

NOTE di Logica Matematica -2018/19

Maria Emilia Maietti
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Università di Padova
via Trieste n. 63 - 35121 Padova, Italy
maietti@math.unipd.it

1 ottobre 2018

Scopo del corso

Lo scopo del nostro corso è fornire un'introduzione allo **studio matematico delle dimostrazioni in matematica**. Questo studio è fondamentale per poter formalizzare al computer il concetto di dimostrazione matematica tramite un programma chiamato *proof-assistant*¹ per **certificare al calcolatore la correttezza delle dimostrazioni matematiche** stesse.

Sull'importanza della formalizzazione delle prove matematiche al computer consigliamo al lettore/lettrice di leggere il materiale divulgativo di Vladimir Voedvosky (field medalist nel 2002) tra cui i lucidi delle lezioni seguenti:

How I became interested in foundations of mathematics. Lecture at the 8th Asian Science Camp in Singapore. August 25, 2014.

Computer proof assistants - the future of mathematics. Lecture at the NUS, Singapore. August 27, 2014.

Testi di riferimento aggiuntivi per approfondimento:

Dirk van Dalen, **Logic and structure**. London, Springer, 2012. 5th revised, extended edition

A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, **Basic Proof Theory** Cambridge University Press, 1996.

¹Nel corso di *teoria dei tipi* della laurea magistrale in informatica mutuabile dai matematici verrà fornita un'introduzione all'uso di un tal programma.

From *How I became interested in foundations of mathematics.* by V. Voedvosky

... Many of us do mathematics that is a little like the Rubik Cube. There is a problem. And there is the search for a solution. And when the solution is found it is certain that it is a solution.

But mathematics which earned me the Fields Medal at the International Congress of Mathematicians in Beijing in 2002 is very different.

There is a problem. And there is the search for a solution. But when the solution is found it is not certain at all that it is a solution.

The Fields Medal was awarded to me for the proof of Milnor's Conjecture.

....

The ideas which the proof was based on turned out to be solid and the results of other people which I relied on turned out to be correct.

This is not always the case.

Let me tell you the story of another of my proofs which turned out very differently.

....

And then in the Fall of 2013, less than a year ago, some sort of a block in my mind collapsed and I suddenly understood that Carlos Simpson was correct and that the proof which Kapranov and I published in 1991 is wrong.

Not only the proof was wrong but the main theorem of that paper was false!

MORAL:

Now let us look at this story again. Kapranov and I have found a solution to the problem which we worked on - the proof of the theorem.

If the problem was to solve an equation and we would have found a solution we would have checked that it is a solution before publishing it, right? And if it were a complex equation we would probably have checked it on a computer.

So why can not we check a solution which is a proof of a theorem?

For proof verification we need to construct a *particular* **formal deduction system** and explain how it corresponds with the mathematical objects and forms of reasoning which exist in our thoughts.

....

Encoding of statements and proofs which exist in our thoughts into *symbolic expressions* is called *formalization*.

Formalization is, just like programming, first of all a tool that we can use to pass on to computers some of the mental tasks which we need to perform.

Cosa studieremo

Nel nostro corso studieremo *sistemi formali deduttivi* per studiare le prove **puramente LOGICHE** e le prove in **aritmetica** nel senso descritto da Voevodsky.

In particolare studieremo due tipi di prove logiche:

1. prove in **logica classica**
2. prove in **logica intuizionista**

e poi estenderemo brevemente tale studio alle

1. prove in **aritmetica classica**
2. prove in **aritmetica intuizionista**.

I concetti principali all'interno del sistema deduttivo saranno quelli di *linguaggio formale* e di *deduzione* o *derivazione formale*. Infatti la *formalizzazione* di una prova di un teorema richiede una *codifica in un linguaggio formale della formulazione del teorema come formula* e poi una *codifica della sua dimostrazione come derivazione o deduzione in un sistema formale*.

teorema	\mapsto	formula
prova	\mapsto	derivazione

1 Linguaggio formale dei predicati con uguaglianza

Un linguaggio predicativo con uguaglianza ha 2 classi di simboli:

1. simboli chiamati **TERMINI** per indicare **enti**
esempi: x variabile, \bar{s} per nome “**Socrate**”
2. simboli chiamati **PREDICATI** per indicare **proprietà logiche degli enti**
esempi: $U(x)$ per “**x è un uomo**”, $U(\bar{s})$ per “**Socrate è un uomo**”
e questi predicati sono chiusi sui **CONNETTIVI PROPOSIZIONALI** e **QUANTIFICAZIONI universali ed esistenziali**
esempi: $U(x) \& M(x)$ per “**x è un uomo ed è mortale**”, $U(x) \rightarrow M(x)$ per “**se x è un uomo allora è mortale**”, $\forall x M(x)$ sta per “**tutti sono mortali**”, $\exists x M(x)$ sta per “**esiste qualcuno di mortale**”

D’ora in poi usiamo il termine **FORMULA** per indicare un predicato esso può essere:

- predicato (o formula) **atomico** ovvero dato come primitivo e tra questi includiamo il predicato di uguaglianza indicato con il simbolo =
- predicato (o formula) **composta** ovvero costruito con connettivi proposizionali o quantificazioni da quelli primitivi che sono chiusi sia su **quantificazione universale “per ogni”** che sulla **quantificazione esistenziale “esiste..”**.

Inoltre useremo il simbolo **fr** come meta-variabile per una *formula generica* e la meta-variabile **t**, oppure **s** oppure **u** per indicare un *termine generico*.

Def. 1.1 (linguaggio predicativo con uguaglianza) Un linguaggio *predicativo con uguaglianza* \mathcal{L} è determinato dai seguenti simboli di base

- *variabili* per termini : una quantità di variabili grande a piacere x_1, \dots, x_n almeno numerabile (che in realtà noi indichiamo preferibilmente con ultime lettere MINUSCOLE dell’alfabeto inglese **x, w, y, z**)
- *costanti* per termini: una quantità, *anche vuota*, grande a piacere di costanti c_j per $j \in J$ con J collezione di “indici”;
- *funzioni n-arie* tra termini: una quantità grande a piacere, *anche vuota*, di funzioni $f_k(x_1, \dots, x_n)$ dipendenti da n -variabili con $n \geq 1$ per $k \in K$ con K collezione di “indici”;
- *predicati atomici*: una quantità grande a piacere, *anche vuota*, di predicati atomici $P_k(x_1, \dots, x_m)$ m -ari dipendenti da m -variabili con $m \geq 0$ per $k \in K'$ con K' collezione di “indici”;
tra questi predicati i predicati P_k che sono 0-ari, ovvero non dipendono da alcuna variabile, sono detti *proposizioni atomiche*;
- *il predicato di uguaglianza*: $t = s$;

Oltre a questi simboli di base \mathcal{L} contiene anche i simboli dei connettivi di *disgiunzione* \vee , di *congiunzione* $\&$, di *implicazione* \rightarrow , di *negazione* \neg , simboli di *costante falso* \perp , di *costante vero* \top e poi i simboli di *quantificazione universale* \forall , di *quantificazione esistenziale* \exists e poi i simboli di parentesi aperta (e chiusa) che servono per poter costruire correttamente predicati composti.

A partire dai simboli di un linguaggio \mathcal{L} si definiscono le grammatiche che seguono.

1.0.1 Grammatica termini simbolici

Un **TERMINE** t di un linguaggio predicativo \mathcal{L} può essere costruito in questo modo:

- una variabile x è un **termine**;
- una costante \bar{c} è un **termine** (indichiamo le costanti con una lettera MINUSCOLA preferibilmente tra le prime dell'alfabeto italiano, evitando così le lettere usate come variabili.)
- ogni funzione $f_k(t_1, \dots, t_n)$ è un **termine** se ogni t_j è **termine** per $j = 1, \dots, n$

1.0.2 Grammatica formule simboliche

Una *formula* fr di un linguaggio predicativo \mathcal{L} è definita induttivamente in tal modo:

- sono **formule** i predicati **atomici** $P_k(t_1, \dots, t_m)$ ottenuti dal predicato atomico $P_k(x_1, \dots, x_m)$ sostituendo le variabili con termini t_i per $i = 1, \dots, m$
- il predicato $t=s$ è una **formula** se t ed s sono **termini**.
- $\forall x (fr)$ (che si legge “per ogni x fr ”) è una **formula** se fr lo è
- $\exists x (fr)$ (che si legge “esiste un x tale che fr ”) è una **formula** se fr lo è
- la costante “falso” \perp è una **formula**
- la costante “vero” \top è una **formula**
- $(fr_1) \& (fr_2)$ è una **formula** se fr_1 e fr_2 lo sono
- $(fr_1) \vee (fr_2)$ è una **formula** se fr_1 e fr_2 lo sono
- $(fr_1) \rightarrow (fr_2)$ è una **formula** se fr_1 e fr_2 lo sono
- $\neg(fr)$ è una **formula** se fr lo è.

Infine indichiamo con il segno

\leftrightarrow

il connettivo **equivalenza** che è definito in tal modo: date due formule fr_1 e fr_2 (con l'eventuale aggiunta di parentesi)

$$fr_1 \leftrightarrow fr_2 \equiv (fr_1 \rightarrow fr_2) \& (fr_2 \rightarrow fr_1)$$

che si legge “ fr_1 è **equivalente** a “ fr_2 ”.

Notazione “diverso”:

Nel seguito usiamo l'abbreviazione

$$t \neq s \equiv \neg t = s$$

per indicare il predicato che il termine t è *diverso* dal termine s .

1.0.3 Convenzione su come mettere il numero minimo di parentesi

Nello scrivere le formule all'interno di un linguaggio predicativo \mathcal{L} possiamo togliere delle parentesi, innanzitutto dai predicati atomici e dall'uguaglianza, CONVENENDO poi che \forall o \exists si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo come la negazione \neg , seguito a pari merito da \vee , $\&$, che a loro volta sono legate alle formule più di \rightarrow .

Ovvero

$$\neg, \forall, \exists \quad \text{lega più di} \quad \vee, \& \quad \text{lega più di} \quad \rightarrow$$

Quindi le parentesi servono quando si intende legare un connettivo ad una o due formule con cui senza parentesi NON si legerebbe.

Esempi:

- “(tutti gli x tale che $A(x)$) o B ”

si scrive

$$\forall x A(x) \vee B$$

- “tutti gli x tale che ($A(x)$ o B)”

si scrive

$$\forall x (A(x) \vee B)$$

- “ (esiste un x tale che $A(x)$) implica (B o C)”

si scrive

$$\exists x A(x) \rightarrow B \vee C$$

- “(esiste un x tale che ($A(x)$ implica B)) o C ”

si scrive

$$\exists x (A(x) \rightarrow B) \vee C$$

Esempi di linguaggi predicativi: Innanzitutto abbiamo il linguaggio, che chiamiamo \mathcal{L}_0 , SENZA simboli di costante, di funzioni, di predicati atomici. Che tipo di linguaggio è questo?

Questo linguaggio \mathcal{L}_0 ha come uniche formule sono costruite a partire da variabili come termini e dal predicato di uguaglianza composto con i connettivi e quantificatori. Ad esempio

$$\forall x \exists y \neg x = y$$

che afferma che “per ogni x elemento ne esiste un’altro diverso”, oppure

$$\neg \exists x \perp$$

che afferma “non esiste nulla tale che falso” ovvero “non esiste nulla tale che il falso sia vero”.

Si noti inoltre che le formule di \mathcal{L}_0 sono anche formule di OGNI altro linguaggio \mathcal{L} ovvero

$$Frm(\mathcal{L}_0) \subseteq Frm(\mathcal{L})$$

ove con $Frm(\mathcal{L})$ indichiamo l’insieme di formule del linguaggio \mathcal{L} .

Un altro esempio di linguaggio, che chiamiamo $\mathcal{L}_{Socrate}$ è quello avente come unico simbolo di costante \bar{s} , SENZA simboli di funzione e con unici simboli di predicato atomico i predicati

$$U(x) \quad M(x)$$

1.1 A cosa servono i linguaggi predicativi?

I linguaggi predicativi servono per formalizzare asserzioni composte del tipo

“Tutti gli uomini sono mortali”

“ Socrate è un uomo”

“Socrate è mortale”

Infatti supposto di utilizzare i simboli del linguaggio $\mathcal{L}_{Socrate}$ e in particolare i predicati $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ per esprimere

$\mathbf{M}(\mathbf{x})$ = “ \mathbf{x} è mortale”

$\mathbf{U}(\mathbf{x})$ = “ \mathbf{x} è un uomo”

e di utilizzare la costante \bar{s} per esprimere il nome “Socrate” possiamo formalizzare la frase “Tutti gli uomini sono mortali” in tal modo

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

grazie al fatto che il simbolo di **quantificazione universale** “per ogni” davanti a un predicato esprime l’asserzione “tutti gli x ”.

Possiamo poi formalizzare “Socrate è un uomo” e “Socrate è mortale” rispettivamente in $\mathbf{U}(\bar{s})$ e in $\mathbf{M}(\bar{s})$ perchè *al posto della variabile x possiamo sostituire la costante \bar{s}* .

Invece per formalizzare l’asserzione

Qualche antenato di Mario è nobile.

possiamo utilizzare un linguaggio che include le seguenti funzioni proposizionali o predicati

$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = “ \mathbf{x} è antenato di \mathbf{y} ”

$\mathbf{N}(\mathbf{x})$ = “ \mathbf{x} è nobile”

e un nome, ovvero una costante, per indicare il nome di Mario

\bar{m} = “Mario”.

Poi per esprimere “qualche” usiamo il simbolo di **quantificazione esistenziale** “esiste” davanti a un predicato

$$\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

Detto questo possiamo concludere che l’asserzione

Qualche antenato di Mario è nobile.

si può formalizzare nel linguaggio indicato così:

$$\exists \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{m}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))$$

1.2 Consigli su come formalizzare

Nella maggior parte delle traduzioni il quantificatore *esiste* va assieme alla *congiunzione* e il quantificatore *universale* va assieme all’*implicazione* secondo gli schemi qui riportati

$\forall \mathbf{x} (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x}))$ traduce

Chi è $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ è pure $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

Quelli che sono $\mathbf{P}(\mathbf{x})$... sono $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

I $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ sono $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

Chiunque è $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, è pure $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

Ogni $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ è $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

Soltanto i $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ sono $\mathbf{P}(\mathbf{x})$

Se uno è $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ allora è pure $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$

Solo se uno è $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ allora è pure $\mathbf{P}(\mathbf{x})$

$\exists x(P(x) \& Q(x))$ traduce

C'è un $P(x)$ che è $Q(x)$
esiste un $P(x)$ che è $Q(x)$
qualche $P(x)$ è $Q(x)$
esistono dei $P(x)$ che sono $Q(x)$

$\neg \exists x(P(x) \& Q(x))$ traduce

nessun $P(x)$ è un $Q(x)$
non esiste un $P(x)$ che è $Q(x)$
non esistono $P(x)$ che sono $Q(x)$

Se vi trovate a tradurre una frase con un quantificatore esistenziale seguito da un'implicazione, oppure una quantificazione universale seguito da una congiunzione controllate più volte di aver tradotto bene!!!

Trucco per tradurre il soltanto quelli, solo quelli che

- riscrivere la frase *togliendo* il "soltanto", o "solo"

- tradurre la frase ottenuta usando la quantificazione universale e l'implicazione

- se la frase ottenuta è $\forall x (\mathbf{fr}_1(x) \rightarrow \mathbf{fr}_2(x))$ la traduzione della frase iniziale è ottenuta *SCAMBIANDO antecedente con conseguente*, ovvero scrivendo $\forall x (\mathbf{fr}_2(x) \rightarrow \mathbf{fr}_1(x))$

1.2.1 Esempi di formalizzazione nel linguaggio predicativo

Nel seguito formalizzeremo un'asserzione in un linguaggio predicativo a scelta IDENTIFICANDO il particolare linguaggio predicativo prescelto *con i soli simboli nuovi di termine e di predicato (atomico) utilizzati* seguito da ciò che questi simboli significano.

