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono validi o meno, e soddisfacibili o insoddisfacibili, in logica classica (nel caso di non validità i punti vanno aumentati della metà arrotondata per eccesso):
  - 3 punti
    $(C \rightarrow \neg A) \vee \neg B \vdash \neg B \rightarrow \neg C \vee \neg A$
  - 5 punti
    $\vdash \neg(\exists y\ C(y) \ \rightarrow\ \exists y\ D(y)) \ \rightarrow\ \exists y\ (\neg C(y) \ \vee\ D(y))$
  - 5 punti
    $\exists x\ \exists y\ (C(x) \vee A(y)) \vdash \neg \forall x\ (\neg A(x) \& \neg C(x))$
  - 5 punti
    $\vdash \neg \exists x\ (\neg B(x) \rightarrow C(x))$
  - 5 punti (II comp.)
    $\vdash \forall y \forall z\ (z = y \vee y = y) \rightarrow \exists x\ \exists y\ x \neq y$
  - 5 punti (II comp.)
    $\vdash \exists x\ \exists y\ \exists z\ (x \neq z \vee x \neq y) \rightarrow \exists z\ \exists y\ z \neq y$

- Formalizzare le seguenti frasi e argomentazioni e stabilire se i sequenti ottenuti sono VALIDI per la semantica della logica classica; nel caso negativo dire se sono SODDISFACIBILI, ovvero hanno un modello che li rende validi, o INSODDISFACIBILI, ovvero nessun modello li rende validi, motivando la risposta: (nel caso di non validità il punteggio viene aumentato di 2 punti)
  - (3 punti)
    Non si dà il caso che i prezzi non siano aumentati solo se l'inflazione non è diminuita.
    I prezzi sono aumentati.

    L'inflazione è diminuita.

    si consiglia di usare:
    P = "I prezzi sono aumentati"
    D = "L'inflazione è diminuita"

- (5 punti)

  Nulla accade per caso.

  Ciò che capita non accade per caso.

  si consiglia di usare:
  A(x) =“x accade per caso”
  C(x)= “x capita”

- (5 punti)

  Nessun essere vivente è perfetto.

  Non si dà il caso che soltanto gli esseri viventi non siano perfetti.

  si consiglia di usare:
  E(x) =“x è essere vivente”
  P(x)= “x è perfetto”

- (5 punti)

  Non tutti ballano bene sia il tango che la salsa.

  Qualcuno sa ballare bene il tango e qualcuno la salsa ma non entrambe.

  si consiglia di usare:
  B(x,y) = x balla bene y
  t=tango
  s=salsa

- (7 punti - II comp.)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:

  L'appello del 10 gennaio è un appello invernale ed è l'unico.
  L'appello del 10 gennaio è il quinto appello.

  Il quinto appello è un appello invernale.

  si consiglia di usare:
  I(x)= x è appello invernale
  o=appello del 10 gennaio
  q=quinto appello

  corretto in $LC_=$ sì no

- (7 punti -II comp.)

  Formalizzare la seguente argomentazione in sequente e stabilire se è derivabile in $LC_=$:
  L'appello del 10 gennaio è l' unico appello invernale.
  L'appello del 10 gennaio NON è il terzo appello.

  Esiste un appello invernale e il terzo appello non è invernale.

  si consiglia di usare:
  I(x)= x è appello invernale
  o=appello del 10 gennaio
  t=terzo appello

- (5 punti II comp.) Stabilire se il sequente è valido in $LC_=$

$$u \neq z \to w \neq u \vdash (\, u = v \,\&\, w = v \,) \,\&\, w = t \;\to\; t = u$$

- (12 punti II comp.) Sia T^{cla}_{sc} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Paolo sciopera solo se tutti scioperano.
  - Se Claudio sciopera allora Elena non sciopera e Paolo sì.
  - Solo se Elena sciopera Claudio non sciopera.

  Si consiglia di usare:
  S(x)= x sciopera, c=Claudio, p=Paolo, e=Elena.

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione in T^{cla}_{sc}:

  - Claudio non sciopera.
  - Paolo non sciopera.
  - Elena sciopera.

- (24 punti II comp) Sia T^{cla}_{ba} la teoria ottenuta estendendo la logica classica con la formalizzazione dei seguenti assiomi:

  - Non si dà il caso che qualcuno non abbia visto la balena.
  - Gianni avrebbe visto la foca soltanto se non avesse visto la balena.
  - Solo quelli che hanno visto la foca hanno visto l'albatros.

  suggerimento: si consiglia di usare:
  V(x,y)= x ha visto y
  a=albatros, b=balena, f= foca

  Dopo aver formalizzato le frase seguenti mostrarne una derivazione nella teoria T^{cla}_{im}:

  - Tutti hanno visto la balena.
  - Se Gianni non avesse visto la balena sarebbe stato l'unico a non vederla.
  - Gianni non ha visto la foca.
  - Non tutti hanno visto sia la balena che la foca.
  - Gianni non ha visto l'albatros.
  - Nessuno ha visto l'albatros senza vedere la foca e la balena.
  - Non c'è nessuno che non abbia visto quello che ha visto Gianni.

