15. Nozione di modello e verità di un predicato

Def. (**modello di un linguaggio predicativo**) Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_j}$ e *predicati atomici* $\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)}$ un **modello** per $\mathcal{L}$ è dato da

$$(\mathbf{D} \ , \ \mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)^D} \ , \ \mathbf{c_j^D} \ )$$

ove

- un dominio (=insieme NON VUOTO) $\mathbf{D}$

- un'interpretazione delle **costanti** $\mathbf{c_j^D}$ come **elementi** di $\mathbf{D}$ e di **predicati atomici** (diversi dall'uguaglianza!) come **funzioni**:

costante $\mathbf{c_j}$	$\rightsquigarrow$	elemento di dominio $\mathbf{c_j}^{\mathbf{D}} \varepsilon \mathbf{D}$
predicato **atomico** $\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)}$	$\rightsquigarrow$	funzione $\mathbf{P_k(x_1, \ldots, x_n)}^{\mathbf{D}}(-, \ldots, -) : \mathbf{D}^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$
variabile proposizionale $\mathbf{B}$ ovvero predicato **atomico** senza variabili libere	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{B}^{\mathcal{D}} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

Definizione di interpretazione e verità predicati con UNA variabile libera:
Dato un modello $\mathcal{D}$ per un generico predicato $\mathtt{pr(x)}$ diciamo che

$\forall \mathbf{x}\ \mathtt{pr(x)}$ è vero nel modello con dominio D

se *PER OGNI* $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ $\quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

sse

$\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D} \quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

sse

$\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D} \quad \mathtt{pr(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$

se il modello è per il linguaggio con tutti i nomi degli elementi di D

$\exists \mathbf{x}\ \mathtt{pr(x)}$ è vera nel modello con dominio D

se *ESISTE* $d \in \mathcal{D}$ tale che $\quad \mathtt{pr(x)}^{D}(d) = 1$

sse

$\exists \mathbf{d} \in \mathcal{D} \quad \mathtt{pr(x)}^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$

sse

$\exists \mathbf{d} \in \mathcal{D} \quad \mathtt{pr(\tilde{d})}^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$

se il modello è per il linguaggio con tutti i nomi degli elementi di D)

ed infine

$\texttt{pr(x)}$ è **vero** nel modello $\mathcal{D}$
sse
$\forall \texttt{x}\ \texttt{pr(x)}$ è **vero** nel modello $\mathcal{D}$

e TUTTI gli altri connettivi proposizionali vengono INTERPRETATI nel modello secondo le tabelle di verità a partire dai valori assegnati alle loro componenti.

Conviene usare modelli con nomi dei loro elementi

Dato linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ con costanti $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ e **predicati atomici** $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ e un dominio

$$\mathbf{D}$$

conviene costruire modelli NON per $\mathcal{L}$ soltanto MA per il linguaggio $\mathcal{L}^{\mathbf{D}}$ ottenuto estendendo $\mathcal{L}$ con NUOVE costanti

$$\tilde{\mathbf{d}}$$

intese come *nomi degli elementi* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ e questo significa costruire un **modello**, che chiamiamo **modello con nomi**

$$(\ \mathbf{D}\ ,\ \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}\ ,\ \mathbf{c_1^D}\ ,\ \mathbf{c_2^D}\ ,\ \ (\tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}})_{\mathbf{d}\in\mathbf{D}}\ )$$

ponendo

$$\tilde{\mathbf{d}}^{\mathbf{D}} = \mathbf{d} \in \mathbf{D}$$

e poi definendo a piacere l'interpretazione delle costanti

$$\mathbf{c_1^D} \in \mathbf{D} \qquad \mathbf{c_2^D} \in \mathbf{D}$$

e dei predicati **atomico** USANDO i nomi degli elementi di D

$$\begin{array}{lccc} \mathbf{P}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(-) & \mathbf{D} & \longrightarrow & \{\mathbf{0},\mathbf{1}\} \\ & \mathbf{d} & \mapsto & \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} \mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathbf{D}}(-) & \mathbf{D}\times\mathbf{D} & \longrightarrow & \{\mathbf{0},\mathbf{1}\} \\ & (\mathbf{d_1},\mathbf{d_2}) & \mapsto & \mathbf{Q}(\ \tilde{\mathbf{d_1}}\ ,\ \tilde{\mathbf{d_2}}\ )^{\mathbf{D}} \end{array}$$