1. L'asserzione

"esiste un numero x tale che x è minore o uguale di 6"

si può formalizzare così

$$\exists x (N(x) \& x \leq 6)$$

ove

$x \leq y$ è simbolo di predicato di minore o uguale ovvero "x è minore od uguale ad y"

$N(x)$ = "x è un numero"

2. L'asserzione **"Se Mario non mangia allora non sta in piedi"**

si può formalizzare così

$$\neg M(\overline{m}) \rightarrow \neg P(\overline{m})$$

ove

$M(x)$ = "x mangia"

$P(x)$ = "x sta in piedi"

\overline{m} = "Mario"

3. L'asserzione

"Chi non mangia non sta in piedi"

è formalizzabile così

$$\forall x (\neg M(x) \rightarrow \neg P(x))$$

ponendo

$M(x)$ ="x mangia"
 $P(x)$ ="x sta in piedi"

4. L'asserzione

"Solo quelli che hanno il biglietto salgono sull'aereo."

si può formalizzare così

$$\forall x (S(x) \rightarrow B(x))$$

con

$B(x)$ =" x ha il biglietto"

$S(x)$ ="x sale sull'aereo"

5. l'asserzione

"Non si dà il caso che nessun programma termini."

si può formalizzare in

$$\neg \neg \exists x (P(x) \ \& \ T(x))$$

con

$P(x)$ ="x è programma"

$T(x)$ ="x termina"

6. l'asserzione

"Nessun programma con un ciclo infinito termina."

si può formalizzare così

$$\neg \exists x ((P(x) \ \& \ \exists y C(x, y)) \ \& \ T(x))$$

ove

$P(x)$ ="x è programma"

$T(x)$ ="x termina"

$C(x, y)$ ="y è un ciclo infinito di x "

7. l'asserzione **"Un programma che non ha cicli termina."**

si può formalizzare in

$$\forall x (P(x) \ \& \ \neg \exists y C(x, y) \rightarrow T(x))$$

con

$P(x)$ ="x è programma"

$T(x)$ ="x termina"

$C(x, y)$ ="y è ciclo di x "

8. l'asserzione

"Il programma fattoriale su input 2 dà un'unico output."

con

$O(x, y, z)$ ="il programma y su input z dà output il numero x "

f ="il programma fattoriale"

2 ="due"

ammette come possibile formalizzazione la seguente formula:

$$\exists x \mathbf{O}(x, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \ \& \ \forall y_1 \ \forall y_2 (\mathbf{O}(y_1, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \ \& \ \mathbf{O}(y_2, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \rightarrow y_1=y_2)$$

Un'altra possibile formalizzazione è la seguente:

$$\exists x (\mathbf{O}(x, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \ \& \ \forall y (\mathbf{O}(y, \mathbf{f}, \mathbf{2}) \rightarrow y=x))$$

9. l'asserzione

“Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi”

con

$\mathbf{O}(x)$ = “x è potente”

$\mathbf{P}(x, y)$ = “x pensa a y”

ammette come possibile formalizzazione:

$$\exists x ((\mathbf{O}(x) \ \& \ \mathbf{P}(x, x)) \ \& \ \forall y (\mathbf{P}(x, y) \rightarrow y=x))$$

10. l'asserzione

“Certi potenti pensano solo a se stessi”

con

$\mathbf{O}(x)$ = “x è potente”

$\mathbf{P}(x, y)$ = “x pensa a y”

ha come possibile formalizzazione LETTERALE:

$$\exists x (\mathbf{O}(x) \ \& \ \forall y (\mathbf{P}(x, y) \rightarrow y=x))$$

In realtà la frase sopra è spesso affermata per intendere che **“Certi potenti pensano a se stessi e soltanto a se stessi”** la cui formalizzazione è nell'esempio sopra.

1.2.2 Nozione di variabile LIBERA in termini e formule

L'introduzione dei quantificatori universale ed esistenziale nel linguaggio predicativo comporta la presenza di due tipi di variabili: le *variabili libere*, che sono variabili all'interno di una formula senza quantificatori legati ad esse, e le *variabili vincolate*, che sono variabili che cadono nel raggio di azione di un quantificatore.

Prima di definire le variabili libere di una formula precisiamo la ovvia definizione di variabile libera in un termine considerando che al momento i termini sono solo o variabili o costanti o valori di funzioni:

$\mathbf{VL}(c) \equiv \emptyset$ se c costante

$\mathbf{VL}(x) \equiv x$

$\mathbf{VL}(f_k(t_1, \dots, t_m)) \equiv \mathbf{VL}(t_1) \cup \dots \cup \mathbf{VL}(t_m)$

se $f_k(x_1, \dots, x_m)$ è simbolo di funzione.

Poi definiamo la nozione di variabile libera di una formula come segue:

x si dice **LIBERA** in fr sse $x \in \mathbf{VL}(fr)$ ove

$$\begin{aligned} \mathbf{VL}(\perp) &\equiv \emptyset \\ \mathbf{VL}(\mathbf{P}_k(t_1, \dots, t_m)) &\equiv \mathbf{VL}(t_1) \cup \dots \cup \mathbf{VL}(t_m) \\ \mathbf{VL}(\forall y \, fr) &\equiv \mathbf{VL}(fr) \setminus \{y\} \text{ ovvero } y \text{ appare } \mathbf{VINCOLATA} \text{ in } \forall y \, fr \\ \mathbf{VL}(\exists y \, fr) &\equiv \mathbf{VL}(fr) \setminus \{y\} \text{ ovvero } y \text{ appare } \mathbf{VINCOLATA} \text{ in } \exists y \, fr \\ \mathbf{VL}(fr_1 \&fr_2) &\equiv \mathbf{VL}(fr_1) \cup \mathbf{VL}(fr_2) \\ \mathbf{VL}(fr_1 \vee fr_2) &\equiv \mathbf{VL}(fr_1) \cup \mathbf{VL}(fr_2) \\ \mathbf{VL}(fr_1 \rightarrow fr_2) &\equiv \mathbf{VL}(fr_1) \cup \mathbf{VL}(fr_2) \\ \mathbf{VL}(\neg fr) &\equiv \mathbf{VL}(fr) \end{aligned}$$

Esempi

$$\mathbf{VL}(A(x) \rightarrow \forall z \, B(z, y)) = \{x, y\}$$

$$\mathbf{VL}(A(x) \rightarrow \forall x \, B(x, y)) = \{x, y\}$$

poichè x è libera in $A(x)$ anche se vincolata in $\forall x \, B(x, y)$

$$\mathbf{VL}(A(z) \rightarrow \forall x \, A(x)) = \{z\}$$

$$\mathbf{VL}(\forall z \, B(z) \vee A(z, x)) = \{z, x\}$$

poichè z è libera nel secondo disgiunto $A(z, x)$ perchè il $\forall z$ lega solo l'occorrenza di z in $B(z)$

$$\mathbf{VL}(\forall z (B(z) \vee A(z, x))) = \{x\}$$

perchè il $\forall z$ lega entrambe le occorrenze di z per la convenzione sulle parentesi.

Si osservi che dire che *una variabile* w è **NON LIBERA** in una formula fr significa due cose:

- o w NON compare per nulla in fr ,
- oppure w compare vincolata in fr , ovvero nel raggio di azione di un quantificatore.

2 Approfondimento sulla definizione di linguaggio formale

La definizione di linguaggio formale in teoria degli insiemi può essere vista come un *caso particolare di insieme induttivamente generato* di cui diamo una definizione nel seguito, seguito da esempi e da esercizi che possono essere utili a chiarire i concetti introdotti.

Def. 2.1 (Insieme induttivamente generato) Dato un numero finito di funzioni su un numero finito di argomenti

$$h_i : \underbrace{A \times \dots \times A}_{m_i\text{-volte}} \rightarrow A$$

su una collezione A (che non è detto sia un insieme) per $i = 1, \dots, \bar{n}$ e un insieme S un insieme B , sottocollezione di A , si dice **induttivamente generato da S e dalle h_i** se è il più piccolo insieme che soddisfa le seguenti condizioni

- $S \subseteq B$
- se $b_1, \dots, b_{m_i} \in B$ allora $h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \in B$

ovvero è il più piccolo insieme B tale che

$$S \cup \{ h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \mid b_j \in B \ j = 1, \dots, m_i \ e \ i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \} \subset B$$

Si noti che

- l'insieme B induttivamente generato da S e dalle h_i può equivalentemente essere definito come il più piccolo insieme che soddisfa la seguente equazione di punto fisso

$$B = S \cup \{ h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \mid b_j \in B \ j = 1, \dots, m_i \ e \ i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \}$$

- l'insieme B induttivamente generato da S e dalle h_i può essere costruito in tal modo

$$B \equiv \bigcup_{n \in \text{Nat}} B_n$$

ove

$$B_0 = S$$

e

$$B_{n+1} \equiv B_n \cup \{ h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \mid b_j \in B_n \text{ per } j = 1, \dots, m_i \ e \ i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \}$$

e in particolare B esiste sempre nella teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

Inoltre vale il seguente teorema:

Proposition 2.2 (principio di induzione di insiemi induttivamente generati) Dato un numero finito di funzioni su un numero finito di argomenti

$$h_i : \underbrace{A \times \dots \times A}_{m_i\text{-volte}} \rightarrow A$$

su una collezione A (che non è detto sia un insieme) per $i = 1, \dots, \bar{n}$ e dato un insieme S e un insieme B che soddisfa l'equazione di punto fisso

$$B = S \cup \{ h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \mid b_j \in B \ j = 1, \dots, m_i \ e \ i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \}$$

allora sono equivalenti le seguenti condizioni:

1. B è il *più piccolo* insieme che soddisfa l'equazione di punto fisso

$$B = S \cup \{ h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \mid b_j \in B \ j = 1, \dots, m_i \text{ e } i \in \{1, \dots, \bar{n}\} \}$$

2. B gode del seguente **principio di induzione**:

dato un *predicato* $P(x)$ ($x \in B$) su B

Se valgono le seguenti condizioni:

(caso base)	per un $s \in S$ qualsiasi $P(s)$ vale
(caso induttivo)	per ogni $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$ e per ogni enupla $b_j \in B$ con $j = 1, \dots, m_i$ se $P(b_j)$ vale per ogni $j = 1, \dots, m_i$ allora pure $P(h_i(b_1, \dots, b_{m_i}))$ vale

allora ne segue che

$$\text{per ogni } b \in B \text{ vale } P(b).$$

Esempi con esercizi

- I numeri naturali \mathbb{N} formano un insieme induttivamente generato in tal modo in teoria degli insiemi: sia V l'universo (non è un insieme) degli insiemi e si definisca

$$S \equiv \{ \emptyset \} \quad h : V \longrightarrow V \quad \text{ove} \quad h(X) = X \cup \{ X \}$$

Allora si verifichi l'insieme induttivamente generato B da S e h sopra definiti dà proprio una rappresentazione di \mathbb{N} ponendo

$$0 \equiv \emptyset \quad \text{e} \quad n+1 \equiv n \cup \{ n \} = \{ 0, 1, \dots, n \}$$

in quanto i vari B_n costruiti sono definiti in tal modo

$$B_0 = \{0\} \quad B_{n+1} = \{ 0, \dots, n \}$$

e che il suo principio di induzione associato è proprio il ben noto principio di induzione sui naturali.

- Dato un *alfabeto* per un linguaggio \mathcal{L} ovvero

$$Alf(\mathcal{L}) = Var \cup Const \cup PredA \cup \{ \perp, \mathbf{tt} \} \cup \{ \rightarrow, \&, \vee, \neg, \forall, \exists, (,) \}$$

ove si noti vi sono anche le parentesi tonde (!!!) e

dati J, K, H insiemi e

- Var è una famiglia numerabile di simboli di variabile:

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

- $Const$ è una famiglia grande a piacere (anche vuota) di simboli di costante

$$Const \equiv \{ c_j \mid j \in J \}$$

- Fun è una famiglia grande a piacere (anche vuota) di simboli di funzione

$$Fun \equiv \{ f_k(x_1, \dots, x_{n_k}) \mid k \in K \}$$

- una famiglia grande a piacere (anche vuota) di simboli di *predicati atomici*

$$PredA \equiv \{ P_h(x_1, \dots, x_{n_h}) \mid h \in H \}$$

si consideri l'insieme delle liste finite di simboli dell'alfabeto

$$List(Alf(\mathcal{L}))$$

e si definiscano le seguenti funzioni:

1. per ogni $k \in K$

$$f_k : List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } f_k(-, \dots, -)(l_1, \dots, l_{n_k}) = f_k(l_1, \dots, l_{n_k})$$

2. per ogni $h \in H$

$$P_h(-, \dots, -) : List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } P_h(-, \dots, -)(l_1, \dots, l_{n_h}) = P_h(l_1, \dots, l_{n_h})$$

3.

$$\neg : List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } \neg(-)(l) = \neg l$$

4.

$$\rightarrow(-, -) : List(Alf(\mathcal{L})) \times List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } \rightarrow(-, -)(l_1, l_2) = l_1 \rightarrow l_2$$

5.

$$\&(-, -) : List(Alf(\mathcal{L})) \times List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } \&(-, -)(l_1, l_2) = l_1 \& l_2$$

6.

$$\vee(-, -) : List(Alf(\mathcal{L})) \times List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } \vee(-, -)(l_1, l_2) = l_1 \vee l_2$$

7.

$$\forall(-, -) : Var \times List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } \forall(-, -)(y, l) = \forall y l$$

8.

$$\exists(-, -) : Var \times List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } \exists(-, -)(y, l) = \exists y l$$

9.

$$(-) : List(Alf(\mathcal{L})) \longrightarrow List(Alf(\mathcal{L}))$$

$$\text{ove } (-)(l) = (l)$$

Ora si dimostri che

1.

$$Term(\mathcal{L})$$

è l'insieme induttivamente generato dalle funzioni $f_k(-, \dots, -)$ e da $S \equiv Var \cup Const$.
Si scriva poi il corrispondente principio di induzione.

2.

$$Frm(\mathcal{L})$$

è l'insieme induttivamente generato dalle funzioni $P_h(-, \dots, -)$ e dalle funzioni

$$\neg(-) \quad \rightarrow(-, -) \quad \&(-, -) \quad \vee(-, -) \quad \forall(-, -) \quad \exists(-, -) \quad (-)$$

e da

$$S \equiv \{ t = s \mid t, s \in Term(\mathcal{L}) \} \cup \{ \perp, \text{tt} \}$$

Si scriva poi il corrispondente principio di induzione.

- Dato un numero finito di funzioni su un numero finito di argomenti

$$h_i : \underbrace{A \times \dots \times A}_{m_i\text{-volte}} \rightarrow A$$

su una collezione A (che non è detto sia un insieme) per $i = 1, \dots, \bar{n}$ e un insieme S l'insieme

$$C \equiv \bigcup_{n \in Nat} C_n$$

ove

$$C_0 = S$$

e

$$C_{n+1} \equiv \{ h_i(c_1, \dots, c_{m_i}) \mid c_j \in C_n \text{ per } j = 1, \dots, m_i \text{ e } i \in \{ 1, \dots, \bar{n} \} \}$$

soddisfa l'equazione

$$C = S \cup \{ h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \mid b_j \in C \text{ } j = 1, \dots, m_i \text{ e } i \in \{ 1, \dots, \bar{n} \} \}$$

?

- Dato un numero finito di funzioni su un numero finito di argomenti

$$h_i : \underbrace{A \times \dots \times A}_{m_i\text{-volte}} \rightarrow A$$

su una collezione A (che non è detto sia un insieme) per $i = 1, \dots, \bar{n}$ e un insieme S l'insieme

$$C \equiv \bigcup_{n \in Nat} C_n$$

ove

$$S \subseteq C_0$$

e

$$C_{n+1} \equiv C_n \cup \{ h_i(c_1, \dots, c_{m_i}) \mid c_j \in C_n \text{ per } j = 1, \dots, m_i \text{ e } i \in \{ 1, \dots, \bar{n} \} \}$$

soddisfa l'equazione

$$C = S \cup \{ h_i(b_1, \dots, b_{m_i}) \mid b_j \in C \text{ } j = 1, \dots, m_i \text{ e } i \in \{ 1, \dots, \bar{n} \} \}$$

?

Cosa ha di diverso C dall'insieme B generato induttivamente generato da S e dalle h_i ?