- (II comp.) Dire se nell'aritmetica di Peano PA questi sequenti sono validi (nel caso di non validità mostrare che la loro negazione è derivabile)

  1. (5 punti) $\vdash \exists x \,\exists z \;(\; s(x) = s(z) \to z = y \;)$
  2. (5 punti) $\vdash \exists y \,\exists z \; z + y = s(z)$
  3. (5 punti) $\vdash \neg \exists x \; x = x + x$

4. (5 punti) $\vdash \forall y\ \exists x(\ x = y \rightarrow s(x) = s(7)\ )$
5. (6 punti) $\vdash \exists x\ \exists y\ x \cdot s(y) = 2$
6. (8 punti) $\vdash (7 + 1) \cdot 1 = 8$
7. (10 punti) $\vdash \forall x\ 1 \cdot x = x$

- (II comp.) Stabilire quali delle seguenti regole sono valide e in caso positivo anche sicure: (8 punti ciascuna)

$$\frac{\Gamma \vdash x = c, \Delta}{\Gamma \vdash B\ \rightarrow\ \forall x\ x = c, \Delta}\ 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg x = y}{\Gamma, y = x \vdash \neg C}\ 2$$

Logica classica con uguaglianza- $LC_=$

$$\text{ax-id} \quad \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' \qquad \text{ax-}\bot \quad \Gamma, \bot, \Gamma' \vdash \nabla$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma}\ \mathrm{sc_{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc_{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}\ \&-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\ A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla}\ \forall-\mathrm{D}\ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla))$$

$$\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x\ A(x) \vdash \nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\ A(x), \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \exists\ x\ A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\ A(x), \nabla}\ \exists-\mathrm{D}$$

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla}\ =-\mathrm{S} \qquad =-\mathrm{ax} \quad \Gamma \vdash t = t, \Delta$$

Aritmetica di Peano

L'aritmetica di Peano è ottenuta aggiungendo a $LC_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx}, ovvero

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma" \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \mathrm{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma" \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma"}\ \mathrm{comp}_{dx}$$

i seguenti assiomi:

$$Ax1. \vdash \forall x\ s(x) \neq 0$$
$$Ax2. \vdash \forall x\ \forall y\ (\ s(x) = s(y) \to x = y\ )$$
$$Ax3. \vdash \forall x\ \ x + 0 = x$$
$$Ax4. \vdash \forall x\ \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$$
$$Ax5. \vdash \forall x\ x \cdot 0 = 0$$
$$Ax6. \vdash \forall x\ \forall y\ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$
$$Ax7. \vdash A(0)\&\forall x\ (\ A(x) \to A(s(x))\ ) \to \forall x\ A(x)$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{\text{n-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$
$$2 \equiv s(\,s(0)\,)$$

Regole derivate o ammissibili per LC con uguaglianza

si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx1} \\ \Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{sx2} \\ \Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx1} \\ \Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma'' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg\text{-ax}_{dx2} \\ \Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma'' \end{array}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta}\ \neg\neg-\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta}\ \neg\neg-\text{D}$$

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma}\ \text{in}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{in}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Gamma, \Delta \vdash A}{\Sigma, \Gamma, \Delta \vdash A}\ \text{cn}_{\text{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Delta, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \nabla}\ \text{cn}_{\text{dx}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \&-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee-\text{re}_2$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A(x) \vdash \Delta}\ \forall-\text{re} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists\ x\ A(x), \Delta}\ \exists-\text{re}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash A \quad \Gamma, A, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \nabla}\ \text{comp}_{sx} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma'' \quad A \vdash \Sigma'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''}\ \text{comp}_{dx}$$

$$\begin{array}{c} \text{rf}^* \\ \Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{sm}^* \\ \Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tra}^* \\ \Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{cf}^* \\ \Gamma, t = u \vdash f(t) = f(u), \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{cp}^* \\ \Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = u, \Delta}{\Gamma \vdash u = t, \Delta}\ \text{sy-r} \qquad \frac{\Gamma, t = u \vdash \Delta}{\Gamma, u = t \vdash \Delta}\ \text{sy-l}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v, \Delta \quad \Gamma' \vdash v = u, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u, \Delta}\ \text{tr-r}$$

1 Regole derivate in aritmetica

In $\text{LC}_=$ + comp_{sx}+ comp_{dx} si hanno le seguenti regole derivate:

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x\ (\ P(x) \rightarrow P(s(x))\ )}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x\ P(x)}\ \text{ind}$$