

Simulazione di Appello di LOGICA MATEMATICA

14 gennaio 2019

nome:

cognome:

- Scrivete in modo CHIARO. Elaborati illegibili non saranno considerati.
- NON si considerano le BRUTTE copie.
- Ricordatevi di ESPLICITARE l'uso della regola dello scambio sia a destra che a sinistra del sequente (se non lo fate perdete punti!).
- Ricordatevi di ETICHETTARE LE DERIVAZIONI CON LE REGOLE USATE (se non lo fate perdete punti!).
- ATTENZIONE: se si risolvono correttamente TUTTI gli esercizi con il segno ++ si prende il voto 30 indipendentemente dall'aver o meno un bonus accumulato.

- Mostrare se i sequenti di seguito sono tautologie o opinioni o paradosso in logica classica e in logica intuizionista con uguaglianza.

Il punteggio indicato è assegnato alla classificazione del sequente nella singola logica classica e intuizionista. In caso di opinione o paradosso classico il punteggio viene raddoppiato. In caso di tautologia classica ma non intuizionista o paradosso classico il punteggio relativo alla classificazione intuizionista viene raddoppiato.

Nel caso di tautologia intuizionista del sequente la derivazione mostrata in **DNI**₌ conta una volta e mezza il punteggio indicato.

Nel caso di tautologia classica ma non intuizionista la derivazione in **DNC**₌ della tautologia conta il doppio del punteggio indicato.

Nel caso di NON validità classica la costruzione di una valutazione che falsifica un sequente proposizionale conta due punti.

Nel caso di NON validità classica la costruzione di una valutazione che falsifica un sequente predicativo conta quattro punti.

Nel caso di tautologia classica e opinione intuizionista la costruzione di una valutazione che falsifica un sequente proposizionale conta cinque punti.

(2 punti)

$\vdash \neg(C \rightarrow A) \& (A \vee \neg A)$

(4 punti)

$\neg\neg(\neg C \rightarrow \neg M) \vdash \neg C \rightarrow \neg M$

(6 punti)

$C \vee \neg C \vdash \forall x (B(x) \vee C) \rightarrow \forall x B(x) \vee C$

(6 punti ++)

$\vdash \neg(\forall x \exists y x \neq y \vee a = b)$

(10 punti ++)

$\forall x (B(x) \vee \neg B(x)) \vdash \forall x (B(x) \vee C) \rightarrow \forall x B(x) \vee C$

- Formalizzare in sequente le argomentazioni di seguito (ogni formalizzazione conta 3 punti).

Si provi poi se il sequente ottenuto è tautologia, opinione o paradosso in logica classica e in logica intuizionista con uguaglianza.

Il punteggio indicato è assegnato alla classificazione del sequente nella singola logica classica o intuizionista (la formalizzazione è contata a parte).

In caso di opinione o paradosso classico il punteggio relativo alla classificazione classica viene raddoppiato.

In caso di tautologia classica ma non intuizionista o paradosso classico il punteggio relativo alla classificazione intuizionista viene raddoppiato.

Nel caso di tautologia intuizionista del sequente la derivazione mostrata in **DNI**₌ conta il doppio del punteggio indicato.

Nel caso di tautologia classica ma non intuizionista la derivazione in **DNC**₌ della tautologia conta il doppio del punteggio indicato.

– (6 punti)

Non si dà il caso che a tutti piaccia qualcosa.
C'è qualcuno a cui non piace nulla.

si consiglia di usare:
 $P(x,y) = "x \text{ piace a } y"$

– (8 punti ++)

Non si dà il caso che ci sia un unico insieme.
Esistono almeno due insiemi.

si consiglia di usare:
 $I(x) = "x \text{ è un insieme}"$

– (15 punti)

Per ogni x e y , se x non è contenuto in y allora y è contenuto in x .
Nessun x non è contenuto in se stesso oppure tutti gli x sono contenuti in se stessi.

si consiglia di usare:
 $C(x,y) = x \text{ è contenuto in } y$

- (30 punti) Date delle formule predicative arbitrarie α e β , la seguente regola

$$\frac{\beta \vdash \alpha \vee \perp}{\vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha} 1$$

è ammissibile in $\mathbf{DNI}_=$? La sua inversa è ammissibile in $\mathbf{DNI}_=$? È ammissibile e invertibile in $\mathbf{DNC}_=$? È valida in \mathbf{LC}_p e in \mathbf{LI}_p ? Giustificare la risposta con una dimostrazione.