- Provare a dare una definizione alternativa di linguaggio formale dei predicati a partire da un alfabeto di simboli per variabili, costanti, predicati atomici e funzioni, unito ai simboli per connettivi e quantificatori, per poi formare una collezione di termini e di formule.
- Provare a mostrare che l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è induttivamente generato pensandolo come sottoinsieme degli interi \mathbb{Z}
- Si stabilisca se le seguenti definizioni di termini e formule di un linguaggio \mathcal{L} sono ben definite:

dati J, K, H insiemi e

- una famiglia numerabile di simboli di variabile:

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

- una famiglia grande a piacere (anche vuota) di simboli di costante

$$Const \equiv \{ c_j \mid j \in J \}$$

- una famiglia grande a piacere (anche vuota) di simboli di funzione

$$Fun \equiv \{ f_k(x_1, \dots, x_{n_k}) \mid k \in K \}$$

- una famiglia grande a piacere (anche vuota) di simboli di *predicati atomici*

$$PredA \equiv \{ P_h(x_1, \dots, x_{n_h}) \mid h \in H \}$$

Si definiscano i seguenti insiemi:

$$Term(\mathcal{L}) \equiv Var \cup Const \cup \{ f_k(t_1, \dots, t_{n_k}) \mid t_i \in Term(\mathcal{L}) \text{ per } i = 1, \dots, n_k \text{ e } f_k(x_1, \dots, x_{n_k}) \in Fun \}$$

$$\begin{aligned} Frm(\mathcal{L}) \equiv & \{ t = s \mid t, s \in Term(\mathcal{L}) \} \cup \{ \perp, \mathbf{tt} \} \cup \\ & \{ P_h(t_1, \dots, t_{n_h}) \mid t_i \in Term(\mathcal{L}) \text{ per } i = 1, \dots, n_h \text{ e } P_h(x_1, \dots, x_{n_h}) \in PredA \} \\ & \cup \{ \phi \rightarrow \psi \mid \phi, \psi \in Frm(\mathcal{L}) \} \\ & \cup \{ \phi \& \psi \mid \phi, \psi \in Frm(\mathcal{L}) \} \\ & \cup \{ \phi \vee \psi \mid \phi, \psi \in Frm(\mathcal{L}) \} \\ & \cup \{ \neg\phi \mid \phi \in Frm(\mathcal{L}) \} \\ & \cup \{ \forall x \psi \mid \psi \in Frm(\mathcal{L}) \} \\ & \cup \{ \exists x \psi \mid \psi \in Frm(\mathcal{L}) \} \end{aligned}$$

3 Deduzione naturale classica e intuizionista in forma di calcolo dei sequenti

Nel seguito introduciamo la nozione di sequente per calcoli logici formali che vanno sotto il nome di *deduzione naturale*, ovvero calcoli che riflettono uno stile *naturale* di *dedurre* teoremi.

3.1 Concetti di base di un calcolo dei sequenti

In questa sezione descriviamo vari concetti di base relativi alla nozione di calcolo dei sequenti ad una conclusione riferendoci alle formule di un linguaggio formale \mathcal{L} che può essere pensato coincidere semplicemente con un linguaggio predicativo con uguaglianza. In verità i concetti che introdurremo hanno valenza più generale. Parliamo qui di sequenti ad una conclusione perchè in seguito introdurremo pure i sequenti a multi-conclusione.

Def. 3.1 (sequente ad una conclusione) Dato un linguaggio formale \mathcal{L} un **sequente in DEDUZIONE NATURALE** è una scrittura del tipo

$$\Gamma \vdash \psi$$

ove Γ è una lista finita (anche vuota!!) di formule di \mathcal{L} e ψ pure una formula di \mathcal{L} .

Tale scrittura, se Γ è una lista non vuota, rappresenta formalmente l'asserzione *se ciascuna formula in Γ è vera allora anche la formula ψ è vera.*

Nel caso invece Γ sia la lista vuota, la scrittura sopra rappresenta semplicemente l'asserzione *la formula ψ è vera.*

In altre parole un sequente ad una conclusione può essere:

1. un sequenti della forma

$$fr_1, fr_2, \dots, fr_n \vdash \psi$$

che rappresenta formalmente l'asserzione

se fr_1 è vero e fr_2 è vero... e fr_n è vero allora ψ è vero

2. un sequente della forma

$$\vdash \psi$$

che rappresenta formalmente

ψ è vero

ovvero ψ è vero senza assumere alcuna ipotesi.

Esempio di sequente:

L'asserzione

Amnesso che “Il programma termini e dia risultato 1” allora “Il programma è corretto.”

si può formalizzare in un linguaggio predicativo con predicati atomici P, U, C tramite il sequente

$$P \& U \vdash C$$

intendendo che le proposizioni atomiche rappresentino nel linguaggio naturale

P=“Il programma termina”

U=“Il programma dà risultato 1”

C=“Il programma è corretto”

Ma la stessa asserzione si può equivalentemente formalizzare nello stesso linguaggio predicativo con lo stesso significato associato alle proposizioni atomiche tramite il sequente

$$\vdash P \& U \rightarrow C$$

o anche tramite il sequente

$$\mathbf{P, U} \vdash \mathbf{C}$$

per come si intende il significato della virgola tra due predicati a sinistra del segno di sequente \vdash .

Introduciamo poi delle regole per *trasformare i sequenti* in modo da *conservare il loro valore di verità dall'ALTO verso il BASSO*. L'insieme di tali regole formano un *calcolo dei sequenti*.

Nei calcoli dei sequenti che tratteremo avremo *tre tipi di regole* a seconda del numero delle premesse:

1. *regole ad una premessa* rappresentate da scritte del tipo

$$\frac{\Gamma' \vdash \psi'}{\Gamma \vdash \psi} \text{ regola1}$$

ove si intende che

se il sequente $\Gamma' \vdash \psi'$ è vero allora pure il sequente $\Gamma \vdash \psi$ è vero.

In particolare il sequente $\Gamma' \vdash \psi'$ è detto *premessa della regola* mentre il sequente $\Gamma \vdash \psi$ è chiamato *conclusione della regola*;

2. *regole a due premesse* rappresentate da scritte del tipo

$$\frac{\Gamma' \vdash \psi' \quad \Gamma'' \vdash \psi''}{\Gamma \vdash \psi} \text{ regola2}$$

ove si intende che

se entrambi i sequenti $\Gamma' \vdash \psi'$ e $\Gamma'' \vdash \psi''$ sono veri allora pure il sequente $\Gamma \vdash \psi$ è vero.

In particolare i sequenti $\Gamma' \vdash \psi'$ e $\Gamma'' \vdash \psi''$ sono chiamati *premesse della regola* mentre il sequente $\Gamma \vdash \psi$ è chiamato *conclusione della regola*;

3. *regole a zero premesse* detti *assiomi*

$$\text{ax-bla} \\ \Gamma \vdash \psi$$

che rappresenta l'asserzione che

il sequente $\Gamma \vdash \psi$ è vero.

Ad esempio se poniamo come regola

$$\frac{\mathbf{P \& U} \vdash \mathbf{C}}{\mathbf{P \& U} \vdash \mathbf{C \vee \neg P}}$$

intendiamo che :

“se vale $\mathbf{P \& U} \rightarrow \mathbf{C}$ allora vale pure $\mathbf{P \& U} \rightarrow \mathbf{C \vee \neg P}$ ”

Lo scopo di un calcolo dei sequenti è costruire **alberi di derivazione** definiti come segue.

Def. 3.2 (albero in un calcolo dei sequenti) Un albero π nel calcolo dei sequenti \mathcal{C} nel linguaggio \mathcal{L} è definito per induzione come segue.

1. Ogni sequente

$$\Gamma \vdash \psi$$

nel linguaggio \mathcal{L} è un albero nel calcolo \mathcal{C} avente il sequente $\Gamma \vdash \psi$ sia come *radice* che come *unica foglia*.

2. Dato un albero nel calcolo \mathcal{C}

$$\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \psi}$$

allora

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \psi}}{\Gamma' \vdash \psi'} \text{ reg*}$$

ottenuto estendendo π con una regola reg* del calcolo \mathcal{C} è un albero nel calcolo \mathcal{C} con radice $\Gamma' \vdash \psi'$ e con foglie quelle di π_1 .

3. Dati due alberi nel calcolo \mathcal{C}

$$\frac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \psi_1} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \psi_2}$$

allora

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \psi_1} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash \psi_2}}{\Gamma_3 \vdash \psi_3} \text{ reg*}$$

ottenuto estendendo π_1 e π_2 con una regola di ψ di \mathcal{C} è un albero nel calcolo \mathcal{C} con radice $\Gamma_3 \vdash \psi_3$ e con foglie l'unione di quelle di π_1 e quelle di π_2 .

In altre parole con un calcolo dei sequenti possiamo costruire alberi della forma

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma_5 \vdash \psi_5}{\Gamma_3 \vdash \psi_3} \text{ regola1} \quad \frac{\Gamma_6 \vdash \psi_6}{\Gamma_4 \vdash \psi_4} \text{ regola1}}{\Gamma_2 \vdash \psi_2} \text{ regola2}}{\Gamma \vdash \psi} \text{ regola2}$$

ove chiamiamo *sequente radice* il sequente più in basso che non è premessa di alcuna regola, che nel caso sopra è $\Gamma \vdash \psi$ e chiamiamo *foglie* i sequenti più in alto $\Gamma_1 \vdash \psi_1$, $\Gamma_5 \vdash \psi_5$, $\Gamma_6 \vdash \psi_6$ che non sono conclusioni di regole a più premesse.

Per esempio nell'albero

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma_5 \vdash \psi_5}{\Gamma_3 \vdash \psi_3} \text{ regola1} \quad \frac{\Gamma_6 \vdash \psi_6}{\Gamma_4 \vdash \psi_4} \text{ regola1}}{\Gamma_2 \vdash \psi_2} \text{ regola2}}{\Gamma \vdash \psi} \text{ regola2}$$

la radice $\Gamma \vdash \psi$ ha due predecessori $\Gamma_1 \vdash \psi_1$ e $\Gamma_2 \vdash \psi_2$ ed è stata ottenuta applicando la **regola 2**.

Si noti che siccome considereremo solo regole con al più due premesse allora ogni albero di derivazione avrà nodi con al più due predecessori.

Poi un albero come quello mostrato sopra si dirà **albero di derivazione** o semplicemente **derivazione** del **sequente radice** se le sue foglie sono **ASSIOMI** (= **regole senza premesse**).

L'idea è che le regole **conservano la verità delle affermazioni rappresentate dai sequenti dall'alto verso il basso** ovvero *supposto che le affermazioni dei sequenti premessa di una regola siano tutti veri allora ne segue che pure il sequente conclusione della regola considerata risulta vero*.

Quindi diamo la seguente definizione:

Def. 3.3 (derivazione di un sequente) Una **derivazione** del sequente $\Gamma \vdash \psi$ in un calcolo dei sequenti \mathcal{C} è un albero π del calcolo \mathcal{C} avente

- $\Gamma \vdash \psi$ come radice;
- ogni foglia di π è istanza di un assioma di \mathcal{C}

Def. 3.4 (sequente derivabile) Un sequente $\Gamma \vdash \psi$ è **derivabile** in un calcolo dei sequenti \mathcal{C} se tal sequente ammette una derivazione in \mathcal{C} .

La nozione di **derivabilità di una formula**, intesa come la derivabilità del sequente associato all'asserzione della formula come vera ovvero del sequente

$$\vdash \mathbf{fr}$$

fornisce un concetto di **verità formale di una formula** in un calcolo dei sequenti, e quindi nella logica che questo calcolo formalizza.

Ora diamo le regole specifiche del calcolo della deduzione naturale classica e poi di quella intuizionista.

3.2 Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale classica predicativa con uguaglianza $\mathbf{DNC}_=$ (con meta-variabili per formule)

Il calcolo della deduzione naturale $\mathbf{DNC}_=$ è determinato dagli assiomi e regole presentati sotto ricordando che

- i simboli \mathbf{fr} , \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 , ψ sono META-variabili che indicano formule complesse arbitrarie mentre le lettere greche maiuscole come Γ sono meta-variabili che indicano liste arbitrarie di formule;
- la scrittura $\mathbf{fr}[x/t]$ indica la formula ottenuta sostituendo TUTTE le occorrenze libere della variabile \mathbf{x} in \mathbf{fr} con il termine \mathbf{t} (si veda la definizione formale di sostituzione in sezione 3.11);
- Il simbolo \mathbf{t} è una META-variabile che indica un termine qualsiasi del linguaggio che può essere una delle variabili $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ oppure una delle costanti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$;
- le regole di quantificazioni sotto si intendono chiuse sulla sostituzione della variabili \mathbf{x}, \mathbf{w} che appaiono sotto con QUALSIASI altra variabile purchè vengano rispettate le condizioni indicate.

	ax-id $\Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma' \vdash \mathbf{fr}$	ax-tt $\Gamma \vdash \mathbf{tt}$
	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \text{ ex-f-q}$	$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \mathbf{fr}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \mathbf{fr}} \text{ sc}_{\text{sx}}$
$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1} \&-S_{n_1}$	$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_2} \&-S_{n_2}$	$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2} \&-D$
$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2 \quad \Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \vee-S_n$		$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2} \vee-D_{n_1}$
		$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2} \vee-D_{n_2}$
$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \quad \Gamma \vdash \neg \mathbf{fr}_1}{\Gamma \vdash \perp} \neg-S_n$		$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{fr}_1} \neg-D$
$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2 \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_1}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_2} \rightarrow-S_n$		$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2} \rightarrow-D$
$\frac{\Gamma \vdash \forall x \mathbf{fr}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[x/t]} \forall-S_n$		$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[x/w]}{\Gamma \vdash \forall x \mathbf{fr}} \forall-D \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall x \mathbf{fr}))$
$\frac{\Gamma \vdash \exists x \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}[x/w] \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \exists-S_n \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists x \mathbf{fr}, \psi))$		$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[x/t]}{\Gamma \vdash \exists x \mathbf{fr}} \exists-D_n$
$\frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_1[x/t]}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1[x/s]} =-S_n$		$= -\text{ax}$
		$\Gamma \vdash t = t$
$\frac{\Gamma, \neg \mathbf{fr} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \text{ ra}$		

ove l'ultima regola *ra* è detta *reductio ad absurdum*.

3.3 Presentazione alternativa del calcolo dei sequenti per la deduzione naturale classica predicativa con uguaglianza $\text{DNC}_=$ con chiusura su sostituzione.

Presentiamo qui le regole del calcolo dei sequenti per la deduzione naturale classica predicativa $\text{DNC}_=$ in modo alternativo a quelle date in 3.2. La novità è che le regole qui sotto presentate agiscono su quantificatori e connettivi applicati rispettivamente a predicati atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} (la differenza tra le variabili $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e \mathbf{B} e le META-variabili \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 è che le prime sono i costituenti di base della grammatica delle formule per formare formule complesse, ad esempio $A \& (B(x) \vee C) \rightarrow \exists x D(x, y)$, mentre le seconde sono solo variabili di più alto livello per indicare una formula complessa). Ma per completezza il calcolo deve contenere *anche TUTTE le applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} e dei predicati $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ delle formule qualsiasi e al posto di \mathbf{w} nelle regole $\exists\text{-Sn}$ e $\forall\text{-D}$ una qualsiasi altra variabile purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.*

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\Gamma, A, \Gamma' \vdash A \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ ex-f-q} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C} \text{ sc}_{\text{sx}} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \&\text{-Sn}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B} \&\text{-Sn}_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \&\text{-D} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee\text{-Sn} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\text{-Dn}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\text{-Dn}_2 \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg\text{-Sn} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg\text{-D} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow\text{-Sn} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow\text{-D} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A(t)} \forall\text{-Sn} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(w)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \forall\text{-D} \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x))) \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \exists x A(x) \quad \Gamma, A(w) \vdash C}{\Gamma \vdash C} \exists\text{-Sn} \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), C)) \qquad \frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)} \exists\text{-Dn} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash A(s)} =\text{-Sn} \qquad \begin{array}{l} =\text{-ax} \\ \Gamma \vdash t = t \end{array} \\
\\
\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ ra}
\end{array}$$

ove l'ultima regola *ra* è detta *reductio ad absurdum*.

3.4 Calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza $\mathbf{DNI}_=$ (con meta-variabili per formule)

Il calcolo della deduzione naturale $\mathbf{DNI}_=$ è determinato dagli assiomi e regole presentate sotto ricordando che

- i simboli \mathbf{fr} , \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 , ψ sono META-variabili che indicano formule complesse arbitrarie come le lettere mentre le lettere greche maiuscole come Γ sono meta-variabili che indicano liste arbitrarie di formule;
- la scrittura $\mathbf{fr}[x/t]$ indica la formula ottenuta sostituendo TUTTE le occorrenze libere della variabile x in \mathbf{fr} con il termine t (si veda la definizione formale di sostituzione in sezione 3.11);
- Il simbolo t è una META-variabile che indica un termine qualsiasi del linguaggio che può essere una delle variabili x, y, z, \dots oppure una delle costanti a, b, c, \dots ;
- le regole di quantificazioni sotto si intendono chiuse sulla sostituzione della variabili x, w che appaiono sotto con QUALSIASI altra variabile purchè vengano rispettate le condizioni indicate.

