La proposizione scritta
in questo riquadro
è falsa.

4. Lezione Corso di Logica 2020/2021

9 ottobre 2020

Maria Emilia Maietti

email: maietti@math.unipd.it

alla ricerca della verità

la Logica si occupa di studiare la verità

di un'argomentazione o proposizione

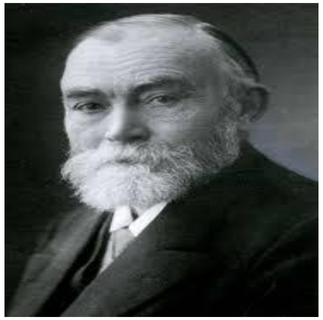
SOLTANTO in base alla sua forma logica

per definire quando una proposizione formale è ***vera***

ci serviamo delle **tabelle di verità**

introdotte nei lavori di:

Frege



Post

Russell

Wittgenstein

Tabella di verità di una proposizione

Ad ogni proposizione $\equiv \texttt{conn}(V_1, \ldots, V_n)$

costruita dalle proposizione atomiche $V_1, \ldots V_n$

si può associare una funzione

$$\texttt{Tab}_{\texttt{conn}(V_1,\ldots,V_n)} \; : \; \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$

rappresentata dalla tabella di verità

V_1	V_2	$\ldots$	V_n	$\mathtt{conn}(V_1, \ldots, V_n)$
0	1	$\ldots$	$\ldots$	c_1
0	0	$\ldots$	$\ldots$	c_2
1	1	$\ldots$	$\ldots$	c_3
1	0	$\ldots\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

che associa a $\mathtt{conn}(V_1, \ldots, V_n)$ un valore IN USCITA c_i che può solo essere 1 (per vero) oppure 0 (per falso)

al variare delle combinazioni di valori 0 e 1 associate alle proposizioni atomiche V_i per $i = 1, \ldots, n$

Come costruire le tabella di verità?

La tabella di ogni proposizione formale si costruisce componendo (come funzioni) le tabelle dei connettivi

$$\neg\,,\ \vee\,,\ \&\,,\ \rightarrow$$

che compongono la proposizioni

che sono definite a priori come segue.

Tabella di verità di $\neg$

si ottiene considerando che

$\neg A$ è vero sse A è falso

ed è la funzione unaria

A	$\neg A$
0	1
1	0

Tabella di verità di $\&$

si ottiene considerando che

$A\&B$ è vero sse A è vero e B è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$A\&B$
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

Tabella di verità di $\vee$

si ottiene considerando che

$A \vee B$ è vero sse A è vero o B è vero o sono veri entrambi

ed è la funzione binaria

A	B	$A \vee B$
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

Tabella di verità di $\rightarrow$

si ottiene considerando che

$A \rightarrow B$ è vero sse $\neg A \vee B$ è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$A \rightarrow B$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

VERITÀ in logica CLASSICA di una proposizione

la proposizione `pr` si dice vera in **logica classica**

e nel gergo logico `pr` si dice **TAUTOLOGIA**

sse

la tabella di verità di `pr` dà sempre 1 in uscita

Esempio di uso tabelle di verità

$(A \to B) \& A$ è una tautologia?

Esempio di uso tabelle di verità

Se facciamo la tabella di verità per $(A \rightarrow B) \& A$

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \& A$
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

concludiamo che $(A \rightarrow B) \& A$ NON è una tautologia

perchè la sua tabella NON ha TUTTI $\mathbf{1}$ in uscita!!

un esempio di tautologia ??

La formalizzazione (letterale) dell'enunciato

> "**Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli**
>
> **oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica**"

usando:

A="**Voi passerete l'esame di logica**"

B="**Avete una zia con i calli**"

è una **tautologia**?

Esempio controintuitivo di tautologia

La formalizzazione (letterale) dell'enunciato

"**Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli**

oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica"

usando:

A="**Voi passerete l'esame di logica**"

B="**Avete una zia con i calli**"

è la seguente proposizione:

$$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$$

e se si construisce la sua tabella di verità si scopre che

$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$ è una **tautologia** in quanto la sua tabella ha TUTTI $\mathbf{1}$ in uscita!!!

Esempio controintuitivo di tautologia

La proposizione $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$

è quindi (sorprendentemente!) una **TAUTOLOGIA**

ovvero sempre vera per ogni proposizione sostituita al posto di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$

secondo la logica classica di Aristotele

L'implicazione classica è una DISGIUNZIONE!!!