In questi modelli per interpretare i predicati si può usare la seguente notazione:

$$(\mathbf{t_1}{=}\mathbf{t_2})^{\mathcal{D}} \;\equiv\; \mathbf{t_1^{\mathcal{D}}} =_{\mathcal{D}} \mathbf{t_2}^{\mathcal{D}}$$

ove $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ sono costanti e $\mathbf{t_1}^{\mathbf{D}} =_{\mathcal{D}} \mathbf{t_2}^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{t_1}^{\mathbf{D}} = \mathbf{t_2}^{\mathbf{D}} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{t_1}^{\mathbf{D}} \neq \mathbf{t_2}^{\mathcal{D}} \end{cases}$

$$(\neg \mathtt{pr}(\mathtt{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\neg \mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$$

ove $(\neg \mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \end{cases}$

$$(\mathtt{pr}_1(\mathtt{x}) \,\&\, \mathtt{pr}_2(\mathtt{x})^{\mathbf{D}})(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\mathtt{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \,\&\, (\mathtt{pr}_2(\mathtt{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \,\&\, (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$$

ove $(\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \,\&\, (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \quad \textbf{E} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad \text{oppure} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$$(\mathtt{pr}_1(\mathtt{x}) \vee \mathtt{pr}_2(\mathtt{x})^{\mathbf{D}})(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\mathtt{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \;\vee\; (\mathtt{pr}_2(\mathtt{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \;\vee\; (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$$

ove $(\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \;\vee\; (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \quad \textbf{oppure} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad \text{E} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$$(\mathtt{pr}_1(\mathtt{x}) \to \mathtt{pr}_2(\mathtt{x})^{\mathbf{D}})(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\mathtt{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \;\to\; (\mathtt{pr}_2(\mathtt{x}))^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \;\to\; (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$$

ove $(\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \;\to\; (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad \textbf{oppure} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti ovvero se } (\mathtt{pr}_1(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \quad \text{E} \quad (\mathtt{pr}_2(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$$(\forall \mathbf{x}\; \mathtt{pr}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}} = \forall\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\;\; \mathtt{pr}(\mathtt{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \forall\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\;\; (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$$

ove $\forall\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\;\; (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se} \quad \mathtt{PER\ OGNI}\ \mathbf{d} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{se} \quad \text{esiste un } \mathbf{d} \quad \text{(falsario!) tale che} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

$$(\exists \mathbf{x}\; \mathtt{pr}(\mathbf{x}))^{\mathbf{D}} = \exists\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\;\; \mathtt{pr}(\mathtt{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \exists\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\;\; (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}}$$

ove $\exists\, \mathbf{d} \in \mathbf{D}\;\; (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se} \quad \mathtt{ESISTE}\ \mathbf{d} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{se} \quad \text{OGNI } \mathbf{d} \quad \text{è (un falsario!) tale che} \quad (\mathtt{pr}(\widetilde{\mathbf{d}}))^{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \end{cases}$

Esempi di modelli:

Il linguaggio predicativo con predicati atomici e costanti

$\mathbf{M}(\mathbf{x})=$ "x è mortale"
$\mathbf{U}(\mathbf{x})=$ "x è un uomo"
$\overline{s}$ = "Socrate".

corrisponde ad un modello del tipo:

$D=$ Esseri viventi
$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "d è mortale" per $d \in D$
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "d è un uomo" per $d \in D$
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ = "Socrate".