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \\
 \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma' \vdash \mathbf{fr} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \text{ ex-f-q} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \mathbf{fr}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \mathbf{fr}} \text{ sc}_{\text{sx}} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1} \&-S_{n_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_2} \&-S_{n_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2} \&-D \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2 \quad \Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2 \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \vee-S_n \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2} \vee-D_{n_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2} \vee-D_{n_2} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \quad \Gamma \vdash \neg \mathbf{fr}_1}{\Gamma \vdash \perp} \neg-S_n \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{fr}_1} \neg-D \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2 \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_1}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_2} \rightarrow -S_n \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2} \rightarrow -D \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \forall x \mathbf{fr}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[x/t]} \forall -S_n \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[x/w]}{\Gamma \vdash \forall x \mathbf{fr}} \forall -D \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall x \mathbf{fr})) \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \exists x \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}[x/w] \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \exists -S_n \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists x \mathbf{fr}, \psi)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[x/t]}{\Gamma \vdash \exists x \mathbf{fr}} \exists -D_n \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash \mathbf{fr}_1[x/t]}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}_1[x/s]} = -S_n \qquad \begin{array}{l} = -\text{ax} \\ \Gamma \vdash t = t \end{array}
 \end{array}$$

3.5 Presentazione alternativa del calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza $\text{DNI}_=$ con chiusura su sostituzioni.

Presentiamo qui le regole del calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza $\text{DNI}_=$ in modo alternativo a quelle date in 3.4 analogamente a quanto operato per il calcolo $\text{DNC}_=$. Quindi anche qui la novità è che le regole sotto presentate agiscono su quantificatori e connettivi applicati rispettivamente a predicati atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} . In aggiunta però per completezza il calcolo deve contenere *anche TUTTE le applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} e dei predicati $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ delle formule qualsiasi e al posto di \mathbf{w} nelle regole $\exists\text{-Sn}$ e $\forall\text{-D}$ una qualsiasi altra variabile purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.*

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\Gamma, A, \Gamma' \vdash A \\
\\
\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ ex-f-q} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \&\text{-Sn}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B} \&\text{-Sn}_2 \\
\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee\text{-Sn} \\
\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg\text{-Sn} \\
\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow\text{-Sn} \\
\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A(t)} \forall\text{-Sn} \\
\frac{\Gamma \vdash \exists x A(x) \quad \Gamma, A(w) \vdash C}{\Gamma \vdash C} \exists\text{-Sn} \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), C)) \\
\frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash A(s)} =\text{-Sn} \\
\\
\text{ax-tt} \\
\Gamma \vdash \mathbf{tt} \\
\\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C} \text{sc}_{\text{sx}} \\
\\
\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \&\text{-D} \\
\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\text{-Dn}_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\text{-Dn}_2 \\
\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg\text{-D} \\
\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow\text{-D} \\
\frac{\Gamma \vdash A(w)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \forall\text{-D} \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x))) \\
\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x A(x)} \exists\text{-Dn} \\
\\
=\text{-ax} \\
\Gamma \vdash t = t
\end{array}$$

3.6 Tautologie classiche

Def. 3.5 Una formula fr di un linguaggio predicativo \mathcal{L} si dice *tautologia classica* sse $\vdash fr$ è derivabile in $DNC_{=}$.

Di seguito diamo una lista di tautologie in $DNC_{=}$.

essenza implicazione	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$
associatività \vee	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
associatività $\&$	$(A \& B) \& C \leftrightarrow A \& (B \& C)$
commutatività \vee	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
commutatività $\&$	$A \& B \leftrightarrow B \& A$
distributività \vee su $\&$	$A \vee (B \& C) \leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività $\&$ su \vee	$A \& (B \vee C) \leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza \vee	$A \vee A \leftrightarrow A$
idempotenza $\&$	$A \& A \leftrightarrow A$
leggi di De Morgan	$\neg(B \vee C) \leftrightarrow \neg B \& \neg C$ $\neg(B \& C) \leftrightarrow \neg B \vee \neg C$ $\neg(\exists x C) \leftrightarrow \forall x \neg C$ $\neg(\forall x C) \leftrightarrow \exists x \neg C$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C) \leftrightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C) \rightarrow C$
disgiunzione come antecedente	$(A \vee B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
coniunzione come antecedente	$(A \& B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
legge della doppia negazione	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
legge della NON contraddizione	$\neg(A \& \neg A)$
legge del terzo escluso	$A \vee \neg A$

3.7 Tautologie intuizioniste

Def. 3.6 Una formula fr di un linguaggio predicativo \mathcal{L} si dice *tautologia intuizionista* sse è fr è derivabile in $DNI_{=}$.

Di seguito diamo una lista di sequenti TUTTI DERIVABILI in $DNI_{=}$.

	$\neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$
associatività \vee	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
associatività $\&$	$(A \& B) \& C \leftrightarrow A \& (B \& C)$
commutatività \vee	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
commutatività $\&$	$A \& B \leftrightarrow B \& A$
distributività \vee su $\&$	$A \vee (B \& C) \leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$
distributività $\&$ su \vee	$A \& (B \vee C) \leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$
idempotenza \vee	$A \vee A \leftrightarrow A$
idempotenza $\&$	$A \& A \leftrightarrow A$
leggi di De Morgan	$\neg (B \vee C) \leftrightarrow \neg B \& \neg C$ $\neg B \vee \neg C \rightarrow \neg (B \& C)$ $\neg (\exists x C) \leftrightarrow \forall x \neg C$ $\exists x \neg C \rightarrow \neg (\forall x C)$
legge della contrapposizione	$(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$
legge del modus ponens	$A \& (A \rightarrow C) \rightarrow C$
transitività	$(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
disgiunzione come antecedente	$(A \vee B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)$
congiunzione come antecedente	$(A \& B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
congiunzione sotto ipotesi	$(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow B \& C)$
prima proiezione	$A \& B \rightarrow A$
seconda proiezione	$A \& B \rightarrow B$
legge della NON contraddizione	$\neg (A \& \neg A)$
significato negazione	$\neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \perp)$
equivalente del falso	$\perp \leftrightarrow (A \& \neg A)$

3.8 Attenzione alle condizioni sulle variabili nelle regole per i quantificatori

Quando si applicano le regole \forall -D o \exists -Sn occorre controllare le **condizioni su variabili**.

Diamo qui una spiegazione del perchè le condizioni sulle variabili sono NECESSARIE nelle regole di \forall -D e \exists -Sn.

Motivazione delle condizioni sulle variabili in \forall -D. Vediamo ora perchè una semplice regola di introduzione della quantificazione universale a destra tipo

$$\frac{\Gamma \vdash fr}{\Gamma \vdash \forall x fr} \forall\text{-D}_*$$

senza alcuna condizione e cambio di variabile NON va bene per dedurre sequenti logicamente accettabili pensando di definire *regole fondanti la logica alla base dei ragionamenti matematici*. Innanzitutto consideriamo il calcolo, che chiamiamo \mathcal{C}_* , ottenuto aggiungendo agli assiomi identità, le regole dell'uguaglianza, le regole dell'implicazione e la regola $\forall-D_*$ e $\forall-S_n$ potremmo anche considerare il calcolo con tutte le regole di $\mathbf{DNC}_=$ o $\mathbf{DNI}_=$ eccetto la regola della quantificazione universale a destra $\forall-D$ che viene sostituita con quella indicata). In tal calcolo risulta derivabile il seguente

$$\vdash \mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0}$$

contenente una formula di un linguaggio predicativo con uguaglianza con almeno la costante $\mathbf{0}$, in tal modo

$$\begin{array}{c} \text{ax-id} \\ \frac{}{\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{0}} \\ \frac{\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{0}}{\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{0}} \forall-D_* \\ \frac{\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \mathbf{3} = \mathbf{0}}{\vdash \mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0}} \forall-S_n \\ \frac{\vdash \mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0}}{\vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0})} \rightarrow-D \\ \frac{\vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0})}{\vdash \mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0}} \forall-D_* \\ \frac{}{\vdash \mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0}} \forall-S_n \end{array}$$

Ora dal significato dei sequenti e le regole del calcolo risulta che nel calcolo \mathcal{C}_* il seguente

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{3} = \mathbf{0}$$

è vero e non possiamo certo usare tale calcolo per formalizzare i teoremi dell'aritmetica e della matematica!!! Dobbiamo quindi modificare la regola $\forall-D_*$ per evitare di derivare sequenti di affermazioni palesemente falsi relativamente all'uguaglianza una volta applicata all'aritmetica e quindi alla matematica.

Come primo passo blocchiamo l'applicazione della prima applicazione di $\forall-D_*$ dopo l'assioma identità introducendo una restrizione all'applicazione della regola di quantificazione a destra in tal modo

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \forall-D_{**} \quad (\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\Gamma))$$

Consideriamo quindi il calcolo \mathcal{C}_{**} ottenuto da \mathcal{C}_* sostituendo la regola $\forall-D_*$ con la suddetta regola $\forall-D_{**}$. Ma vediamo come ciò NON sia ancora sufficiente perchè con questa restrizione NON riusciamo a dimostrare come vero

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

perchè comunque cerchiamo di derivarlo dal basso verso l'alto applicando qualche regola NON riusciremo mai a togliere dalle premesse $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e ad applicare $\forall-D_{**}$ perchè il contesto dal basso verso l'alto si mantiene sempre e NON si perde mai!!!

Quindi dobbiamo operare un'altra modifica e introduciamo la possibilità di cambiare variabile quantificata dal BASSO verso l'ALTO (si invita il lettore a pensare se altre formulazioni risultano possibili... quella data appare la più efficiente nella ricerca della derivazione in modo automatico al calcolatore). Introduciamo quindi la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \forall-D_{***} \quad (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma))$$

ove con $\mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]$ si intende la formula ottenuta sostituendo in \mathbf{fr} la variabile \mathbf{x} con \mathbf{w} .

Consideriamo quindi il calcolo \mathcal{C}_{***} ottenuto da \mathcal{C}_* sostituendo la regola $\forall-D_*$ con la suddetta regola $\forall-D_{***}$. Chiaramente in tal calcolo ora riusciamo a derivare

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

in tal modo

$$\begin{array}{c} = -ax \\ \mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \mathbf{w} = \mathbf{w} \\ \frac{\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \mathbf{w} = \mathbf{w}}{\mathbf{x} = \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{x}} \forall-D_{***} \quad (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{x} = \mathbf{0})) \end{array}$$

Ma in realtà anche la regola $\forall\text{-D}_{***}$ risulta scorretta per formalizzare il ragionamento matematico perchè con questa regola riusciamo a derivare

$$\frac{\text{ax-id}}{\frac{\frac{\vdash \mathbf{w} = \mathbf{w}}{\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{w}} \quad \forall\text{-D}_{***}}{\vdash \forall \mathbf{w} \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{w}} \quad \forall\text{-D}_{***}}$$

Ora dal significato dei sequenti e le regole del calcolo risulta che nel calcolo \mathcal{D}_{***} il sequente

$$\vdash \forall \mathbf{w} \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{w}$$

è vero e non possiamo certo usare tale calcolo per formalizzare i teoremi dell'aritmetica e della matematica!!!

Quindi dobbiamo proprio adottare la regola della quantificazione universale a destra presente in $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}} \quad \forall\text{-D} \quad (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{fr}))$$

dove si richiede di controllare che \mathbf{w} non compaia libera nemmeno nella formula quantificata $\forall \mathbf{x} \mathbf{fr}$ su cui stiamo agendo. In altre parole l'albero

$$\frac{\text{ax-id}}{\frac{\frac{\vdash \mathbf{w} = \mathbf{w}}{\vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{w}} \quad \forall\text{-D}}$$

NON è un albero di derivazione nei calcoli $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ appunto perchè NON si può applicare $\forall\text{-D}$ in quanto \mathbf{w} è libera nella formula $\forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{w}$ e di conseguenza la condizione a lato per l'applicazione della regola $\forall\text{-D}$, che si riduce a verificare che $\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\forall \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{w})$, NON è soddisfatta.

Motivazione delle condizioni sulle variabili in $\exists\text{-Sn}$. Innanzitutto vediamo perchè NON va bene adottare un calcolo con una regola $\exists\text{-Sn}$ senza alcuna condizione come questa

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad \exists\text{-Sn}^*$$

se vogliamo un calcolo adatto a formalizzare *la logica alla base dei ragionamenti matematici*.

Quindi consideriamo il calcolo, che chiamiamo \mathcal{D}_* , ottenuto aggiungendo agli assiomi identità, le regole dell'uguaglianza, le regole dell'implicazione e della negazione e la regola $\exists\text{-Dn}$ e $\exists\text{-Sn}^*$ ma anche le regole di quantificazione $\forall\text{-D}_*$ e $\forall\text{-Sn}$ (potremmo anche considerare il calcolo con tutte le regole di $\mathbf{DNC}_=$ o $\mathbf{DNI}_=$ eccetto la regola della quantificazione esistenziale a sinistra $\exists\text{-Sn}$ che viene sostituita con quella indicata!).

In tal calcolo, utilizzando l'abbreviazione

$$\mathbf{t} \neq \mathbf{s} \equiv \neg \mathbf{t} = \mathbf{s}$$

per termini \mathbf{t} ed \mathbf{s} qualsiasi all'interno di un linguaggio con la costante $\mathbf{0}$ riusciamo a derivare

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \quad \frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \mathbf{z} \neq \mathbf{0}}}{\frac{\exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \mathbf{z} \neq \mathbf{0}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \quad \forall\text{-D}} \quad \exists\text{-Sn}^*$$

Ora dal significato dei sequenti e le regole del calcolo risulta che nel calcolo \mathcal{D}_* il sequente

$$\exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

è vero e non possiamo certo usare tale calcolo per formalizzare i teoremi dell'aritmetica e della matematica!!!

Dobbiamo quindi modificare la regola $\exists\text{-Sn}_*$ per evitare di derivare sequenti di affermazioni palesamente falsi relativamente all'uguaglianza una volta applicata all'aritmetica e quindi alla matematica.

Come primo passo blocchiamo l'applicazione della prima applicazione di $\exists\text{-Sn}_*$ dopo l'assioma identità introducendo una restrizione all'applicazione della regola di quantificazione a destra in tal modo

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr} \quad \Gamma, \text{fr} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \exists\text{-Sn}_{**} \quad (\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\psi))$$

Consideriamo quindi il calcolo \mathcal{D}_{**} ottenuto da \mathcal{D}_* sostituendo la regola $\exists\text{-Sn}_*$ con la suddetta regola $\exists\text{-Sn}_{**}$. In tal calcolo però riusciamo a derivare

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{z} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}}{\mathbf{z} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \text{ax-id} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{z} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \mathbf{z} = \mathbf{0}}{\mathbf{z} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \perp} \neg\text{-Sn}}{\mathbf{z} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \perp} \exists\text{-Sn}_{**}}{\mathbf{z} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \vdash \perp} \neg\text{-D}}{\mathbf{z} = \mathbf{0} \vdash \neg \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}} \neg\text{-D}$$

Ora dal significato dei sequenti e le regole del calcolo risulta che nel calcolo \mathcal{D}_{**} il sequente

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \vdash \neg \exists \mathbf{z} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

è vero e non possiamo certo usare tale calcolo per formalizzare i teoremi dell'aritmetica e della matematica!!!

Quindi dobbiamo operare un'altra modifica e impedire che la variabile quantificata esistenzialmente compaia libera anche nel contesto introducendo la regola in tal modo

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr} \quad \Gamma, \text{fr} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \exists\text{-Sn}_{***} \quad (\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \psi))$$

Consideriamo quindi il calcolo \mathcal{D}_{***} ottenuto da \mathcal{D}_{**} sostituendo la regola $\exists\text{-Sn}_{**}$ con la suddetta regola $\exists\text{-Sn}_{***}$. In tal calcolo riusciamo a derivare

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr} \quad \Gamma, \text{fr} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \exists\text{-Sn}_{***} \quad (\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \psi))$$

Ma in tal calcolo NON sappiamo come derivare

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp$$

Infatti l'albero

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x}}{\mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \mathbf{x} \neq \mathbf{x}} \text{ax-id} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \mathbf{x} \neq \mathbf{x}}{\mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{x}} \text{ax-} \quad \frac{\text{ax-}}{\mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp} \neg\text{-Sn}}{\mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp} \exists\text{-Sn}_{***}}{\exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp} \exists\text{-Sn}_{***}$$

(si ricordi che $\mathbf{t} \neq \mathbf{s} \equiv \neg \mathbf{t} = \mathbf{s}$) che è una derivazione perfettamente corretta in \mathcal{D}_{***} NON è più una derivazione in presenza dell'ipotesi extra (ed inutile!!) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ovvero l'albero

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x}}{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp} \text{ax-id} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \mathbf{x} \neq \mathbf{x}}{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \mathbf{x} = \mathbf{x}} \text{ax-} \quad \frac{\text{ax-}}{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp} \neg\text{-Sn}}{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp} \exists\text{-Sn}_{***}}{\mathbf{x} = \mathbf{0}, \exists \mathbf{x} \mathbf{x} \neq \mathbf{x} \vdash \perp} \exists\text{-Sn}_{***} \quad \text{NOOO!!!}$$

NON è una derivazione in \mathcal{D}_{***} perchè l'applicazione della regola $\exists\text{-Sn}_{***}$ non è lecita nel ramo a destra...

