Esercizi 4. Significato del connettivo disgiunzione nel calcolo dei sequenti per la logica classica

Nel seguito mostriamo da dove originano le regole per la disgiunzione nel calcolo dei sequenti per la logica classica $\mathbf{LC}_=$.
L'obiettivo principale è di ottenere una logica con la disgiunzione in cui

- le regole sono INVERTIBILI
- le regole NON aumentano la complessità dei sequenti dal basso verso l'alto al fine di permettere una ricerca delle prove automatica o al più semi-automatica

a partire da un calcolo dei sequenti di base che chiamiamo $\mathbf{L}_{base}$ con assiomi identità, regole di scambio, indebolimento e contrazione a destra e a sinistra rispettivamente e con regola di composizione in forma generale.

Ciò significa che nella logica con disgiunzione che vogliamo trovare:

- le regole sono INVERTIBILI
- le regole NON aumentano la complessità dei sequenti dal basso verso l'alto
- le regole di indebolimento, contrazione e *composizione generali* sono *eliminabili*, ovvero la logica con regole di disgiunzione assiomi identita' e regole di scambio è equivalente alla sua estensione con le regole di indebolimento, contrazione e *composizione in forma generale.*

Il significato del connettivo disgiunzione è dato dall'equazione definitoria

$$\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta} \text{ è derivabile} \qquad \text{sse} \qquad \mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Delta} \text{ è derivabile}$$

Questa equazione suggerisce di estendere il calcolo dei sequenti con le seguenti due regole ottenute leggendo i due versi della doppia implicazione sopra:

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}\ \vee\!-\text{formazione} \qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}\ \vee\!-\text{inversa}$$

Sia $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$ il calcolo dei sequenti ottenuto estendendo $\mathbf{L}_{base}$ con le regole sopra di $\vee$-*formazione* e $\vee$-*inversa.*
Ora si noti che in $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$ prendendo la regola di $\vee$-inversa e mettendo l'assioma identità con la proposizione $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ come premessa si ottiene

$$\frac{\begin{array}{c}\text{ax-id}\\ \mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}\end{array}}{\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}}\ \vee\!-\text{inversa}$$

e consideriamo la conclusione come un assioma disgiunzione

$$\begin{array}{c}\text{ax-}\vee\\ \mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}\end{array}$$

Ora definiamo $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ la logica ottenuta da $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$ rimpiazzando la regola di $\vee$-*inversa* con l'assioma ax-$\vee$.

Esercizio: La logica $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ è equivalente alla logica $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$.
(Si noti che chiaramente i sequenti di $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ sono derivabili in $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$ perchè l'assioma disgiunzione è stato ricavato derivando in $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$. Per vedere che i sequenti di $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ sono derivabili in $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$ basta osservare che la regola $\vee$-*inversa* è regola derivata in $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ usando la regola di composizione in forma generale.)

La logica $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ appare un buon candidato per soddisfare i nostri requisiti in quanto ha regole invertibili che non aumentano la complessità dal basso verso l'alto (questi criteri non coinvolgono l'assioma visto che l'assioma non ha premesse!). Però dobbiamo controllare che la regola di composizione in forma generale sia eliminabile da $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ e questo non vale. Infatti se definiamo la logica $\mathbf{L}^{\vee}_{axNOcut}$ come il frammento di $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ privato della regola di composizione in forma generale si osserva che la logica $\mathbf{L}^{\vee}_{axNOcut}$ NON è equivalente alla logica $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$:

Esercizio: nella logiche $\mathbf{L}^{\vee}_{axNOcut}$ si deriva il sequente

$$(\,\mathbf{A} \vee \mathbf{C}\,) \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$$

?? e nella logica $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$?

Occorre quindi procedere a modificare l'assioma disgiunzione in modo da ottenere una logica ove la regola di composizione in forma generale si possa eliminare.
Una soluzione è di usare la regola di composizione in forma generale sull'assioma di disgiunzione come segue

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-}\vee}{\mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Delta}} \quad \mathbf{\Sigma}'', \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}''}{\mathbf{\Sigma}'', \mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}, \mathbf{\Delta}'', \mathbf{\Delta}}\ comp \qquad \mathbf{\Sigma}', \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}'}{\mathbf{\Sigma}', \mathbf{\Sigma}'', \mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}', \mathbf{\Delta}'', \mathbf{\Delta}}\ comp$$

Si è ottenuto quindi la regola derivata

$$\dfrac{\mathbf{\Sigma}', \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}' \quad \mathbf{\Sigma}'', \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}''}{\mathbf{\Sigma}', \mathbf{\Sigma}'', \mathbf{\Sigma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}', \mathbf{\Delta}'', \mathbf{\Delta}}\ \vee\!-\text{riflessione} - \text{esplicita}$$

Si definisca $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ la logica ottenuta da $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$ rimpiazzando la regola di $\vee$-*inversa* con la regola $\vee$-*riflessione esplicita*.

Esercizio: La logica $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ è equivalente alla logica $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$.
(Si noti che chiaramente i sequenti di $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ sono derivabili in $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ perchè la regola $\vee$-*riflessione-esplicita*$\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ è stata ricavata derivando in $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$. Per vedere che i sequenti di $\mathbf{L}^{\vee}_{ax}$ sono derivabili in $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ basta osservare che l'assioma $\vee$-*ax* è derivabile $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ usando la regola $\vee$-*riflessione-esplicita*.)

Ora si osservi che la logica $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ non è esattamente la logica cercata in quanto o non soddisfa la eliminazione della regola di composizione in forma generale, ovvero non è equivalente al suo frammento senza regola *comp*, e quindi non soddisfa uno dei nostri requisiti, oppure *se soddisfa l'eliminazione della regola di composizione in forma generale* la regola $\vee$-*riflessione-esplicita* NON è certamente invertibile per la presenza di contesti diversi nelle due premesse e un contesto aggiunto nella conclusione.

Esercizio: supposto che la logica $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ sia equivalente al suo frammento senza la regola di composizione in forma generale si dimostri che la regola $\vee$-*riflessione-esplicita* NON è invertibile.

Uniformando i contesti in modo da rendere invertibile la regola $\vee$-*riflessione-esplicita*, almeno in assenza della regola di composizione in forma generale, si ottiene

$$\dfrac{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{\Delta}' \quad \mathbf{\Gamma}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{\Delta}}\ \vee\!-\text{duale}$$

Ora si definisca $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ la logica ottenuta da $\mathbf{L}^{\vee}_{brutta}$ rimpiazzando la regola di $\vee$-*inversa* con la regola $\vee$-*duale*.

Si osservi che

Esercizio: La logica $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ è equivalente alla logica $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$.
(Si noti che chiaramente i sequenti di $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ sono derivabili in $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ perchè la regola $\vee$-*duale* risulta derivata in $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ usando la regola $\vee$-*riflessione esplicita* e le regole di contrazione. Per vedere che i sequenti di $\mathbf{L}^{\vee}_{quasibella}$ sono derivabili in $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ basta osservare che la regola $\vee$-*riflessione esplicita* è regola derivata in $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ usando le regole di indebolimento e la regola $\vee$-*duale*.)

Ora la logica $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ è la logica cercata in quanto nel seguito mostreremo che $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ è equivalente alla logica $\mathbf{L}^{\vee}_{bellissima}$ ottenuta togliendo da $\mathbf{L}^{\vee}_{bella}$ le regole di indebolimento, contrazione e composizione in forma generale e quindi facendola diventare *un frammento del calcolo dei sequenti per la logica classica* $\mathbf{LC}_{=}$.