In tal modello la proposizione

$$\mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{s}^{\mathbf{D}}) = 1$$

e quindi otteniamo che l'implicazione

$$\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \;\rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,\&\,\mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}}) \;\rightarrow\; \mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}}) \qquad \text{è vera nel modello}$$

ossia vale

$$(\forall \mathbf{x}\,(\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \;\rightarrow\; \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,\&\,\mathbf{U}(\overline{\mathbf{s}}) \;\rightarrow\; \mathbf{M}(\overline{\mathbf{s}})\;)^{\mathcal{D}} = 1$$

Inoltre vale in tal modello

si ha $(\forall \mathbf{x}\;(\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \;\rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,)^{\mathcal{D}} = 1$ perchè tutti gli uomini sono appunto mortali in quanto:

per ogni d essere vivente vale

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

e quindi vale

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) \;\rightarrow\; \mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

ovvero

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) \;\rightarrow\; \mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Se lavoriamo nel modello per il linguaggio con tutti i nomi dei suoi elementi:

$D=$ Esseri viventi
$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "**d è mortale**" per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(d)$=1 sse "**d è un uomo**" per $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ = "**Socrate**"
$\tilde{\mathbf{d}}^{\mathcal{D}} = \mathbf{d}$ per ogni essere vivente $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$.

per ogni **d** *essere vivente* vale

$$\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} = 1$$

e quindi vale

$$\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} \;\rightarrow\; \mathbf{U}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

che rappresenta l'interpretazione del predicato sostituendo al posto della $\mathbf{x}$ tutti gli elementi del dominio $\mathbf{D}$.

Un altro modello per il linguaggio predicativo con $\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}$ è si ottiene prendendo come dominio

$\mathbf{D}= \{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$

$\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è maschio
$\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=1 sse $\mathbf{d}$ è femmina
$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =$\texttt{Minni}$.

In tal modello si ha $(\,\forall \mathbf{x}\ (\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \;\rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,)^{\mathcal{D}} = 0$
perchè esiste un individuo del dominio per cui $(\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = 0$ e questo individuo esiste ponendo $\mathbf{d} = \texttt{Minni}$, dato che $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ($\texttt{Minni}$)=0 e $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ($\texttt{Minni}$)=1.

e nel modello associato con i nomi degli elementi del dominio

$\mathbf{D}= \{\texttt{Pippo}, \texttt{Minni}\}$

$\overline{s}^{\mathcal{D}}$ =$\texttt{Minni}$.
$\widetilde{\texttt{Minni}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Minni}$
$\widetilde{\texttt{Pippo}}^{\mathcal{D}} = \texttt{Pippo}$

potremmo semplicemente dire:

chi è $\mathbf{M}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ponendo

$$\mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

chi è $\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}$ ponendo

$$\mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Pippo}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

visto che informalmente

$\mathbf{M}(\mathbf{x})$= $\mathbf{x}$ è una femmina
$\mathbf{U}(\mathbf{x})$= $\mathbf{x}$ è un maschio

Quindi in tal modello si ha $(\,\forall \mathbf{x}\ (\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \;\rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})\,)\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$
perchè esiste un individuo del dominio per cui

$$(\,\mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Minni}}) \;\rightarrow\; \mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1} \;\rightarrow\; \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

dato che

$$\mathbf{M}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{U}(\widetilde{\texttt{Minni}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

L'interpretazione dell'uguaglianza è la STESSA in ogni modello

Nel definire un modello NON si deve menzionare l'interpretazione dell'uguaglianza perchè la sua interpretazione è la **STESSA in TUTTI i modelli** e corrisponde all'**uguaglianza degli elementi che interpretano i termini all'interno del dominio D di un modello $\mathcal{D}$** come segue:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^D(-) : D^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}^D(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

ovvero se il modello $\mathcal{D}$ con dominio D ha nomi per tutti gli elementi di D allora