Introduciamo quindi la possibilità di cambiare variabile quantificata dal BASSO verso l'ALTO attraverso la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \text{ fr} \quad \Gamma, \text{fr}[x/w] \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \exists\text{-Sn}_{****} \quad (w \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \psi))$$

Consideriamo quindi il calcolo \mathcal{D}_{****} ottenuto da \mathcal{D}_{***} sostituendo la regola $\exists\text{-Sn}_{***}$ con la suddetta regola $\exists\text{-Sn}_{****}$.

In tal calcolo \mathcal{D}_{****} ora si trova una derivazione del sequente

$$x = 0, \exists x x \neq x \vdash \perp$$

in tal modo

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{x = 0, \exists x x \neq x \vdash \exists x x \neq x} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{x = 0, w \neq w \vdash w \neq w} \quad \frac{\text{ax-}}{x = 0, w \neq w \vdash w = w}}{x = 0, w \neq w \vdash \perp} \neg\text{-Sn}}{x = 0, \exists x x \neq x \vdash \perp} \exists\text{-Sn}_{****} \quad (\text{ora OK!!!})$$

Ma neanche tale calcolo va bene. Il motivo è che nell'estensione del calcolo \mathcal{D}_{****} grazie alle regole di quantificazione universale riusciamo a derivare il sequente

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{w \neq w \vdash w \neq w} \quad \frac{\text{ax-}}{w \neq w \vdash w = w}}{w \neq w \vdash \perp} \neg\text{-Sn}}{\frac{\exists x x \neq w \vdash \exists x x \neq w}{\exists x x \neq w \vdash \perp} \neg\text{-D}} \exists\text{-Sn}_{****} \quad \frac{\vdash \neg \exists x x \neq w}{\vdash \forall w \neg \exists x \neq w} \forall\text{-D}$$

Si noti infatti che l'applicazione della regola $\forall\text{-D}$ è lecita perchè la variabile w non appare libera nel sequente radice e così pure quella di $\exists\text{-Sn}_{****}$.

Ora dal significato dei sequenti e le regole del calcolo risulta che nel calcolo \mathcal{D}_{****} il sequente

$$\vdash \forall w \neg \exists x \neq w$$

è vero e non possiamo certo usare tale calcolo per formalizzare i teoremi dell'aritmetica e della matematica!!!

Quindi dobbiamo proprio adottare la regola della quantificazione esistenziale a sinistra presente in $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \text{ fr} \quad \Gamma, \text{fr}[x/w] \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \exists\text{-Sn} \quad (w \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists x \text{ fr}, \psi))$$

dove si richiede di controllare che w non compaia libera nemmeno nella formula quantificata $\exists x \text{ fr}$ su cui stiamo agendo. In altre parole l'albero

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{w \neq w \vdash w \neq w} \quad \frac{\text{ax-}}{w \neq w \vdash w = w}}{w \neq w \vdash \perp} \neg\text{-Sn}}{\frac{\exists x x \neq w \vdash \exists x x \neq w}{\exists x x \neq w \vdash \perp} \neg\text{-D}} \exists\text{-Sn}_{****} \quad \frac{\vdash \neg \exists x x \neq w}{\vdash \forall w \neg \exists x \neq w} \forall\text{-D} \quad \text{NOOO!!!}$$

NON è un albero di derivazione nei calcoli $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ appunto perchè NON si può applicare $\exists\text{-Sn}$ in quanto w è libera nella formula $\exists x x = w$ e di conseguenza la condizione a lato per l'applicazione

della regola \exists -Sn, che si riduce a verificare che $\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\cdot, \exists \mathbf{x} \mathbf{x} = \mathbf{w}, \perp)$, NON è soddisfatta.

Altri esempi di derivazioni scorrette per errata applicazione delle regole di quantificazione relativamente al soddisfacimento delle loro condizioni a lato sono i seguenti:

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \quad \frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})} \quad \forall\text{-D}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \quad \forall\text{-D}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \quad \exists\text{-Sn}$$

NON è una derivazione corretta: infatti sotto la foglia a destra NON si può applicare \forall -D perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{sx} della sua premessa ovvero in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

Analogamente

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \quad \frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})} \quad \exists\text{-Sn}}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \quad \forall\text{-D}$$

NON è una derivazione corretta: infatti NON si può applicare \exists -Sn perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{dx} di \vdash ovvero in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

3.9 Esempio di derivazione in $\text{DNI}_=$

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \& \mathbf{Q}} \quad \&\text{-Sn}_2 \quad \frac{\text{ax-id}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \& \mathbf{Q}} \quad \&\text{-Sn}_1}{\frac{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q}}{\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}} \quad \&\text{-D}}$$

ove $\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \& \mathbf{P}$ è la RADICE mentre $\mathbf{P} \& \mathbf{Q} \vdash \mathbf{P} \& \mathbf{Q}$ appare come foglia sia del ramo di sinistra che di quello di destra.

3.10 Esempio di derivazione in $\text{DNC}_=$

Proviamo derivando in $\text{DNC}_=$ che il principio del terzo escluso

$$\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}$$

è una tautologia classica derivando il seguente

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}) \vdash \neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q})} \quad \frac{\text{ax-id}}{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}), \mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q})} \quad \frac{\text{ax-id}}{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}), \mathbf{Q} \vdash \perp} \quad \neg\text{-Dn}}{\frac{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}), \mathbf{Q} \vdash \neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}) \quad \frac{\text{ax-id}}{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}), \mathbf{Q} \vdash \perp} \quad \neg\text{-Dn}}{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}), \mathbf{Q} \vdash \mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}} \quad \forall\text{-Dn}_1}}{\frac{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}) \vdash \neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}) \quad \frac{\text{ax-id}}{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}) \vdash \perp} \quad \neg\text{-Dn}_2}}{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}) \vdash \perp} \quad \neg\text{-Sn}}{\frac{\neg(\mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}) \vdash \perp}{\vdash \mathbf{Q} \vee \neg \mathbf{Q}} \quad \text{ra}} \quad \neg\text{-Sn}$$

3.11 Appendice: Definizione di sostituzione di un termine in una formula

Nella pratica matematica usualmente i matematici sanno come sostituire termini all'interno delle loro formule. Diamo però qui una definizione formale perchè quando si lavora con formule che non denotano un teorema specifico si può incorrere in una sostituzione errata.

Cominciamo con il definire *quando*, all'interno di un linguaggio predicativo, un termine t_{ter} è sostituibile in una formula fr al posto di x , o come spesso si legge in letteratura, quando t_{ter} è libero per x in fr . Tale definizione è propedeutica per poi definire la sostituzione effettiva di un termine in una formula.

Def. 3.7 (Definizione di termine sostituibile in una formula) Data una formula fr , una variabile x e un termine t_{ter} di un linguaggio predicativo, definiamo quando t_{ter} è sostituibile nella formula fr al posto di x , o t_{ter} è libero per x in fr per induzione su come è definita fr :

1. t_{ter} è sostituibile in fr al posto di x se $fr \equiv t_1 = t_2$ oppure se $fr \equiv P_k(t_1, \dots, t_m)$, con $P_k(x_1, \dots, x_n)$ predicato atomico, oppure se $fr \equiv \perp$ oppure se $fr \equiv tt$;
2. t_{ter} è sostituibile in fr al posto di x se $fr \equiv \forall x fr'$ oppure se $fr \equiv \forall y_i fr'$ e siamo in uno di questi due casi:
 - (a) x compare in fr' e t_{ter} è sostituibile in fr' al posto di x e t_{ter} NON contiene y_i come variabile,
 - (b) x non compare proprio in fr' .
3. t_{ter} è sostituibile in fr al posto di x se $fr \equiv \exists x fr'$ oppure se $fr \equiv \exists y_i fr'$ e siamo in uno di questi casi:
 - (a) x compare in fr' e t_{ter} è sostituibile in fr' al posto di x e t_{ter} NON contiene y_i come variabile,
 - (b) x non compare proprio in fr' .
4. t_{ter} è sostituibile in fr al posto di x se $fr \equiv fr_1 \& fr_2$ e t_{ter} è sostituibile in fr_1 al posto di x e t_{ter} è sostituibile in fr_2 al posto di x .
5. t_{ter} è sostituibile in fr al posto di x se $fr \equiv fr_1 \vee fr_2$ e t_{ter} è sostituibile in fr_1 al posto di x e t_{ter} è sostituibile in fr_2 al posto di x .
6. t_{ter} è sostituibile in fr al posto di x se $fr \equiv fr_1 \rightarrow fr_2$ e t_{ter} è sostituibile in fr_1 al posto di x e t_{ter} è sostituibile in fr_2 al posto di x .
7. se $fr \equiv \neg fr'$ e t_{ter} è sostituibile in fr' al posto di x .

Def. 3.8 (Definizione di sostituzione di un termine in un termine) All'interno di un linguaggio predicativo, dato un termine u e un termine t_{ter} definiamo il termine $u[x/t_{\text{ter}}]$ ottenuto sostituendo il termine t_{ter} in x per induzione su come è definito u come segue:

- se $u \equiv y$ con $y \neq x$ allora $u[x/t_{\text{ter}}] \equiv u$.
- se $u \equiv x$ allora $u[x/t_{\text{ter}}] \equiv t_{\text{ter}}$.

- se $\mathbf{u} \equiv \mathbf{f}(t_1, \dots, t_m)$ allora $\mathbf{f}(t_1, \dots, t_m)[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \equiv \mathbf{f}(t_1[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}], \dots, t_m[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}])$

Def. 3.9 (Definizione di sostituzione di un termine in una formula) All'interno di un linguaggio predicativo, data una formula \mathbf{fr} e un termine t_{ter} *sostituibile al posto di \mathbf{x} in \mathbf{fr}* allora indichiamo con $\mathbf{fr}[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}]$ la formula ottenuta sostituendo \mathbf{x} con t_{ter} in \mathbf{fr} per induzione su come è definita \mathbf{fr} come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k(t_1, \dots, t_m)[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{P}_k(t_1[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}], \dots, t_m[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}]) \\
(t_1=t_2)[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv t_1[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] = t_2[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \\
(\forall y_i \mathbf{fr})[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \begin{cases} \forall y_i \mathbf{fr}[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] & \mathbf{x} \text{ compare in } \mathbf{fr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } t_{\text{ter}} \\ \forall y_i \mathbf{fr} & \text{se } \mathbf{x} \text{ non compare in } \mathbf{fr} \end{cases} \\
(\forall \mathbf{x} \mathbf{fr})[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv (\forall \mathbf{x} \mathbf{fr}) \\
(\exists y_i \mathbf{fr})[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \begin{cases} \exists y_i \mathbf{fr}[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] & \text{se } \mathbf{x} \text{ compare in } \mathbf{fr} \\ & \text{e } y_i \text{ NON compare libera in } t_{\text{ter}} \\ \exists y_i \mathbf{fr} & \text{se } \mathbf{x} \text{ non compare in } \mathbf{fr} \end{cases} \\
(\exists \mathbf{x} \mathbf{fr})[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{fr} \\
(\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2)[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \& \mathbf{fr}_2[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \\
(\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2)[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \vee \mathbf{fr}_2[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \\
(\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2)[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \rightarrow \mathbf{fr}_2[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] \\
(\neg \mathbf{fr}_1)[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}] &\equiv \neg \mathbf{fr}_1[\mathbf{x}/t_{\text{ter}}]
\end{aligned}$$

RACCOMANDAZIONE FINALE:

Quando sostituisci un termine t_{ter} al posto di x in un predicato pr
 SE compare $\forall y$ o $\exists y$ in pr e y in t -
 CONTROLLA che la sostituzione di x con t in pr
 NON faccia cadere l' y che compare in t_{ter}
 sotto il POTERE di $\forall y$ o $\exists y$
 ovvero controlla che dopo la sostituzione il numero di y legate da $\forall y$ o $\exists y$ in $\text{pr}[x/t_{\text{ter}}]$ NON sia aumentato
 rispetto al numero di y prima della sostituzione in pr

esempio di sostituzione sbagliata:

$$\frac{\forall y \exists x \neg y = x \vdash \forall y \exists x \neg y = x}{\forall y \exists x \neg y = x \vdash \exists x \neg x = x} \forall\text{-Sn} \quad \text{NOOOOO!!!!}$$

esempio di sostituzione corretta:

$$\frac{\forall y \exists x \neg y = x \vdash \forall y \exists x \neg y = x}{\forall y \exists x \neg y = x \vdash \exists x \neg w = x} \forall\text{-Sn} \quad \text{SI!!!!}$$

3.12 Chiarificazione sulla forma delle regole della disgiunzione e dei quantificatori

Per capire la forma delle regole della disgiunzione a sinistra e della quantificazione universale a destra e della quantificazione esistenziale a sinistra si osservi che tali regole seguono dalla validità di alcune leggi logiche astratte.

In particolare la regola $\forall\text{-Sn}$ segue da questa legge logica che vale per formule arbitrarie α, β, ξ del linguaggio predicativo:

$$(\alpha \vee \beta \rightarrow \xi) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \xi) \& (\beta \rightarrow \xi)$$

Invece la regola $\forall\text{-D}$ segue dalla seguente legge logica: siano α, β formule tale che $w \notin VL(\beta)$

$$\forall w (\beta \rightarrow \alpha) \leftrightarrow (\beta \rightarrow \forall w \alpha)$$

Infine la regola $\exists\text{-Sn}$ segue dalla seguente legge logica: siano α, β formule tale che $w \notin VL(\alpha)$

$$\forall w (\beta \rightarrow \alpha) \leftrightarrow (\exists w \beta \rightarrow \alpha)$$

Per esercizio si derivi nella deduzione naturale sia classica che intuizionista il sequente $\vdash \text{fr}$ per ciascuna legge fr .

3.13 Chiusura della derivabilità di un sequente per sostituzioni

Per riuscire a decidere se una formula o un sequente è derivabile è cruciale ricordare che la derivabilità di un sequente si conserva anche dopo che segue a sua volta dal fatto che le regole di un calcolo dei sequenti sono chiuse per sostituzione:

Chiusura per sostituzione

Dato un calcolo dei sequenti L

diciamo che **le derivazioni di L sono chiuse sulle sostituzioni**

dei predicati atomici- diversi dall'uguaglianza!!- delle formule che vi compaiono

se data una derivazione π di un sequente $\Gamma \vdash \psi$ allora pure il sequente $\Gamma[\mathbf{A}/fr] \vdash \psi[\mathbf{A}/fr]$

ottenuto sostituendo TUTTE le occorrenze di \mathbf{A} con una formula fr

è ancora derivabile in L e una sua derivazione è ottenuta da π sostituendo TUTTE le occorrenze di \mathbf{A} con fr .

Ovviamente avendo definito le regole dei calcoli di deduzione naturale $DNC_=$ e $DNI_=$ in modo da includere tutte le regole ottenute da quelle presentate tramite sostituzioni dei predicati atomici che vi compaiono con formule arbitrarie ne segue che:

Proposition 3.10 I calcoli $DNC_=$ e $DNI_=$ sono chiusi per sostituzione dei predicati atomici (diversi dall'uguaglianza) che vi compaiono.

3.14 Equivalenza di formule e loro proprietà

Elenchiamo di seguito alcune utili proprietà del connettivo “equivalenza” che lasciamo al lettore da dimostrare.

Lemma 3.11 (simmetria equivalenti) Date le formule predicative fr_1 e fr_2

Se $\vdash fr_1 \leftrightarrow fr_2$ è derivabile in $DNI_=$ ($DNC_=$)

ne segue che

$\vdash fr_2 \leftrightarrow fr_1$ è derivabile in $DNI_=$ ($DNC_=$)

Dim. Segue essenzialmente dal fatto che la congiunzione è commutativa in quanto nella regola di destra della congiunzione si possono scambiare le premesse!.

