Siamo tutti diversi

14. Lezione Corso di Logica 2020/2021

27 novembre 2020

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it

SIMULAZIONE **appello**

venerdi’ 18 dicembre 2020 (teorie)

+

giovedi’ 7 gennaio 2021 (classificazione)

10.30-12.30

Memo: nostro obiettivo

rendere ancora PIÙ espressivo il linguaggio formale predicativo con $\forall$ ed $\exists$

(e calcolo relativo!!)

affinchè un robot 

- possa rispondere a TUTTI i test di logica
- possa verificare la correttezza dei programmi

Cosa manca??

Come potenziare

il linguaggio predicativo con $\forall$ ed $\exists$

per **formalizzare** e riconoscere la **ovvietà**

“Ognuno è uguale a se stesso”

??

Cosa manca??

Come potenziare il linguaggio predicativo con $\forall$ ed $\exists$

per **formalizzare** e riconoscere la **ovvietà**

Il programma fattoriale su 2 dà come output il numero n.   *Il programma fattoriale su 2 NON dà come output il numero m.*
Il numero n **NON è uguale** *m.*

ponendo

n= "il numero n" m= "il numero m" **??**

$O(x)$= "il programma fattoriale su 2 dà come output il numero x"

Come formalizzare l'unicità??

Come potenziare il linguaggio predicativo con $\forall$ ed $\exists$

per **formalizzare** e riconoscere la **ovvietà**

Il programma fattoriale su 2 dà ***un'unico*** *output.*
Il programma fattoriale su 2 dà come output il numero n.
il numero n ***è diverso*** *da* m
Il programma fattoriale su 2 NON dà come output il numero m.

ponendo

n= "il numero n" m= "il numero m" **??**

$O(x)$= "il programma fattoriale su 2 dà come output il numero x"

aggiungiamo al linguaggio il Predicato atomico dell' uguaglianza

per formalizzare

"Ognuno è uguale a se stesso"

introduciamo il predicato atomico dell' uguaglianza con la scrittura

$$t_{ter} = s_{ter}$$

ove

t_{ter} ed s_{ter} sono *meta-variabili* per termini

per indicare *termini generici*

e quindi TUTTI gli esempi predicati di uguaglianza tra costanti e variabili

come ad esempio

$x{=}c \qquad c{=}d \qquad x{=}w \qquad \ldots$

I Esempio di formalizzazione

Nel linguaggio predicativo con $\forall$ ed $\exists$ ed uguaglianza

"Ognuno è uguale a se stesso"

si formalizza in tal modo

$$\forall x\ x = x$$

Il Esempio di formalizzazione

Nel linguaggio predicativo con $\forall$ ed $\exists$ ed uguaglianza

Il programma fattoriale su 2 dà come output il numero n.

Il programma fattoriale su 2 NON dà come output il numero k.

Il numero n **NON è uguale** *k.*

si può formalizzare in tal modo

$$O(n), \neg O(k) \vdash \neg n{=}k$$

ponendo

n= "il numero n" k= "il numero k"

$O(x)$= "il programma fattoriale su 2 dà come output il numero x"

Formalizzazione dell'unicità MOLTO IMPORTANTE!!

Nel linguaggio predicativo con $\forall$ ed $\exists$ ed uguaglianza

Il programma fattoriale su 2 dà ***un'unico*** *output.*

si può formalizzare in questi due modi:

primo modo $\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,)$ consigliato!!

per velocizzare derivazioni

secondo modo $\exists x\, (\ O(x)\ \&\ \forall y\, (\, O(y) \rightarrow y = x\,)\ )$

III Esempio di formalizzazione

Nel linguaggio predicativo con $\forall$ ed $\exists$ ed uguaglianza

Il programma fattoriale su 2 dà **un'unico** *output.*

Il programma fattoriale su 2 dà come output il numero n.

il numero n **è diverso** *da* k

Il programma fattoriale su 2 NON dà come output il numero k.

si può formalizzare in tal modo

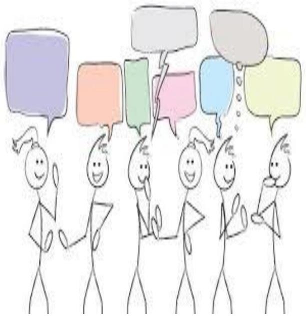
$$\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\ O(y_1)\ \ \&\ \ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\ )\ ,\ O(n)\ ,\ \neg n{=}k\ \vdash\ \neg O(m)$$

ponendo

n= "il numero n" k= "il numero k"