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(-) : \mathbf{D^2} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y})^D(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \widetilde{\mathbf{d_1}} = \widetilde{\mathbf{d_2}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \\ 0 & \text{se } \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

e nel caso di due costanti

$$(\mathbf{c_1} = \mathbf{c_2})^D \in \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{c_1} = \mathbf{c_2})^D \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{c_1}^{\mathcal{D}} = \mathbf{c_2}^{\mathcal{D}} \\ 0 & \text{se } \mathbf{c_1}^{\mathcal{D}} \neq \mathbf{c_2}^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

e nel caso di una costante e variabile

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^D(-) : D \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(\mathbf{x} = \mathbf{c})^D(\mathbf{d}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{d} = \mathbf{c}^{\mathcal{D}} \\ 0 & \text{se } \mathbf{d} \neq \mathbf{c}^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

e analogamente si definisce l'interpretazione di $c = x$.

Esempi:

Nel seguente modello associato con i nomi degli elementi del dominio

$\mathbf{D}=\{\texttt{Pippo}, \texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}$
$a^{\mathcal{D}}=$Minni
$b^{\mathcal{D}}=$Minni.
$\widetilde{\texttt{Minni}}^{\mathcal{D}}=\texttt{Minni}$
$\widetilde{\texttt{Pippo}}^{\mathcal{D}}=\texttt{Pippo}$
$\widetilde{\texttt{Topolino}}^{\mathcal{D}}=\texttt{Topolino}$

$$(\mathbf{a}=\mathbf{b})^{\mathcal{D}}=(\widetilde{\texttt{Minni}}=\widetilde{\texttt{Minni}})^{D}=\mathbf{1}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}}=\texttt{Minni}=\mathbf{b}^{\mathcal{D}}$

invece nel modello

$\mathbf{D}=\{\texttt{Pippo}, \texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}$
$b^{\mathcal{D}}=$Pippo
$a^{\mathcal{D}}=$Minni.
$\widetilde{\texttt{Minni}}^{\mathcal{D}}=\texttt{Minni}$
$\widetilde{\texttt{Pippo}}^{\mathcal{D}}=\texttt{Pippo}$
$\widetilde{\texttt{Topolino}}^{\mathcal{D}}=\texttt{Topolino}$

$$(\mathbf{a}=\mathbf{b})^{\mathcal{D}}=(\widetilde{\texttt{Minni}}=\widetilde{\texttt{Pippo}})^{D}=\mathbf{0}$$

perchè $\mathbf{a}^{\mathcal{D}}=\texttt{Minni}\neq\mathbf{b}^{\mathcal{D}}=\texttt{Pippo}$.

Quindi il sequente

$$\vdash \mathbf{a}=\mathbf{b}$$

è un opinione perchè c'è un modello in cui è falso (il secondo) e un modello in cui è vero (il primo).

Memo

per **falsificare** una formula con una variabile libera $\texttt{pr}(\mathbf{x})$ in un modello $\mathcal{D}$
BASTA TROVARE un FALSARIO d
tale che

$$\texttt{pr}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\texttt{pr}(\tilde{\mathbf{d}})^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$

se il modello è semplificato con tutti i nomi degli elementi del dominio

e **NON c'è bisogno che TUTTI gli elementi d del dominio D** risultino **falsari** della funzione che interpreta $\texttt{pr}(\mathbf{x})$!!!.