Lemma 3.12 (transitività equivalenti) Date le formule predicative fr_1 , fr_2 e fr_3

Se $\vdash fr_1 \leftrightarrow fr_2$ e $\vdash fr_2 \leftrightarrow fr_3$ sono derivabili in $DNI_=$ ($DNC_=$)

ne segue che

$\vdash fr_1 \leftrightarrow fr_3$ è derivabile in $DNI_=$ ($DNC_=$)

Dim. Segue dalla transitività dell'implicazione.

Usando le regole di sinistra dell'implicazione e congiunzione si dimostra che:

Lemma 3.13 (equivalenza linguistica e meta-linguistica) *Date le formule predicative fr_1, fr_2*

<p style="text-align: center;">Se $\vdash fr_1 \leftrightarrow fr_2$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$)</p> <p style="text-align: center;">ne segue che</p> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> $\vdash fr_1$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$) sse $\vdash fr_2$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$). </td> </tr> </table>	$\vdash fr_1$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$) sse $\vdash fr_2$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$).
$\vdash fr_1$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$) sse $\vdash fr_2$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$).	

Lemma 3.14 (conservazione equivalenza) *Date le formule predicative $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$*

<p style="text-align: center;">Se $\vdash \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$)</p> <p style="text-align: center;">ne segue che sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$) pure</p> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> $\vdash \neg\alpha_1 \leftrightarrow \neg\alpha_2$ $\vdash \forall x \alpha_1 \leftrightarrow \forall x \alpha_2$ $\vdash \exists x \alpha_1 \leftrightarrow \exists x \alpha_2$ </td> </tr> </table>	$\vdash \neg\alpha_1 \leftrightarrow \neg\alpha_2$ $\vdash \forall x \alpha_1 \leftrightarrow \forall x \alpha_2$ $\vdash \exists x \alpha_1 \leftrightarrow \exists x \alpha_2$
$\vdash \neg\alpha_1 \leftrightarrow \neg\alpha_2$ $\vdash \forall x \alpha_1 \leftrightarrow \forall x \alpha_2$ $\vdash \exists x \alpha_1 \leftrightarrow \exists x \alpha_2$	

e pure che

<p style="text-align: center;">Se $\vdash \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ e $\vdash \beta_1 \leftrightarrow \beta_2$ sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$)</p> <p style="text-align: center;">ne segue che sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$ ($\mathbf{DNC}_=$) pure</p> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> $\vdash \alpha_1 \ \& \ \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \ \& \ \beta_2$ $\vdash \alpha_1 \ \vee \ \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \ \vee \ \beta_2$ $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \beta_1) \leftrightarrow (\alpha_2 \rightarrow \beta_2)$ </td> </tr> </table>	$\vdash \alpha_1 \ \& \ \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \ \& \ \beta_2$ $\vdash \alpha_1 \ \vee \ \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \ \vee \ \beta_2$ $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \beta_1) \leftrightarrow (\alpha_2 \rightarrow \beta_2)$
$\vdash \alpha_1 \ \& \ \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \ \& \ \beta_2$ $\vdash \alpha_1 \ \vee \ \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \ \vee \ \beta_2$ $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \beta_1) \leftrightarrow (\alpha_2 \rightarrow \beta_2)$	

4 Calcoli dei sequenti alla Gentzen per la ricerca delle dimostrazioni

Nel seguito andiamo a descrivere un calcolo dei sequenti per la logica classica predicativa e uno per la logica intuizionista predicativa *adatti alla ricerca della dimostrazione (o derivazione)* in modo *semi-automatico* che diventa *automatico* se ristretto ai loro frammenti *proposizionali*, ovvero ai sottocalcoli ottenuti togliendo le regole dei quantificatori universali, quelle dei quantificatori esistenziali e quelle dell'uguaglianza.

Tali calcoli sono formulati a partire sequenti del tipo

$$\Gamma \vdash \Delta$$

ove entrambe le lettere maiuscole greche Γ e Δ stanno ad indicare liste (anche vuote) di formule di un linguaggio formale predicativo fissato \mathcal{L} .

Quindi il sequente sopra rappresenta cinque tipi diversi di sequenti:

1. un sequente del tipo

$$pr_1, pr_2, \dots, pr_n \vdash cl_1, cl_2, \dots, cl_m$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

“se pr_1 è vero e pr_2 è vero... e pr_n è vero allora o cl_1 è vero oppure cl_2 è vero... oppure cl_m è vero”

o equivalentemente che la formula

$$(pr_1 \& pr_2) \dots \& pr_n \longrightarrow (cl_1 \vee cl_2) \dots \vee cl_m \quad \text{è vera}$$

posto che tutte le pr_i per $i = 1, \dots, n$ (dette *premesse*) e le cl_i per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano formule del linguaggio formale.

2. un sequente del tipo

$$\vdash cl_1, cl_2, \dots, cl_m$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

“o cl_1 è vero oppure cl_2 è vero... oppure cl_m è vero”

o equivalentemente che la formula

$$(cl_1 \vee cl_2) \dots \vee cl_m \quad \text{è vera}$$

o anche equivalentemente che la formula

$$\mathbf{tt} \rightarrow (cl_1 \vee cl_2) \dots \vee cl_m \quad \text{è vera}$$

posto che tutte le cl_i per $i = 1, \dots, m$ (dette *conclusioni*) siano formule del linguaggio formale.

3. un sequente del tipo

$$pr_1, pr_2, \dots, pr_n \vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

“se pr_1 è vero e pr_2 è vero... e pr_n è vero allora la costante **falso** è vera”

o equivalentemente la formula

$$(\text{pr}_1 \& \text{pr}_2) \dots \& \text{pr}_n \longrightarrow \perp \text{ è vera}$$

posto che tutte le pr_i per $i = 1, \dots, n$ (dette *premesse*) siano formule del linguaggio formale.

4. un sequente del tipo

$$\vdash$$

che rappresenta *un'asserzione* del tipo

la costante falso è vera

o equivalentemente che la proposizione

$$\perp \text{ è vera}$$

o anche equivalentemente che la proposizione

$$\text{tt} \rightarrow \perp \text{ è vera}$$

Possiamo riassumere che il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ rappresenta la formula

$$\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$$

ove le notazioni $\Gamma^{\&}$ e Δ^{\vee} sono definite a loro volta come segue:

$\Gamma^{\&} \equiv (\text{pr}_1 \& \text{pr}_2) \dots \& \text{pr}_n$ è la congiunzione delle formule in Γ
se $\Gamma \equiv \text{pr}_1, \text{pr}_2, \dots, \text{pr}_n$ con $n > 1$

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \text{tt}$ (costante vero)

se Γ è la lista vuota

oppure

$\Gamma^{\&} \equiv \text{pr}_1$

se $\Gamma \equiv \text{pr}_1$

$\Delta^{\vee} \equiv (\text{cl}_1 \vee \text{cl}_2) \dots \vee \text{cl}_n$ è la disgiunzione delle formule in Δ
se $\Delta \equiv \text{cl}_1, \text{cl}_2, \dots, \text{cl}_n$ con $n > 1$

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \perp$ (costante falso)

se Δ è la lista vuota

oppure

$\Delta^{\vee} \equiv \text{cl}_1$

se $\Delta \equiv \text{cl}_1$

Queste notazioni servono quindi per interpretare una lista di formule Γ *a sinistra* del segno \vdash come un'unica formula $\Gamma^{\&}$ che è la congiunzione (associata a sinistra) *delle formule nella lista* Γ e per interpretare una lista di formule Δ *a destra* del segno \vdash come un'unica formula Δ^{\vee} che è la *disgiunzione* (associata a sinistra) *delle formule nella lista* Δ .

In particolare

il contesto vuoto a sinistra del segno \vdash rappresenta la costante vero

il contesto vuoto a destra del segno \vdash rappresenta la costante falso.

Il motivo di ciò è il seguente. Si noti che data una lista di formule $\Gamma \equiv pr_1, pr_2, \dots, pr_n$ allora la concatenazione della lista Γ con la lista vuota $[\]$ che indichiamo con una virgola

$$\Gamma, [\]$$

è uguale alla lista Γ ovvero

$$\Gamma, [\] = \Gamma \quad [\], \Gamma = \Gamma$$

e questo succede per le liste sia a destra che a sinistra del sequente. Ma allora dovremmo avere che

$$(\Gamma, [\])^{\&} = \Gamma^{\&} = ([\], \Gamma)^{\&}$$

come pure

$$(\Delta, [\])^{\vee} = \Delta^{\vee} = ([\], \Delta)^{\vee}$$

e siccome il simbolo $\Gamma^{\&}$ esprime la congiunzione delle formule in Γ si ha che

$$(\Gamma, [\])^{\&} = \Gamma^{\&} \& ([\])^{\&} \quad ([\], \Gamma)^{\&} = ([\])^{\&} \& \Gamma^{\&}$$

ovvero $[\]^{\&}$ deve soddisfare

$$\Gamma^{\&} \& ([\])^{\&} = \Gamma^{\&}$$

e quindi $([\])^{\&}$ deve essere per forza $([\])^{\&} = \mathbf{tt}$ in quanto congiunto ad una formula non ne altera la validità.

Analogamente siccome il simbolo Δ^{\vee} esprime la disgiunzione delle formule in Δ si ha che

$$(\Delta, [\])^{\vee} = \Delta^{\vee} \vee ([\])^{\vee} \quad ([\], \Delta)^{\vee} = ([\])^{\vee} \vee \Delta^{\vee}$$

ovvero $[\]^{\vee}$ deve soddisfare

$$\Delta^{\vee} \vee ([\])^{\vee} = \Delta^{\vee}$$

e quindi deve essere per forza $([\])^{\vee} = \perp$ in quanto messo in disgiunzione con una formula non ne altera la validità.

Per ciascun calcolo dei sequenti che presenteremo adotteremo i concetti di albero, di albero di derivazione e di derivabilità di un sequente descritti in sezione 3.1.

4.1 Calcolo dei sequenti per la Logica Classica predicativa con uguaglianza $LC_{=}$ (con meta-variabili per formule).

Il calcolo $LC_{=}$ è determinato dagli assiomi e regole presentati sotto ricordando che

- i simboli fr , fr_1 e fr_2 sono META-variabili che indicano formule complesse arbitrarie mentre le lettere greche maiuscole $\Gamma, \Sigma\Delta, \dots$ sono meta-variabili che indicano liste arbitrarie (anche vuote!) di formule;
- la scrittura $fr[x/t]$ indica la formula ottenuta sostituendo TUTTE le occorrenze libere della variabile x in fr con il termine t (si veda la definizione formale di sostituzione in sezione 3.11);
- la scrittura $\Gamma[x/t]$ indica la lista di formule ottenuta dalla lista Γ sostituendo in ogni formula di tal lista la variabile x con il termine t ;
- il simbolo t è una META-variabile che indica un termine qualsiasi del linguaggio che può essere una delle variabili x, y, z, \dots oppure una delle costanti a, b, c, \dots ;
- le regole di quantificazioni sotto si intendono chiuse sulla sostituzione della variabili x, w che appaiono sotto con QUALSIASI altra variabile purchè vengano rispettate le condizioni indicate.

ax-id $\Gamma, \text{fr}_1, \Gamma' \vdash \Delta, \text{fr}_1, \Delta'$	ax-\perp $\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$	ax-tt $\Gamma \vdash \nabla, \text{tt}, \nabla'$
$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}}$		$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$
$\frac{\Gamma \vdash \text{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \text{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \& \text{fr}_2, \Delta} \&-D$		$\frac{\Gamma, \text{fr}_1, \text{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \text{fr}_1 \& \text{fr}_2 \vdash \Delta} \&-S$
$\frac{\Gamma \vdash \text{fr}_1, \text{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Delta} \vee-D$		$\frac{\Gamma, \text{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \text{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2 \vdash \Delta} \vee-S$
$\frac{\Gamma, \text{fr}_1 \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg \text{fr}_1, \Delta} \neg-D$		$\frac{\Gamma \vdash \text{fr}_1, \Delta}{\Gamma, \neg \text{fr}_1 \vdash \Delta} \neg-S$
$\frac{\Gamma, \text{fr}_1 \vdash \text{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2, \Delta} \rightarrow-D$		$\frac{\Gamma \vdash \text{fr}_1, \Delta \quad \Gamma, \text{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2 \vdash \Delta} \rightarrow-S$
$\frac{\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla} \forall-D \text{ (} \mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla)\text{)}$		$\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \nabla}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr} \vdash \nabla} \forall-S$
$\frac{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \text{ fr} \vdash \nabla} \exists-S \text{ (} \mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \Delta)\text{)}$		$\frac{\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla} \exists-D$
$\frac{\Sigma, \mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}{\Sigma, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{s}], \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{s}]} = -S_1$		$\frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}{\Sigma, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{s}], \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{s}]} = -S_2$
$= -\text{ax}$ $\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}$		

4.1.1 Presentazione alternativa del calcolo dei sequenti per la Logica Classica predicativa con uguaglianza $\text{LC}_=$ con chiusura su sostituzione

Presentiamo qui le regole del calcolo dei sequenti $\text{LC}_=$ in modo alternativo a quelle date in 4.1 analogamente a quanto operato con i calcoli per la deduzione naturale. La novità anche qui è che le regole sotto presentate agiscono su quantificatori e connettivi applicati rispettivamente a predicati atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} . Però per completezza il calcolo deve contenere *anche TUTTE le applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} e dei predicati $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ delle formule qualsiasi e al posto di \mathbf{w} nelle regole $\exists-S$ e $\forall-D$ una qualsiasi altra variabile purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.*

ax-id $\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \Delta, \mathbf{A}, \Delta'$	ax-\perp $\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla$	ax-tt $\Gamma \vdash \nabla, \text{tt}, \nabla'$
$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}}$		$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}}$

$$\begin{array}{l}
\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&S \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\overline{\Gamma}, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \\
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -S \\
\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall-S \\
\frac{\Gamma, A(w) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \nabla} \exists-S \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists x A(x), \nabla)) \\
\frac{\Sigma, \mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \Delta(\mathbf{s}), \nabla} = -S_1 \\
= -ax \\
\Gamma \vdash t = t, \Delta
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D \\
\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee D \\
\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\overline{\Gamma} \vdash \neg A, \Delta} \neg-D \\
\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -D \\
\frac{\Gamma \vdash A(w), \nabla}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \nabla} \forall-D \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall x A(x), \nabla)) \\
\frac{\Gamma \vdash A(t), \exists x A(x), \nabla}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \nabla} \exists-D \\
\frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \Delta(\mathbf{s}), \nabla} = -S_2
\end{array}$$

ove con la scrittura $\Gamma(\mathbf{t})$ si intende che il termine \mathbf{t} può comparire in alcune formule di Γ come non comparire in alcuna formula.

4.1.2 Calcolo per la logica classica predicativa LC

Diamo qui risalto al nome che usiamo per il calcolo dei sequenti per la logica classica predicativa senza uguaglianza:

Def. 4.1 (logica classica predicativa) *Chiamiamo LC il calcolo dei sequenti per la logica classica predicativa che è ottenuto da LC₌ ommettendo le regole dell'uguaglianza.*

4.2 Calcolo dei sequenti della Logica Intuizionista predicativa con uguaglianza LI₌ (con meta-variabili per formule)

Il calcolo dei dei sequenti della Logica Intuizionista predicativa con uguaglianza LI₌ è determinato dagli assiomi e regole presentati sotto ricordando che

- i simboli \mathbf{fr} , \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 , ψ sono META-variabili che indicano formule complesse arbitrarie mentre le lettere greche maiuscole Γ, Δ, \dots sono meta-variabili che indicano liste arbitrarie di formule;
- la scrittura $\mathbf{fr}[x/t]$ indica la formula ottenuta sostituendo TUTTE le occorrenze libere della variabile \mathbf{x} in \mathbf{fr} con il termine \mathbf{t} (si veda la definizione formale di sostituzione in sezione 3.11);
- Il simbolo \mathbf{t} è una META-variabile che indica un termine qualsiasi del linguaggio che può essere una delle variabili $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ oppure una delle costanti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$;
- le regole di quantificazioni sotto si intendono chiuse sulla sostituzione della variabili \mathbf{x}, \mathbf{w} che appaiono sotto con QUALSIASI altra variabile purchè vengano rispettate le condizioni indicate.