$O(x)$= "il programma fattoriale su 2 dà come output il numero x"

Grammatica formule con uguaglianza

in ogni linguaggio formale  una formula $\mathtt{fr}$ si può costruire in tal modo:

- il predicato $t_{ter}{=}s_{ter}$ è una formula se t_{ter} ed s_{ter} sono termini (ovvero ciascuno è una variabile o costante). NEW!!!
- i predicati atomici $P_k(t_1, \ldots, t_m)$ sono formule se $P_k(x_1, \ldots, x_m)$ è predicato atomico e i vari t_i sono termini per $i = 1, \ldots, m$.
- $\forall x\ (\mathtt{fr})$ è una formula se $\mathtt{fr}$ lo è
- $\exists x\ (\mathtt{fr})$ è una formula se $\mathtt{fr}$ lo è
- le proposizioni costante falso $\perp$ e costante vero $\mathtt{tt}$ sono entrambi una formula
- $(\mathtt{fr}_1)\&(\mathtt{fr}_2)$ è una formula se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono
- $(\mathtt{fr}_1)\vee(\mathtt{fr}_2)$ è una formula se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono

- $(\mathtt{fr}_1) \rightarrow (\mathtt{fr}_2)$ è una formula se $\mathtt{fr}_1$ e $\mathtt{fr}_2$ lo sono

- $\neg(\mathtt{fr})$ è una formula se $\mathtt{fr}$ lo è.

regole per uguaglianza



$$\frac{}{\Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta}\ = -\mathrm{ax}$$

$$\frac{\Sigma\ ,\ t_{ter}{=}s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter}) \vdash \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma, \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter}{=}s_{ter} \vdash \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla}\ = -\mathrm{S}$$

la ripetizione di $t_{ter}{=}s_{ter}$

serve per rendere la regola $= -\mathrm{S}$ **SICURA**!!!

Calcolo dei sequenti della logica predicativa classica $\mathbf{LC}_{=}$

ax-id $\quad$ ax-$\perp$ $\quad$ ax-tt

$$\Gamma, \mathtt{fr}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathtt{fr}, \Delta' \qquad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \qquad \Gamma \vdash \nabla, \mathtt{tt}, \nabla'$$

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{sx}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla}\ \mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{fr}_1) \& (\mathtt{fr}_2), \Delta}\ \& - \mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{fr}_1) \& (\mathtt{fr}_2) \vdash \Delta}\ \& - \mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{fr}_1) \vee (\mathtt{fr}_2), \Delta}\ \vee - \mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{fr}_1) \vee (\mathtt{fr}_2) \vdash \Delta}\ \vee - \mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg(\mathtt{fr}_1), \Delta}\ \neg - \mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg(\mathtt{fr}_1) \vdash \Delta}\ \neg - \mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fr}_1 \vdash \mathtt{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash (\mathtt{fr}_1) \rightarrow (\mathtt{fr}_2), \Delta}\ \rightarrow - \mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathtt{fr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathtt{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, (\mathtt{fr}_1) \rightarrow (\mathtt{fr}_2) \vdash \Delta}\ \rightarrow - \mathrm{S}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \texttt{fr}[x/w]\ ,\ \nabla}{\Gamma \vdash\ \forall x\,\texttt{fr}\ ,\ \nabla}\ \forall\text{–D}\ (w \notin VL(\Gamma,\ \forall x\,\texttt{fr}\ ,\ \nabla))$$

$$\frac{\Gamma,\ \forall x\,\texttt{fr}\ ,\ \texttt{fr}[x/t_{ter}] \vdash \nabla}{\Gamma\ ,\ \forall x\,\texttt{fr} \vdash \nabla}\ \forall\text{–S}$$

$$\frac{\Gamma,\ \texttt{fr}[x/w] \vdash \nabla}{\Gamma,\ \exists x\,\texttt{fr} \vdash \nabla}\ \exists\text{–S}\ (w \notin VL(\Gamma, \exists x\,\texttt{fr}, \nabla))$$

$$\frac{\Gamma \vdash \texttt{fr}[x/t_{ter}]\ ,\ \exists x\,\texttt{fr}\ , \nabla}{\Gamma \vdash \exists x\,\texttt{fr}\ ,\ \nabla}\ \exists\text{–D}$$