	Linguaggio proposizionale	Linguaggio predicativo
sintassi	proposizione	predicati
Variabili	A, B, C, ...	K, A(x), B(y), C(x,y), ...
verità globale	tabella di verità	I modelli
verità locale	riga di tabella	UN modello
Tautologica	proposizione **tautologica** **=sua tabella con TUTTI 1**	predicato **tautologico** **= vero in TUTTI i modelli**
NON validità	proposizione **NON valida** **= sua tabella con UNA riga 0**	predicato **NON valido** **= falso in UN modello** detto **CONTROMODELLO**
soddisfacibilità	proposizione **soddisfacibile** **= sua tabella con UNA riga 1**	predicato **soddisfacibile** **=vero in UN modello**
opinione	proposizione **opinione** **= sua tabella con UNA riga 0** + **= sua tabella con UN'altra riga 1**	predicato **opinione** **=falso in UN modello** + **=vero in UN altro modello**
INsoddisfacibilità	proposizione **INsoddisfacibile** **paradosso** **=sua tabella con TUTTI 0**	predicato **INsoddisfacibile** **paradosso** **=falso in TUTTI i modelli**

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **vero in modello** $\mathcal{D}$ se $\mathbf{\Gamma}^{\&} \;\rightarrow\; \mathbf{\Delta}^{\vee}$ è **vero nel modello** $\mathcal{D}$.

Def. un sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$ è **VALIDO**, **OPINIONE** o **PARADOSSO** nella semantica classica, se lo è $\mathbf{\Gamma}^{\&} \;\rightarrow\; \mathbf{\Delta}^{\vee}$.

Esempio: La formula
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$$
NON è una tautologia perchè **NON valida** in quanto **falsa** in tal modello che diventa un suo **contromodello**:

D$= \{\texttt{Topolino}, \texttt{Minni}\}$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$=**1** sse **d** è maschio

In tal modello $\mathcal{D}$ si ha che
$$(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \forall \mathbf{d} \in \{\texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}$$
perchè
$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\texttt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$$
ovvero `Minni` è un falsario del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Inoltre
$$\begin{aligned}
(\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\ )^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) \quad &= (\mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}}(\texttt{Minni}) \ \rightarrow\ (\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} \\
&= (A(\widetilde{\texttt{Minni}})\,)^{\mathcal{D}} \ \rightarrow\ \forall \mathbf{d} \in \{\texttt{Minni}, \texttt{Topolino}\}\ \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{d}}) \\
&= \mathbf{1} \ \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$
perchè
$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{\mathcal{D}}(\texttt{Topolino}) = (\mathbf{A}(\widetilde{\texttt{Topolino}})\,)^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$
mentre $(\forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x}))^{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$, ovvero `Topolino` è un **falsario** del predicato $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \rightarrow \forall \mathbf{x}\, \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

15.bis Come decidere validità in logica classica predicativa

Al contrario della logica classica proposizionale, per la **logica classica predicativa NON esiste una procedura AUTOMATICA per decidere la validità di arbitrarie formule o sequenti**.

Esiste però una **procedura SEMI-automatica** che si avvale del calcolo dei sequenti LC e richiede la costruzione di contro-modelli nel caso di non validità.

Procedura per stabilire validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità di sequenti in LC

Dato sequente $\Gamma \vdash \Delta$

`passo 1`: si prova a derivarlo in LC

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{ è valido ovvero è } \textbf{tautologia} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{cases}$$

`passo 2`: costruisci contromodello con foglia di albero che NON si chiude

se esiste contromodello $\Rightarrow$ il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON valido**

e vai al passo 3

`passo 3`: prova a derivare la negazione di $\Gamma \vdash \Delta$ in $\mathbf{LC}_=$

che è $\vdash \neg(\mathbf{\Gamma}^\& \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee)$ se non ci sono variabili libere

oppure è $\vdash \neg\forall\overline{\mathbf{y}}(\mathbf{\Gamma}^\& \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee)$ se $\overline{\mathbf{y}}$ è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente $\mathbf{\Gamma} \vdash \mathbf{\Delta}$