- (20 punti) In ogni algebra di Heyting \mathcal{H} verificare quali delle seguenti proprietà sono vere per qualsiasi $a, b \in \mathcal{H}$ giustificando la risposta con una dimostrazione o mostrando un controesempio.

1. se $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ allora $\neg \mathbf{b} \leq \neg \mathbf{a}$.
2. (++) se $\neg \neg \mathbf{a} = \mathbf{1}$ allora $\mathbf{a} = \mathbf{1}$.
3. se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ allora $\neg \neg \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

- (20 punti) Dimostrare che in aritmetica di Heyting \mathbf{HA} o di Peano \mathbf{PA}

$$\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \perp \urcorner)$$

NON è derivabile assieme alla sua negazione assumendo che l'aritmetica considerata sia consistente.

- Si stabilisca se nell'aritmetica di Peano \mathbf{PA} e in \mathbf{HA} questi sequenti sono derivabili mostrando una derivazione: (suggerimento: per mostrare l'eventuale non derivabilità di un sequente si mostri che la sua negazione è derivabile...)

1. (10 punti) $\vdash \exists w \forall y w \cdot y = 1$
2. (10 punti) $\vdash \exists x (0 = x \rightarrow \forall w 5 \neq w)$
3. (20 punti) $\vdash \forall x \exists y s(x) \neq x + y$ (++)

0.1 Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza $\text{DNI}_=$

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \mathbf{A} \\
\text{ax-tt} \\
\Gamma \vdash \text{tt} \\
\text{ex-f-q} \\
\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \\
\text{SC}_{\text{sx}} \\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \mathbf{C}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \mathbf{C}} \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \&-S_{n_1} \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{B}} \&-S_{n_2} \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}} \&-D \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{C} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma \vdash \mathbf{C}} \vee-S_n \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee-D_{n_1} \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee-D_{n_2} \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma \vdash \neg \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \perp} \neg-S_n \quad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}} \neg-D \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \quad \Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{B}} \rightarrow-S_n \quad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow-D \\
\frac{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})} \forall-S_n \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} \forall-D \ (w \notin VL(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))) \\
\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad \Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{C}}{\Gamma \vdash \mathbf{C}} \exists-S_n \ (w \notin VL(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{C})) \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} \exists-D \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{s} \quad \Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{s})} =-S_n \quad \begin{array}{l} =-\text{ax} \\ \Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t} \end{array}
\end{array}$$

0.2 Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale classica con uguaglianza $\text{DNC}_=$

Regole di $\text{DNI}_=$

+

$$\frac{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \text{ra}$$

e si ricorda che $t \neq s \equiv \neg t = s$

Calcolo dei sequenti $LC_=$ per la logica classica predicativa con uguaglianza

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \quad \Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{A}, \Delta' \quad \text{ax-}\perp \quad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla \quad \text{ax-tt} \quad \Gamma \vdash \nabla, \text{tt}, \nabla' \\
 \\
 \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \Delta} \&-S \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \Delta} \&-D \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \Delta} \vee-S \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \Delta} \vee D \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \Delta} \neg-S \quad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}, \Delta} \neg-D \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \Delta} \rightarrow-S \quad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \Delta} \rightarrow-D \\
 \\
 \frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \forall-S \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w}), \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \forall-D \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla)) \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \exists-S \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla)) \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}), \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \exists-D \\
 \\
 \frac{\Sigma, \mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \Delta(\mathbf{s}), \nabla} =-S_1 \quad \frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \Delta(\mathbf{s}), \nabla} =-S_2 \\
 \\
 \quad \quad \quad = -\text{ax} \\
 \quad \quad \quad \Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}, \Delta
 \end{array}$$