Sia LI₌ il calcolo contenente le regole che seguono e la loro chiusura per sostituzione dei predicati atomici con formule arbitrarie oltrechè delle meta-variabili di liste di formule con delle liste di formule:

$$\begin{array}{ccc}
\text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-tt} \\
\Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma' \vdash \mathbf{fr} & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \mathbf{fr} & \Gamma \vdash \mathbf{tt}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \text{fr}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \text{fr}} \text{sc}_{\text{sx}} \\
\\
\frac{\Gamma, \text{fr}_1, \text{fr}_2 \vdash \psi}{\Gamma, \text{fr}_1 \& \text{fr}_2 \vdash \psi} \&-S \qquad \frac{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \quad \Gamma \vdash \text{fr}_2}{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \& \text{fr}_2} \&-D \\
\\
\frac{\Gamma, \text{fr}_1 \vdash \psi \quad \Gamma, \text{fr}_2 \vdash \psi}{\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2 \vdash \psi} \vee-S \qquad \frac{\Gamma \vdash \text{fr}_1}{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2} \vee-D_{n_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \text{fr}_2}{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2} \vee-D_{n_2} \\
\\
\frac{\Gamma, \neg \text{fr} \vdash \text{fr}}{\Gamma, \neg \text{fr} \vdash \psi} \neg-S \qquad \frac{\Gamma, \text{fr} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \text{fr}} \neg-D \\
\\
\frac{\Gamma, \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2 \vdash \text{fr}_1 \quad \Gamma, \text{fr}_2 \vdash \psi}{\Gamma, \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2 \vdash \psi} \rightarrow -S \qquad \frac{\Gamma, \text{fr}_1 \vdash \text{fr}_2}{\Gamma \vdash \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2} \rightarrow -D \\
\\
\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \psi}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr} \vdash \psi} \forall-S \qquad \frac{\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \text{ fr}} \forall-D \ (w \notin VL(\Gamma, \forall \mathbf{x} \text{ fr})) \\
\\
\frac{\Gamma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \psi}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \text{ fr} \vdash \psi} \exists-S \ (w \notin VL(\Gamma, \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \psi)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \text{ fr}} \exists-D_n \\
\\
\frac{\Sigma, \mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}{\Sigma, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{s}], \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{s}]} = -S_1 \qquad \frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}{\Sigma, \Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{s}], \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{s}]} = -S_2 \\
\\
= -ax \\
\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}
\end{array}$$

4.3 Presentazione alternativa del calcolo dei sequenti della Logica Intuizionista predicativa con uguaglianza $\text{LI}_=$ con chiusura su sostituzione.

Presentiamo qui le regole del calcolo dei sequenti per la deduzione naturale intuizionista con uguaglianza $\text{LI}_=$ in modo alternativo a quelle date in 4.2 analogamente a quanto operato per il calcolo $\text{LC}_=$. Quindi anche qui la novità è che le regole sotto presentate agiscono su quantificatori e connettivi applicati rispettivamente a predicati atomici $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} . Poi però per completezza il calcolo deve contenere *anche TUTTE le applicazioni delle regole ottenute mettendo al posto delle variabili \mathbf{A}, \mathbf{B} e dei predicati $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ delle formule qualsiasi e al posto di \mathbf{w} nelle regole $\exists-S$ e $\forall-D$ una qualsiasi altra variabile purchè rispetti le condizioni dettate dalle regole.*

$$\begin{array}{ccc}
\text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-tt} \\
\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \mathbf{A} & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \mathbf{C} & \Gamma \vdash \text{tt} \\
\\
\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \mathbf{C}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \mathbf{C}} \text{sc}_{\text{sx}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \&-S \\
\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{C} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \vee-S \\
\frac{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}} \neg-S \\
\frac{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \rightarrow -S \\
\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{C}} \forall-S \\
\frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{C}} \exists-S \quad (w \notin VL(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{C})) \\
\frac{\Sigma, \mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{t})}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \mathbf{C}(\mathbf{s})} = -S_1 \\
= -ax \\
\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}} \&-D \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee-D_{n_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee-D_{n_2} \\
\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}} \neg-D \\
\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow -D \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} \forall-D \quad (w \notin VL(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))) \\
\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})} \exists-D_n \\
\frac{\Sigma, \mathbf{s} = \mathbf{t}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{C}(\mathbf{t})}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{s} = \mathbf{t} \vdash \mathbf{C}(\mathbf{s})} = -S_2
\end{array}$$

ove con la scrittura $\Gamma(\mathbf{t})$ si intende che il termine \mathbf{t} può comparire in alcune formule di Γ come non comparire in alcuna formula.

4.3.1 Calcolo per la logica intuizionista predicativa LI

Diamo qui risalto al nome che usiamo per il calcolo dei sequenti per la logica intuizionista predicativa senza uguaglianza:

Def. 4.2 (logica intuizionista predicativa) *Chiamiamo LI il calcolo dei sequenti per la logica intuizionista predicativa che è ottenuto da $\mathbf{LI}_=$ ommettendo le regole dell'uguaglianza.*

4.4 Attenzione alle condizioni su variabili

Quando si applica $\forall-D$ o $\exists-S$ controllare le **condizioni su variabili**:

$$\begin{array}{l}
\frac{\text{ax-id}}{\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall-D \text{ NO!!!}} \exists-S \\
\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \exists-S
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{\text{ax-id}}{\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})} \exists-S \text{ NO!!!}} \forall-D \\
\frac{\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})}{\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})} \forall-D
\end{array}$$

NON sono derivazioni corrette: nella prima NON si può applicare $\forall-D$ perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{sx} di \vdash ovvero in $\mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \forall \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z})$

e nella seconda NON si può applicare $\exists-S$ perchè \mathbf{z} è libera nel contesto a \mathbf{dx} di \vdash ovvero in $\exists \mathbf{z} \mathbf{A}(\mathbf{z}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{z})$.

4.4.1 Esempi di derivazione: uso delle regole $\forall-S$ e $\exists-D$ in LC

Nel calcolo $\mathbf{LC}_=$ possiamo derivare il sequente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{U}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})), \mathbf{U}(\bar{\mathbf{s}}) \vdash \mathbf{M}(\bar{\mathbf{s}})$$

in tal modo

$$\frac{\frac{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}), M(\bar{s}) \quad U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id} \quad \text{ax-id}}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id}}{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \text{ax-id}}{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \text{ax-id}} \rightarrow -S$$

Si noti che conviene applicare la regola $\forall -S$ mettendo al posto della metavariable \mathbf{t} il termine (costante o variabile) che si spera possa condurre a trovare una derivazione, ovvero non ha senso applicare prima la regola $\forall -S$ per esempio con la variabile \mathbf{x}

$$\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \quad U(x) \rightarrow M(x) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id}}{\frac{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \text{ax-id}} \forall -S$$

Anche se, grazie al fatto che la regola $\forall -S$ mantiene nella premessa del suo sequente premessa la quantificazione universale, si può recuperare la sostituzione giusta al secondo colpo così

$$\frac{\frac{\frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash U(\bar{s}), M(\bar{s}) \quad U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), M(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id} \quad \text{ax-id}}{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})} \text{ax-id}}{\frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{U(\bar{s}), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(x) \rightarrow M(x) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \text{ax-id}}{\frac{U(\bar{s}), U(x) \rightarrow M(x), \forall x (U(x) \rightarrow M(x)) \vdash M(\bar{s})}{\forall x (U(x) \rightarrow M(x)), U(\bar{s}) \vdash M(\bar{s})} \text{sc}_{sx}} \text{ax-id}} \rightarrow -S$$

Inoltre l'asserzione composta

Il conte Augusto è un'antenato di Mario ed è nobile
Qualche antenato di Mario è nobile

si può formalizzare nel sequente

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \ \vdash \ \exists \mathbf{x} \ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))$$

ove si pone

$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{“x è antenato di y”}$

$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \text{“x è nobile”}$

$\bar{\mathbf{m}} = \text{“Mario”}$

$\mathbf{c} = \text{“Il conte Augusto”}$

Possiamo derivare il sequente in $\text{LC}_=$ in tal modo:

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \ \vdash \ \mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}), \exists \mathbf{x} \ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))}{\mathbf{A}(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{c}) \ \vdash \ \exists \mathbf{x} \ (\mathbf{A}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{m}}) \ \& \ \mathbf{N}(\mathbf{x}))} \text{ax-id}} \exists -D$$

Si noti che conviene applicare la regola $\exists -D$ mettendo al posto della metavariable \mathbf{t} un termine (costante o variabile) che *compare nel resto del sequente* e che si spera possa condurre a trovare una derivazione.

4.5 Chiusura dei calcoli alla Gentzen della derivabilità per sostituzioni

Ovviamente avendo definito le regole dei calcoli dei sequenti alla Gentzen $\text{LC}_=$ e $\text{LI}_=$ in modo da includere tutte le regole ottenute da quelle presentate tramite sostituzioni dei predicati atomici che vi compaiono con formule arbitrarie ne segue che:

Proposition 4.3 I calcoli $\text{LC}_=$ e $\text{LI}_=$ sono chiusi per sostituzione dei predicati atomici che vi compaiono.

Esempio:

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{C, A, B \vdash A}{C, A \& B \vdash A} \&-S \\
\frac{C, A \& B \vdash A}{A \& B, C \vdash A} \text{sc}_{sx} \\
\frac{A \& B, C \vdash A}{(A \& B) \& C \vdash A} \&-S \\
\hline
(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C) \quad \&-D
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{ax-id} \qquad \text{ax-id} \\
\frac{C, A, B \vdash B \qquad C, A, B \vdash C}{C, A, B \vdash B \& C} \&-D \\
\frac{C, A, B \vdash B \& C}{C, A \& B \vdash B \& C} \&-S \\
\frac{C, A \& B \vdash B \& C}{A \& B, C \vdash B \& C} \text{sc}_{sx} \\
\frac{A \& B, C \vdash B \& C}{(A \& B) \& C \vdash B \& C} \&-S \\
\hline
(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C) \quad \&-D
\end{array}$$

è derivazione in $LC_{=}$ come pure

$$\begin{array}{c}
\text{ax-id} \\
\frac{C, A, \perp \vdash A}{C, A \& \perp \vdash A} \&-S \\
\frac{C, A \& \perp \vdash A}{A \& \perp, C \vdash A} \text{sc}_{sx} \\
\frac{A \& \perp, C \vdash A}{(A \& \perp) \& C \vdash A} \&-S \\
\hline
(A \& \perp) \& C \vdash A \& (\perp \& C)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{ax-id} \qquad \text{ax-id} \\
\frac{C, A, \perp \vdash \perp \qquad C, A, \perp \vdash C}{C, A, \perp \vdash \perp \& C} \&-D \\
\frac{C, A, \perp \vdash \perp \& C}{C, A \& \perp \vdash \perp \& C} \&-S \\
\frac{C, A \& \perp \vdash \perp \& C}{A \& \perp, C \vdash \perp \& C} \text{sc}_{sx} \\
\frac{A \& \perp, C \vdash \perp \& C}{(A \& \perp) \& C \vdash \perp \& C} \&-S \\
\hline
(A \& \perp) \& C \vdash A \& (\perp \& C) \quad \&-D
\end{array}$$

che è una derivazione ottenuta sostituendo \mathbf{B} con \perp nella derivazione sopra.

4.6 Chiarificazione sulla forma delle regole del calcolo LC

Proviamo a spiegare un pò come mai le regole di **LC** sono accettabili avvalendosi di tautologie classiche che riconosciamo grazie all'utilizzo del calcolo $\text{DNC}_=$. Lo stesso faremo rispetto alle regole di **LI** avvalendoci delle tautologie intuizioniste riconoscibili tramite $\text{DNI}_=$.

Nel seguito chiariremo le regole sostituendo Γ con una generica formula γ e Δ con una generica formula δ , lasciando al lettore di estendere la spiegazione al caso in cui Γ e Δ siano liste arbitrarie di formule.

- Le regole di sinistra della congiunzione e di destra della disgiunzione di $\text{LC}_=$ sono accettabili perchè rappresentano una riscrittura della virgola a sinistra e a destra del segno di sequenta.
- Gli assiomi identità seguono dalla tautologia classica (e anche intuizionista)

$$(\gamma_1 \& \alpha) \& \gamma_2 \rightarrow (\delta_1 \vee \alpha) \vee \delta_2$$

che si lascia da derivare in $\text{DNC}_=$ (e anche $\text{DNI}_=$) al lettore.

- L'assioma del falso segue dalla tautologia classica (e anche intuizionista)

$$(\gamma_1 \& \perp) \& \gamma_2 \rightarrow \delta$$

che si lascia da derivare in $\text{DNC}_=$ (e anche $\text{DNI}_=$) al lettore.

- La regola di destra della congiunzione segue dalla seguente tautologia classica (e anche intuizionista)

$$(\gamma \rightarrow \alpha \vee \delta) \& (\gamma \rightarrow \beta \vee \delta) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \& \beta) \vee \delta)$$

che si lascia da derivare in $\text{DNC}_=$ (e anche in $\text{DNI}_=$) al lettore.

- La regola di sinistra della disgiunzione segue dalla seguente tautologia classica (e anche intuizionista) simile a quella utilizzata per spiegare la regola di sinistra della congiunzione in deduzione naturale (in pratica nel calcolo di Genzten l'ipotesi di sinistra della deduzione naturale viene messa nel sequente conclusione proprio a sinistra!)

$$(\gamma \& \alpha \rightarrow \delta) \& (\gamma \& \beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\gamma \& (\alpha \vee \beta) \rightarrow \delta)$$

che si lascia da derivare in $\text{DNC}_=$ (e anche in $\text{DNI}_=$) al lettore.

- La regola di destra dell'implicazione segue dalla seguente tautologia classica

$$(\gamma \& \alpha \rightarrow \beta \vee \delta) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \vee \delta)$$

che si lascia da derivare in $\text{DNC}_=$ al lettore.

- La regola di sinistra dell'implicazione segue dalla seguente tautologia classica

$$(\gamma \rightarrow \alpha \vee \delta) \& (\gamma \& \beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\gamma \& (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \delta)$$

che si lascia da derivare in $\text{DNC}_=$ al lettore. È valida in $\text{DNI}_=$?

- La regola di destra della negazione segue dalla seguente tautologia classica

$$(\gamma \& \alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg \alpha \vee \delta)$$

che si lascia da derivare in $\text{DNC}_=$ al lettore.

- La regola di sinistra della negazione segue dalla seguente tautologia classica

$$(\gamma \rightarrow \alpha \vee \delta) \rightarrow (\gamma \& \neg\alpha \rightarrow \delta)$$

che si lascia da derivare in $\mathbf{DNC}_=$ al lettore. È valida in $\mathbf{DNI}_=$?

- La regola di destra della quantificazione universale segue dalla seguente tautologia classica

$$\forall w (\gamma \rightarrow \alpha(w) \vee \delta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \forall x \alpha(x) \vee \delta)$$

che si lascia da derivare in $\mathbf{DNC}_=$ al lettore.

- La regola di sinistra della quantificazione universale segue dalla seguente tautologia classica (ed anche intuizionista)

$$((\gamma \& \forall x \alpha(x)) \& \alpha(t) \rightarrow \delta) \rightarrow (\gamma \& \forall x \alpha(x) \rightarrow \delta)$$

che si lascia da derivare in $\mathbf{DNC}_=$ (o meglio in $\mathbf{DNI}_=$) al lettore.

- La regola di destra della quantificazione esistenziale segue dalla seguente tautologia classica (ed anche intuizionista)

$$(\gamma \rightarrow (\alpha(t) \vee \exists x \alpha(x)) \vee \delta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \exists x \alpha(x) \vee \delta)$$

che si lascia da derivare in $\mathbf{DNC}_=$ (o meglio in $\mathbf{DNI}_=$) al lettore.

- La regola di sinistra della quantificazione esistenziale segue dalla seguente tautologia classica (ed anche intuizionista)

$$\forall w (\gamma \& \alpha(w) \rightarrow \delta) \rightarrow (\gamma \& \exists x \alpha(x) \rightarrow \delta)$$

che si lascia da derivare in $\mathbf{DNC}_=$ (o meglio in $\mathbf{DNI}_=$) al lettore.

*Dove è finita la regola di **reductio ad absurdum**?*

Confrontando le regole con il calcolo $\mathbf{LI}_=$ per il momento si può solo constatare che è inglobata nelle regole di destra della negazione e dell'implicazione in quanto quelle di destra sia della congiunzione che della disgiunzione qui giustificate si giustificano pure in $\mathbf{DNI}_=$.

Si osservi che pure la regola di destra della quantificazione universale di \mathbf{LC} è stata ristretta in $\mathbf{LI}_=$ in quanto la sua formulazione generale NON è intuizionisticamente valida.

5 Utili proprietà dei calcoli dei sequenti per la ricerca della prova

Presentiamo qui alcune proprietà dei calcoli dei sequenti che ci serviranno per utilizzarli al meglio nella ricerca della prova di validità logica di una proposizione formale.