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash t_{ter} = t_{ter}\ ,\ \Delta} = -\mathrm{ax}$$

$$\dfrac{\Sigma\ ,\ t_{ter}{=}s_{ter}\ ,\ \Gamma(t_{ter}) \vdash \Delta(t_{ter})\ ,\ \nabla}{\Sigma, \Gamma(s_{ter})\ ,\ t_{ter}{=}s_{ter} \vdash \Delta(s_{ter})\ ,\ \nabla} = -\mathrm{S}$$

Derivazione in LC$_=$

la **formalizzazione** $\forall x\ x{=}x$ dell'enunciato

"Ognuno è uguale a se stesso"

ha questa derivazione come sequente in LC$_=$

$$\dfrac{\dfrac{=\!-\mathrm{ax}}{\vdash w{=}w}}{\vdash \forall x\ x{=}x}\ \forall\!-\!\mathrm{D}$$

ove l'applicazione di $\forall\!-\!\mathrm{D}$ è lecita perchè la variabile w non compare proprio nel sequente radice.

Come usare la regola dell' uguaglianza a sx?

nella regola

$$\frac{\Sigma\,,\; t_{ter}{=}s_{ter}\;,\;\Gamma(t_{ter})\;\vdash\;\Delta(t_{ter})\;,\;\nabla}{\Sigma\,,\;\Gamma(s_{ter})\;,\;t_{ter}{=}s_{ter}\;\vdash\;\Delta(s_{ter})\;,\;\nabla}\;=\!-\mathrm{S}$$

i) $\Gamma(s_{ter})$ e $\Delta(s_{ter})$ sono liste di formule **ANCHE VUOTE!** dove compare s_{ter}

ii) dall'alto verso il basso: NON TUTTE le occorrenze di t_{ter} DEVONO essere rimpiazzate con s_{ter}

dal basso verso l'alto: NON TUTTE le occorrenze di s_{ter} DEVONO essere rimpiazzate con t_{ter}.

Derivazione della simmetria in LC$_=$

Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = s \vdash s = t$$

si può applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:

si pone

$$\Sigma \equiv \emptyset \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv x = t \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \qquad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\dfrac{}{t = s \vdash t = t}\,= -\mathrm{ax}}{t = s \vdash s = t}\,= -\mathrm{S}$$

NON tutte le occorrenze di s_{term} vanno sostituite in $= -\mathrm{S}$

Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza in presenza di un contesto EXTRA inutile $k = s$

$$k = s\,,\ ,t = s \vdash s = t$$

si può applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:

si pone

$$\Sigma \equiv k = s \qquad \Gamma(x) \equiv \emptyset \qquad \Delta(x) \equiv x = t \qquad \nabla \equiv \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(t) \equiv t = t \qquad\qquad \Delta(s) \equiv s = t$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\cfrac{\cfrac{= -\mathrm{ax}}{k = s\,,\ t = s \vdash t = t}}{k = s\,,\ t = s \vdash s = t}\ = -\mathrm{S}$$

SENZA sostituire il primo s con t lasciando invariante $k = s$

Derivazione della transitività in LC$_{=}$

Se vogliamo derivare la simmetria dell'uguaglianza

$$t = u\ ,\ u = s\ \vdash t = s$$

si può applicare la regola $= -\mathrm{S}$ in tal modo:

si pone

$$\Sigma \ \equiv\ t = u \qquad \Gamma(x)\ \equiv\ \emptyset \qquad \Delta(x)\ \equiv\ t = x \qquad \nabla\ \equiv\ \emptyset$$

e quindi si ha che

$$\Delta(u)\ \equiv\ t = u \qquad\qquad \Delta(s)\ \equiv\ t = s$$

e dunque il sequente si può derivare in tal modo:

$$\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{t = u\ ,\ u = s\ \vdash t = u}}{t = u\ ,\ u = s\ \vdash t = s}\ = -\mathrm{S}$$

Derivazione della formalizzazione II esempio in $LC_=$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{O(n), n{=}k \vdash O(n)}}{O(n), n{=}k \vdash O(k)}\; = -\mathrm{S}}{O(n), n{=}k \ \ \neg O(k) \vdash}\; \neg-\mathrm{S}}{O(n), \neg O(k)\, ,\ n{=}k \vdash}\; \mathrm{sc}_{sx}}{O(n), \neg O(k) \vdash \neg n{=}k}\; \neg-\mathrm{D}$$