Guardando alla tabella di verità del connettivo d'implicazione classica

si nota che l'implicazione classica

$$pr_1 \rightarrow pr_2$$

significa in realtà $\neg(pr_1) \vee (pr_2)$

secondo la logica classica di Aristotele

Chiarimento della verità logica di

"Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli

oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica"

La **forma logica** $(\, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \,) \vee (\, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \,)$ dell'enunciato

> **“Se voi passerete l'esame di logica allora avete una zia con i calli**
>
> **oppure se avete una zia con i calli allora passerete l'esame di logica”**

usando:

A=“**Voi passerete l'esame di logica**”

B=“**Avete una zia con i calli**”

secondo la **logica classica** ha la stessa tabella di verità di :

$$(\, \neg A \vee B \,) \vee (\, \neg B \vee A \,)$$

ovvero di **“O voi non passerete l'esame di logica oppure avete una zia con i calli,**

oppure non avete una zia con i calli oppure passerete l'esame di logica”

che è *chiaramente vera sempre*!!!

stessa tabella per proposizioni diverse??

Se due proposizioni formali $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

hanno la STESSA tabella di verità

allora $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ sono la STESSA PROPOSIZIONE ??

NOOO !!

esempio di proposizioni diverse con stessa tabella

la tabella di $\neg A$

A	$\neg A$
0	1
1	0

è anche la tabella di verità per $\neg A \& \neg A$

e anche per $(\ \neg A \& \neg A\ ) \& \neg A$

e per $(\ (\ \neg A \& \neg A\ ) \& \neg A\ ) \& \neg A$

che sono però proposizioni sintatticamente diverse!!!

equivalenza *di proposizioni formali*

Diciamo che

“$\texttt{pr}_1$ è equivalente a “$\texttt{pr}_2$”

se e solo se

$\texttt{pr}_1$ e $\texttt{pr}_2$ hanno la stessa tabella di verità

Connettivo equivalenza

Indichiamo con il segno

$$\leftrightarrow$$

il connettivo equivalenza come **ABBREVIAZIONE** di:

date proposizioni formali $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

$$\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2 \;\equiv\; (\,\mathtt{pr}_1 \rightarrow \mathtt{pr}_2\,)\;\&\;(\,\mathtt{pr}_2 \rightarrow \mathtt{pr}_1\,)$$

che si legge "$\mathtt{pr}_1$ è equivalente a "$\mathtt{pr}_2$"

Tabella di verità di equivalenza

$$A \leftrightarrow B \;\equiv\; (\, A \rightarrow B \,)\ \&\ (\, B \rightarrow A \,)$$

ha la seguente tabella di verità

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Dalla tabella di $\leftrightarrow$ segue che:

$\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ è **tautologia**

(ovvero la sua tabella ha tutti $\mathbf{1}$ in uscita)

se e solo se

$\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ hanno la stessa tabella di verità

ovvero $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ sono **equivalenti**

perchè la tabella di $\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ è ottenuta da quelle di $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$

componendo con la tabella di $\leftrightarrow$

e quindi la tabella di $\mathtt{pr}_1 \leftrightarrow \mathtt{pr}_2$ su una stessa riga d'entrata dà $\mathbf{1}$ in uscita

se e solo se le tabelle di $\mathtt{pr}_1$ e $\mathtt{pr}_2$ sulla stessa entrata

danno tutti e due $\mathbf{1}$ oppure tutti e due $\mathbf{0}$

ovvero le loro tabelle concordano in uscita su una stessa entrata e sono quindi uguali!

classificazione in logica classica delle proposizioni formali

Per ogni proposizione formale $\mathtt{pr}$ definiamo

$\mathtt{pr}$ **TAUTOLOGIA**	$\mathtt{pr}$ **OPINIONE**	$\mathtt{pr}$ PARADOSSO
TUTTE le uscite 1 nella tabella di $\mathtt{pr}$	ALMENO un'uscita 1 + ALMENO un'uscita 0 nella tabella di $\mathtt{pr}$	TUTTE le uscite 0 nella tabella di $\mathtt{pr}$

Esempi

TAUTOLOGIA	OPINIONE	PARADOSSO
$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$	A	$\mathbf{A}\ \&\ \neg\mathbf{A}$