

## Esercizi 1. Alcune tautologie classiche e intuizioniste

1. Si derivi sia in  $DNC_{=}$  che in  $DNI_{=}$

$$\vdash (A \& B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

2. Si derivi in  $DNC_{=}$

$$\vdash (C \& A \rightarrow B \vee D) \leftrightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B) \vee D)$$

3. Si derivi in  $DNC_{=}$

$$\vdash (C \& A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow \neg A \vee B)$$

4. Si derivi sia in  $DNC_{=}$  che in  $DNI_{=}$

$$\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$$

5. Si derivi sia in  $DNC_{=}$  che in  $DNI_{=}$

$$\vdash A \& B \rightarrow (C \rightarrow B)$$

6. Si derivi sia in  $DNC_{=}$  che in  $DNI_{=}$

$$A \vee B \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$$

7. Si derivi sia in  $DNC_{=}$  che in  $DNI_{=}$

$$(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \vdash A \vee B \rightarrow C$$

8. Si derivi in  $DNC_{=}$

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

9. Si derivi in  $DNI_{=}$

$$\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$$

## Esercizio di comprensione uso ex-falso-quodlibet in matematica

Si consideri il linguaggio predicativo con uguaglianza con l'aggiunta dei simboli di predicato atomico

$$\begin{aligned}\emptyset &= \text{insieme vuoto} \\ \Xi(x, y) &= \text{l'insieme } x \text{ appartiene all'insieme } y \\ C(x, y) &= \text{l'insieme } x \text{ è contenuto nell'insieme } y\end{aligned}$$

si trovi una derivazione in  $DNC_{=}$  e in  $DNI_{=}$  di

$$\neg \exists x \Xi(x, \emptyset) \vdash \forall z \forall y ( \Xi(y, \emptyset) \rightarrow \Xi(y, z) )$$

e di

$$\neg \exists x \Xi(x, \emptyset) , \forall x \forall z \forall y ( \Xi(y, x) \rightarrow \Xi(y, z) ) \leftrightarrow C(x, y) \vdash \forall z C(\emptyset, z)$$

In altri parole se operiamo le seguenti identificazioni linguistiche con i predicati ben noti in matematica

$$\begin{aligned}x \varepsilon y &= \Xi(x, y) \\ x \subseteq y &= C(x, y)\end{aligned}$$

si trovi una derivazione di

$$\neg \exists x x \varepsilon \emptyset \vdash \forall z \emptyset \subseteq z$$

ovvero si dimostri che *l'insieme vuoto è contenuto in ogni altro* che si può pensare un *insieme* nell'ipotesi di restringere il dominio di quantificazione dei quantificatori ai soli insiemi (il che però NON è necessario se l'insieme vuoto non contiene alcunchè....)