$$\begin{cases} \text{se si deriva} & \Rightarrow\ \Gamma \vdash \Delta \text{ è insoddisfacibile ovvero è } \textbf{paradossale} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{applica il passo 2 a } \vdash \neg(\Gamma^\& \rightarrow \Delta^\vee) \\ & \text{se trovi contromodello di } \neg(\Gamma^\& \rightarrow \Delta^\vee) \text{ (oppure di } \vdash \neg\forall\overline{\mathbf{y}}(\mathbf{\Gamma}^\& \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee) \text{)} \\ & \text{questo è modello di } \Gamma^\& \rightarrow \Delta^\vee \\ & \text{che è quindi anche modello di } \Gamma \vdash \Delta \\ & \Rightarrow\ \Gamma \vdash \Delta \text{ è } \textbf{soddisfacibile} \\ & \text{e siccome è pure non valido allora risulta } \textbf{OPINIONE} \end{cases}$$

Alcuni consigli

Nell'intento di cercare una derivazione è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e ∀-D e ∃-S
se non si riesce a derivare il sequente a causa di una foglia non assioma che non si riesce a chiudere (ovvero non si riesce a farla diventare nodo di un ramo con assiomi come foglie), conviene costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che finisce nella foglia non assioma PRIMA di un'applicazione (o di una seconda applicazione) di ∀-S o ∃-D

Esercizi

1. Provare a classificare le seguenti formule in tautologie, opinioni, paradossi utilizzando solo la nozione di modello:
   (a) $A(c)$

   (b) $A(x) \ \to \forall x\, A(x)$

   (c) $A(c) \ \to \forall x\, A(x)$

   (d) $A(c) \ \to \exists x\, A(x)$

   (e) $\exists x\, A(x) \ \to \forall x\, A(x)$

   (f) $\mathcal{D} \equiv \{$ i sogni del mio vicino di banco $\}$
   $A(x)^{\mathcal{D}}(d) = 1$ sse il sogno d fa paura
   $A(x)^{\mathcal{D}}(d) = 0$ sse il sogno d NON fa paura
   $c^{\mathcal{D}} =$ il sogno più brutto
   è un modello ben definito per il linguaggio con $A(x)$ e c ??

   in questo modello vale $\forall x\ A(x)$??

   (g) $\forall x\, \exists y\ B(x, y)$

   (h) $B(x, y) \ \to \ A(x)$

2. Si stabilisca se i sequenti qui elencati sono tautologie, opinioni o paradossi
   (a) $\vdash \exists x\ A(x) \ \to \forall x\ A(x)$
   (b) $\vdash \exists y\ \forall x\ x = y$
   (c) $\vdash \forall x\ \forall y\ \ x = y$
   (d) $\vdash \forall y\ \forall x\ (\ y = z \to x = z\ )$

3. Si classifichino in termini di tautologia, opinione e paradosso le formalizzazioni delle seguenti argomentazioni

   (a) $\dfrac{\text{Ognuno sta attento oppure tutti dormono.}}{\text{Ciascuno o sta attento o dorme.}}$

   usando:
   A(x)=x sta attento
   D(x)=x dorme

   (b) $\dfrac{\text{Ciascuno o sta attento o dorme.}}{\text{Tutti stanno attenti oppure tutti dormono.}}$

usando:
A(x)=x sta attento
D(x)=x dorme

(c) $$\frac{\text{Non tutti i programmi sono utili e corretti.}}{\text{Esiste un programma non utile.}}$$

usando
$P(x)$=”x è un programma”
$U(x)$=”x è utile”
$C(x)$=”x è corretto”

(d) $$\frac{\text{Non tutti i programmi sono utili e corretti.}}{\text{Esiste un programma non utile o esiste un programma non corretto.}}$$

usando
$P(x)$=”x è un programma”
$U(x)$=”x è utile”
$C(x)$=”x è corretto”

(e) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo i buoni sono stimati da tutti.}\\ \text{Alberto è buono.}\end{array}}{\text{Alberto è stimato da tutti.}}$$

usando
$S(x, y)$=”x stima y”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”