Derivazione della formalizzazione III esempio in $\mathbf{LC}_=$

$$\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,)\,,\ O(n)\,,\ \neg n{=}k\ \vdash\ \neg O(m)$$

ove

$$\begin{array}{lcl}
\alpha & \equiv & \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,) \\
\beta & \equiv & \forall y_2\, (\, O(n)\ \&\ O(y_2) \rightarrow n{=}y_2\,)
\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{ax-id}}{\begin{array}{c} O(n), O(k), \\ \exists x\, O(x), \alpha, \beta \vdash O(n), n{=}k \end{array}} \qquad \overset{\text{ax-id}}{\begin{array}{c} O(n), O(k), \\ \exists x\, O(x), \alpha, \beta \vdash O(k)\,,\ n{=}k \end{array}}}{O(n)\,,\ O(k)\,,\ \exists x\, O(x)\,,\ \alpha, \beta, \vdash O(n)\ \&\ O(k)\,,\ n{=}k}\ \& -\mathrm{D} \qquad \overset{\text{ax-id}}{\begin{array}{c} O(n), O(k), \exists x\, O(x), \\ \alpha, \beta, n{=}k \vdash n{=}k \end{array}}}{O(n)\,,\ O(k)\,,\ \exists x\, O(x)\,,\ \alpha, \beta,\ O(n)\ \&\ O(k) \rightarrow n{=}k \vdash n{=}k}\ \rightarrow -\mathrm{S}$$

$$\begin{array}{cl}
O(n)\,,\ O(k)\,,\ \exists x\, O(x)\,,\ \alpha, \beta,\ O(n)\ \&\ O(k) \rightarrow n{=}k \vdash n{=}k & \\ \hline
O(n)\,,\ O(m)\,,\ \exists x\, O(x)\,,\ \alpha,\ \forall y_2\, (\, O(n)\ \&\ O(y_2) \rightarrow n{=}y_2\,) \vdash n{=}k & \forall -\mathrm{S}_v \\ \hline
O(n)\,,\ O(k)\,,\ \exists x\, O(x)\,,\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,) \vdash n{=}k & \forall -\mathrm{S} \\ \hline
O(n)\,,\ O(k)\,,\ \exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,) \vdash n{=}k & \& -\mathrm{S} \\ \hline
\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,)\,,\ O(n)\,,\ O(k)\ \vdash n{=}k & \mathrm{sc}_{sx} \\ \hline
\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,)\,,\ O(n)\,,\ O(k)\,,\ \neg n{=}k\ \vdash & \neg -\mathrm{S} \\ \hline
\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,)\,,\ O(n)\,,\ \neg n{=}k\,,\ O(k)\ \vdash & \mathrm{sc}_{sx} \\ \hline
\exists x\, O(x)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, O(y_1)\ \&\ O(y_2) \rightarrow y_1{=}y_2\,)\,,\ O(n)\,,\ \neg n{=}k\ \vdash\ \neg O(k) & \neg -\mathrm{D}
\end{array}$$

IV esempio Formalizzare e derivare in $LC_=$

Franco è venuto ad un' unica riunione.

Franco non è venuto all'ultima riunione.

Franco è venuto alla riunione del 10 giugno.

L'ultima riunione non è quella del 10 giugno.

usando

$V(x, y)$= x *è venuto alla riunione* y

u=*ultima riunione*

d=*riunione del 10 giugno*

f=*Franco*

l'argomentazione data si può formalizzare tramite il sequente

$$\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d) \vdash u \neq d$$

che è una **tautologia** perchè è derivabile in LC$_=$ ad esempio come segue:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{ax-id}}{\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,),\ u = d,\ V(f,u) \vdash V(f,u)}}{\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,),\ V(f,d), u = d \vdash V(f,u)}\ = -\mathrm{S}}{\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,)\,,\ V(f,d), u = d, \neg V(f,u) \vdash}\ \neg-\mathrm{S}}{\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d), u = d \vdash}\ \mathrm{sc}_{sx}}{\exists y\, V(f,y)\ \&\ \forall y_1\, \forall y_2\, (\, V(f,y_1)\ \&\ V(f,y_2) \rightarrow y_1 = y_2\,)\,,\ \neg V(f,u),\ V(f,d) \vdash u \neq d}\ \neg-\mathrm{D}$$