0.3 Calcolo dei sequenti della Logica Intuizionista predicativa con uguaglianza

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \quad \text{ax-}\perp \quad \text{ax-tt} \\
 \Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \mathbf{C} \quad \Gamma \vdash \text{tt} \\
 \\
 \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \mathbf{C}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \mathbf{C}} \text{sc}_{sx} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \&-S \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}} \&-D \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{C} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \vee-S \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee-D_1 \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee-D_2 \\
 \\
 \frac{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}} \neg-S_i \quad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}} \neg-D \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \rightarrow -S_i \quad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow -D \\
 \\
 \frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{C}} \forall-S \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} \forall-D \ (w \notin VL(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))) \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{C}} \exists-S \ (w \notin VL(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{C})) \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} \exists-D_v \\
 \\
 \frac{\Sigma, \mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{t})}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \mathbf{C}(\mathbf{s})} = -S_1 \quad \frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{t})}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \mathbf{C}(\mathbf{s})} = -S_2 \\
 \\
 = -\text{ax} \\
 \Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}
 \end{array}$$

Regole ammissibili

Nello svolgimento degli esercizi si possono utilizzare le regole elencate qui sotto in ogni calcolo utilizzato purchè si sia a conoscenza della loro ammissibilità.

ATTENZIONE: non tutte le regole elencate sono ammissibili nei calcoli intuizionisti.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg\text{-aX}_{sx1}}{\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma', \neg\mathbf{A}, \Gamma'' \vdash \Delta} \quad \frac{\neg\text{-aX}_{sx2}}{\Gamma, \neg\mathbf{A}, \Gamma', \mathbf{A}, \Gamma'' \vdash \Delta} \\
 \frac{\neg\text{-aX}_{dx1}}{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{A}, \Sigma', \neg\mathbf{A}, \Sigma''} \quad \frac{\neg\text{-aX}_{dx2}}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg\mathbf{A}, \Sigma', \mathbf{A}, \Sigma''} \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg\mathbf{A} \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg\mathbf{A}, \Delta} \neg\neg\text{-D} \\
 \frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{dx} \\
 \frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Delta \vdash \nabla}{\Gamma, \Sigma, \Delta \vdash \nabla} \text{cn}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Sigma, \nabla}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \nabla} \text{cn}_{dx} \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A}(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \mathbf{A}(x) \vdash \Delta} \forall\text{-Sv} \quad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \mathbf{A}(x), \Delta} \exists\text{-Dv} \\
 \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{t} = \mathbf{t}, \Delta'} \text{rf}^* \quad \frac{}{\Gamma, \mathbf{t} = \mathbf{u} \vdash \mathbf{u} = \mathbf{t}, \Delta} \text{sm}^* \\
 \frac{}{\Gamma, \mathbf{t} = \mathbf{v}, \mathbf{v} = \mathbf{u} \vdash \mathbf{t} = \mathbf{u}, \Delta} \text{tra}^*
 \end{array}$$

Regola di composizione

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \alpha \quad \Gamma_1, \alpha, \Gamma_3 \vdash \text{fr}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \text{fr}} \text{comp}$$

Assiomi dell'aritmetica di Peano e di Heyting

L'aritmetica di Peano **PA** (di Heyting **HA**) è ottenuta aggiungendo a $\text{DNC}_=$ ($\text{DNI}_=$) la regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \mathbf{fr}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}$$

con i seguenti assiomi:

$$\begin{aligned} Ax1. & \vdash \forall x \, s(x) \neq 0 \\ Ax2. & \vdash \forall x \, \forall y \, (s(x) = s(y) \rightarrow x = y) \\ Ax3. & \vdash \forall x \, x + 0 = x \\ Ax4. & \vdash \forall x \, \forall y \, x + s(y) = s(x + y) \\ Ax5. & \vdash \forall x \, x \cdot 0 = 0 \\ Ax6. & \vdash \forall x \, \forall y \, x \cdot s(y) = x \cdot y + x \\ Ax7. & \vdash A(0) \& \forall x \, (A(x) \rightarrow A(s(x))) \rightarrow \forall x \, A(x) \end{aligned}$$

ove il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{n\text{-volte}}$$

e quindi per esempio

$$\begin{aligned} 1 & \equiv s(0) \\ 2 & \equiv s(s(0)) \end{aligned}$$

Regole derivate in aritmetica HA e PA

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t} \text{ sy-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = v \quad \Gamma' \vdash v = u}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = u} \text{ tr-r}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P(0) \quad \Gamma' \vdash \forall x \, (P(x) \rightarrow P(s(x)))}{\Gamma, \Gamma' \vdash \forall x \, P(x)} \text{ ind}$$