(f) $$\frac{\begin{array}{l}\text{I buoni e soltanto loro sono stimati da tutti.}\\ \text{Alberto è buono.}\end{array}}{\text{Alberto è stimato da tutti.}}$$

usando
$S(x, y)$=”x stima y”
$B(x)$= “x è buono”
a=”Alberto”

(g) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Ciascuno possiede ciò che non ha perduto.}\\ \text{Alberto non ha perduto la Ferrari testa rossa.}\end{array}}{\text{Alberto possiede la Ferrari testa rossa.}}$$

usando
$P(x, y)$=”x possiede y”
$E(x, y)$= “x ha perduto y”
f=”Ferrari testa rossa”

(h) $$\frac{\begin{array}{l}\text{Solo i buoni sono stimati da tutti.}\\ \text{Alberto è stimato da tutti.}\end{array}}{\text{Alberto è buono.}}$$

usando
$S(x, y)$="x stima y"
$B(x)$= "x è buono"
a="Alberto"

(i) $\dfrac{\text{Nessuno è buono e cattivo.}}{\text{Ogni buono non è cattivo.}}$

usando
$C(x)$= "x è cattivo"
$B(x)$= "x è buono"
a="Alberto"

(j) $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Non tutti i programmi hanno un ciclo.}\\ \text{Se un programma non ha un ciclo termina.}\end{array}}{\text{Qualche programma non termina.}}$

usando
$P(x)$= "x è programma"
$T(x)$= "x termina"
$C(x)$= "x ha un ciclo"

(k) $\dfrac{\text{Tutti, se piove, si riparano.}}{\text{Tutti si riparano se piove.}}$

usando
P= "Piove"
$0(x)$= "x si ripara"

(l) $\dfrac{\text{Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.}}{\text{C'è qualcuno di cui nessuno è più alto.}}$

usando
$\overline{p}$="Piero"
$A(x, y)$="x è più alto di y"

(m) $\dfrac{\text{Non si dà il caso che qualcuno sia più alto di Piero.}}{\text{Nessuno è più alto di Piero.}}$

usando
$\overline{p}$="Piero"
$A(x, y)$="x è più alto di y"

(n) $\dfrac{\begin{array}{l}\text{Solo se uno è italiano o francese può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\\ \text{Marc non è italiano.}\\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.}\end{array}}{\text{Marc è francese.}}$

usando
$\overline{m}$="Marc"
$I(x)$="x è italiano"
$F(x)$="x è francese"

$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

(o)
$$\begin{array}{l} \text{Se uno è italiano o francese può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.} \\ \text{Marc non è italiano.} \\ \text{Marc può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia.} \\ \hline \text{Marc è francese.} \end{array}$$

usando
$\overline{m}$="Marc"
$I(x)$="x è italiano"
$F(x)$="x è francese"
$P(x)$=" x può partecipare al programma di scambio culturale Italia-Francia"

Curiosità

Si stabilisca se i sequente ottenuti formalizzando le seguenti argomentazioni sono tautologia, opinione o paradosso:

1.
$$\begin{array}{l} \text{Ciascuno possiede solo ciò che non ha perduto.} \\ \text{Filippo ha perduto un miliardo.} \\ \hline \text{Filippo possiede un miliardo.} \end{array}$$

usando
$P(x, y)$="x possiede y"
$E(x, y)$= "x ha perduto y"
m="un miliardo"
f="Filippo"

2.
$$\begin{array}{l} \text{Ciascuno possiede solo ciò che non ha perduto.} \\ \text{Nessuno ha perduto un miliardo.} \\ \hline \text{Tutti possiedono un miliardo.} \end{array}$$

usando i predicati dell'argomentazione precedente.

3. "Non si dà il caso che in ogni bar aperto (e non vuoto!) di Padova ci sia uno che se lui beve nel bar allora tutti nel bar bevono."

   si consiglia di usare:
   $P(x)$= x è un bar aperto di Padova
   $B(x, y)$=x beve
   $I(x, y)$=x è in y