5.0.1 Classificazione della verità formale di formule

Presentiamo ora una classificazione formale della verità di una formula di un linguaggio predicativo relativamente alla sua *derivabilità* all'interno di un calcolo dei sequenti. Questo significa che per il momento facciamo coincidere la *verità logica di un enunciato formale*, ovvero il suo essere una *tautologia* con la sua *verità formale* in un *calcolo logico*.

Iniziamo con l'introdurre la definizione per enunciati in quanto sono di fatto le uniche formule del linguaggio formale che rappresentano formalizzazioni di enunciati in linguaggio naturale.

Def. 5.1 (Classificazione della verità formale di enunciati) Una formula fr si dice *enunciato* se fr NON ha variabili libere.

Diamo qui di seguito una classificazione della verità formale degli enunciati tramite il calcolo dei sequenti.

Dato un calcolo dei sequenti L , un enunciato dato da una formula fr si dice

TAUTOLOGIA (o VALIDA LOGICAMENTE) in L se $\vdash fr$ è derivabile in L .

OPINIONE in (o INDIPENDENTE da) L se nè fr , nè la sua negazione $\neg fr$ sono tautologie in L , ovvero nè $\vdash fr$, nè la sua negazione $\vdash \neg fr$ sono derivabili in L .

CONTRADDIZIONE (o INSODDISFACIBILE) in L se la sua negazione $\neg fr$ è tautologia in L , ovvero $\vdash \neg fr$ è derivabile in L .

esempio di tautologia in $DNC_{=}$: $\neg\neg(P \vee \neg P)$

esempio di opinione (o indipendente) in $DNC_{=}$: $\neg P$ (si pensi alle sostituzioni $P = \perp$ oppure $P = \top$, considerando che una derivazione è tale anche se le variabili predicative sono sostituiti con altre formule).

esempio di contraddizione in $DNC_{=}$: $P \& \neg P$

Per classificare le formule utilizzeremo la classificazione degli enunciati data sopra relativamente agli enunciati definiti come la loro chiusura universale:

Def. 5.2 La *chiusura universale* di una formula fr con variabili libere

$$VL(fr) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

è l'enunciato

$$Cu(fr) \equiv \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n fr$$

Diamo qui di seguito una classificazione della verità formale degli enunciati tramite il calcolo dei sequenti.

Dato un calcolo dei sequenti L , una formula \mathbf{fr} si dice

TAUTOLOGIA (o **VALIDA LOGICAMENTE**) in L se lo è la sua chiusura universale.

OPINIONE in (o **INDIPENDENTE da**) L se lo è la sua chiusura universale.

CONTRADDIZIONE (o **INSODDISFACIBILE** o **PARADOSSO**) in L se lo è la sua chiusura universale.

Def. 5.3 (classificazione verità di un sequente nella logica L) Dato un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ in un linguaggio della logica L , diciamo che il sequente è **tautologico** (o **valido logicamente**) oppure un'**opinione** o una **contraddizione** (o **paradosso**) nella logica L se e solo se lo è la chiusura universale della formula che rappresenta il suo significato ovvero

$$Cu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{fr})$$

(in quanto mostremo che il sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è valido in L se e solo se lo è il sequente $\vdash Cu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{fr})$).

Al fine di classificare le formule di un linguaggio predicativo in tautologie, opinioni o contraddizioni intuizioniste o logiche andiamo ad analizzare le proprietà dei calcoli introdotti utilizzando tecniche di teoria della dimostrazione, in particolare applicate ai calcoli dei sequenti alla Gentzen $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LI}_=$. Tale classificazione varrà pure per i calcoli $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ in quanto mostremo che sono rispettivamente equivalenti a $\mathbf{LC}_=$ ed $\mathbf{LI}_=$.

Potremmo quindi apprezzare le seguenti osservazioni:

- I calcoli $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ hanno regole molto fedeli al ragionamento usuale, *naturali* per l'appunto, e possono essere comprensibilmente adatti a rappresentare il ragionamento in logica classica e in logica intuizionista. Infatti la prova di validità delle tautologie classiche e intuizioniste tramite una loro derivazione in $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ fornisce un ragionamento *naturale* per offrire una **PROVA CONVINCENTE** della loro validità logica.
- I calcoli $\mathbf{LC}_=$ ed $\mathbf{LI}_=$ hanno regole poco naturali ma molto adatte per la classificazione delle formule. Quindi sarà cruciale dimostrare la loro equivalenza con i calcoli $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ per essere sicuri che possiamo utilizzarli per la classificazione delle formule in logica classica ed intuizionista.

Nel seguito iniziamo con l'introdurre altre tipologie di regole di inferenze tra sequenti.

5.1 Varie nozioni preliminari sulle regole dei calcoli

Nel seguito introduciamo una misura di profondità delle derivazioni seguito dalle definizioni di alcune tipologie regole di inferenze tra sequenti ovvero la nozione di regola derivata e di regola ammissibile. Concludiamo con la nozione di equivalenza tra calcoli.

5.1.1 Misura di profondità delle derivazioni

Introduciamo un concetto per misurare la profondità della derivazione di un sequente senza contare l'utilizzo delle regole di scambio.

Def. 5.4 La **profondità a meno di scambi** di un albero di derivazione π , che indichiamo con la scrittura $dt(\pi)$, in un calcolo dei sequenti L è la massima lunghezza (ovvero numero di nodi meno 1) di ciascuno dei suoi rami *senza contare il nodo dove si applica una regola di scambio*.

5.1.2 Regole derivate

Le regole derivate servono per abbreviare le derivazioni.

Def. 5.5 Una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ regola*}$$

o a due premesse

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ regola*}$$

si dice **regola derivata** nel calcolo dei sequenti di una logica L se supposti i suoi sequenti premessa derivabili in L, ovvero data una derivazione

$$\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash \Delta' \end{array}$$

allora la derivazione ottenuta applicando la regola

$$\frac{\begin{array}{c} \pi \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash \Delta' \end{array}}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ regola*}$$

si può ESPANDERE in una derivazione di $\Gamma \vdash \Delta$ a partire da π in L SENZA ispezionare le derivazioni dei sequenti premessa.

Ciò significa che una *regola derivata* è localmente trasformabile in un pezzo di albero di derivazione usando soltanto regole di L.

Esempi di regole derivate in LC₌

Le regole

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D}$$

sono regole derivate.

Infatti $\neg\neg\text{-S}$ abbrevia

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D}}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S}$$

Si provi per esercizio che la regola $\neg\neg\text{-D}$ è pure derivata.

Il sequente

$$\frac{\neg\text{-ax}_{sx1}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C}$$

è assioma **derivato** perchè abbrevia:

$$\frac{\frac{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'' \vdash A, C}{\Gamma, A, \Gamma', \Gamma'', \neg A \vdash C} \neg\text{-S}}{\Gamma, A, \Gamma', \neg A, \Gamma'' \vdash C} \text{sc}_{sx}$$

Per esercizio si mostri che i sequenti e le regole elencate qui sotto sono rispettivamente assiomi e regole derivate:

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma, \neg A, \Gamma', A, \Gamma'' \vdash C} \neg\text{-ax}_{sx2} \\
\frac{\frac{}{\Gamma \vdash \Sigma, A, \Sigma', \neg A, \Sigma''} \neg\text{-ax}_{dx1} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg A, \Sigma', A, \Sigma''} \neg\text{-ax}_{dx2}}{\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \neg\neg A \vdash \Delta} \neg\neg\text{-S} \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \neg\neg A, \Delta} \neg\neg\text{-D}} \\
\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, t = t, \Delta'} \text{rf}^* \\
\frac{}{\Gamma, t = u \vdash u = t, \Delta} \text{sm}^* \\
\frac{}{\Gamma, t = v, v = u \vdash t = u, \Delta} \text{tra}^* \\
\frac{}{\Gamma, P(t), t = u \vdash P(u), \Delta} \text{cp}^*
\end{array}$$

5.1.3 Regole ammissibili

Il concetto di regola ammissibile in un calcolo dei sequenti \mathbf{L} rappresenta il concetto di regola che conserva la nozione di derivabilità ovvero trasforma sequenti derivabili in sequenti derivabili e in sostanza rappresenta il concetto di regola “*valida*” in un calcolo perchè trasforma sequenti logicamente validi in sequenti logicamente validi.

Anche le regole ammissibili come quelle derivate ci serviranno per facilitare il processo di riconoscimento della derivabilità di un sequente.

Def. 5.6 (regola ammissibile) Una regola (ad una o due premessa) per sequenti nel linguaggio predicativo si dice **ammissibile** in un calcolo dei sequenti \mathbf{L} se supposto che i sequenti premessa siano tutti derivabili in \mathbf{L} lo è anche il sequente conclusione.

Esempi di regole ammissibili sono ovviamente tutte le regole del calcolo e le regole derivate. Nei calcoli finora presentati esistono numerosi esempi di regole ammissibili che non sono nè regole del calcolo e nè regole derivate ma per riconoscere il loro status di regola ammissibile occorre produrre una dimostrazione generalmente per induzione sui possibili modi di derivare i sequenti premessa.

Ad esempio nel calcolo dei sequenti per logica classica predicativa con uguaglianza e anche in quella intuizionista sono ammissibili le seguenti regole di indebolimento:

Proposition 5.7 (ammissibilità di indebolimento a dx e a sx in $\mathbf{LC}_=$) Le regole di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{sx} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{in}_{dx}$$

sono ammissibili in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. Per induzione sulla profondità delle derivazione della premessa.

Proposition 5.8 (ammissibilità di indebolimento a sx in $\mathbf{LI}_=$) La regola di indebolimento a sinistra

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{in}_{\text{sx}}$$

è ammissibile in $\mathbf{LI}_=$.

Dim. Per induzione sulla profondità delle derivazione della premessa.

5.1.4 Equivalenza di calcoli di sequenti

Una nozione molto utili per confrontare i calcoli è quella di equivalenza:

Def. 5.9 (Equivalenza di calcoli) Dati due calcoli dei sequenti \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 , diciamo che \mathbf{L}_1 è *equivalente* a \mathbf{L}_2 se \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 provano come veri, cioè derivano, le stesse formule:

$$\begin{array}{c} \vdash \mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{L}_1 \\ \text{sse} \\ \vdash \mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{L}_2 \end{array}$$

Un modo per dimostrare che due calcoli sono equivalenti è mostrare che le regole di uno sono ammissibili nell'altro e viceversa.

5.2 Nozione di regola invertibile e invertibilità delle regole di $\mathbf{LC}_=$

Qui di seguito introduciamo il concetto di regola invertibile ovvero di una regola che è ammissibile assieme alle sue inverse. In altre parole in una *regola invertibile* la *validità logica scende dalla contemporanea validità di TUTTE le premesse della regola alla conclusione della regola* ma anche *sale dalla conclusione della regola a CIASCUNA premessa della regola stessa*.

Poi mostremo che le regole di $\mathbf{LC}_=$ sono tutte *invertibili* concludendo quindi che nella ricerca della derivazione di un sequente in $\mathbf{LC}_=$ dal basso verso l'alto NON c'è pericolo di sbagliare strategia (contrariamente a quel che succede con i calcoli in deduzione naturale), in quanto se un sequente radice è logicamente valido lo devono essere anche tutte le premesse delle regole di $\mathbf{LC}_=$ che vengono applicate dal basso verso l'alto.

Diamo ora la definizione formale di regola inversa.

Def. 5.10 (regola inversa ad una premessa) La regola **inversa** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

è la seguente

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} * - \text{inv}$$

Def. 5.11 (regola inversa ad due premesse) Le regole **inverse** di una regola del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma' \vdash \Delta'} *$$

sono le DUE seguenti

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1} * - \text{inv1} \quad \frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} * - \text{inv2}$$

Def. 5.12 (regola INVERTIBILE) Una regola si dice **INVERTIBILE** in un calcolo **L** se lei e le sue inverse sono entrambe ammissibili in **L**.

Chiaramente le regole a sinistra dell'uguaglianza sono invertibili per definizione. Ci concentriamo ora a dimostrare l'invertibilità delle altre regole.

5.2.1 Regole n-ammissibili

Per dimostrare l'invertibilità delle regole del calcolo **LC₌** introduciamo altri concetti utili come quello di regola **n**-ammissibile.

Def. 5.13 (regola n-ammissibile) Una regola (ad una o due premessa) per sequenti nel linguaggio predicativo si dice **n-ammissibile** in un calcolo dei sequenti **L** se supposto che i *sequenti premessa* siano tutti derivabili in **L** con *profondità al più n* allora anche il *sequente conclusione* è derivabile con *profondità al più n*.

Si noti che nessuna regola non assioma di **LC₌** è **n**-ammissibile. Mostreremo subito esempi molto utili di regole **n**-ammissibili: la regola di sostituzione e le regole di indebolimento.

Notazione di formule: nel seguito useremo come meta-variabili per indicare delle formule arbitrarie di un linguaggio predicativo **L** oltre alle scritture

$$\mathbf{fr}, \mathbf{fr}', \mathbf{fr}_i$$

le lettere minuscole greche

$$\alpha, \beta, \gamma(\mathbf{x}) \dots$$

Ribadiamo inoltre come già indicato che con

$$\gamma(\mathbf{x})$$

intendiamo una formula ove PUÒ o meno comparire la variabile libera **x**, ma anche altre variabili, e la usiamo per indicare

$$\gamma(\mathbf{x})[\mathbf{x}/\mathbf{t}] = \gamma(\mathbf{t})$$

ove di nuovo $\gamma(\mathbf{t})$ indica una formula in cui può comparire il termine **t**. Ricordiamo inoltre che riserviamo le lettere maiuscole

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}(\mathbf{x}), \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

per le formule atomiche di **L**.

Come conseguenza per esempio possiamo dire che

$$VL(\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$$

ma non possiamo invece dire nulla di

$$VL(\gamma(\mathbf{x}))$$

perchè **x** potrebbe non comparire come pure potrebbero esserci in $\gamma(\mathbf{x})$ altre variabili libere.

Notazione di derivazioni: Nel seguito useremo la scrittura

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta}$$

per indicare un'albero di derivazione chiamato π che ha come radice il sequente $\Gamma \vdash \Delta$.

Proposition 5.14 (n-ammissibilità di indebolimento in \mathbf{LC}_p) Le regole di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta} \text{in}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta', \Delta''} \text{in}_{\text{dx}}$$

sono **n**-ammissibili in \mathbf{LC}_p .

Dim Per induzione sulla profondità della derivazione della premessa della regola.

Proviamo la **n**-ammissibilità di in_{sx} in quanto la **n**-ammissibilità di in_{dx} segue analogamente.

Se $\mathbf{n} = 0$ allora il sequente $\Gamma, \Gamma'' \vdash \Delta$ è un'assioma o è radice di una sequenza di scambi culminanti in un assioma. In entrambi i casi possiamo riscrivere l'assioma con il Γ' incluso.

Se $\mathbf{n} \geq 1$ allora esiste una derivazione π di profondità $\mathbf{n} - 1$ tale che

$$\frac{\pi}{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Delta''}$$

è derivazione di profondità al più \mathbf{n} .

Ora si hanno due casi: o l'ultima regola di π è una delle regole di un connettivo oppure è una regola di scambio.

caso ultima-regola-di-connettivo: supponiamo per semplicità che

$$\Gamma'' \equiv \Delta, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2$$

e che in π l'ultima regola usata sia

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \text{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, \Sigma, \text{fr}_2 \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2 \vdash \Delta} \vee\text{-S}$$

allora per ipotesi induttiva avendo i sequenti premessa profondità $\mathbf{n} - 1$ si conclude che esistono derivazione π_1, π_2

$$\frac{\pi_1}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}_1 \vdash \Delta} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}_2 \vdash \Delta}$$

con profondità $\mathbf{n} - 1$. Usiamo queste derivazioni per ottenere la seguente derivazione:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}_1 \vdash \Delta} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}_2 \vdash \Delta}}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2 \vdash \Delta} \vee\text{-S}$$

che risulta di profondità \mathbf{n} e dunque prova la nostra tesi in questo caso.

Gli altri casi in cui l'ultima regola di π è quella di un connettivo si trattano analogamente.

caso ultima-regola-di-scambio: si cerca in π l'ultima regola di scambio risalendo nell'albero fino a trovare una derivazione π'

$$\frac{\pi'}{\nabla \vdash \Delta''}$$

di profondità \mathbf{n} ove l'ultima regola usata è quella di un connettivo e sappiamo che ∇ è una lista ottenuta permutando formule di Γ, Γ'' senza cambiare le copie di formule come Δ'' è ottenuto permutando formule di Δ . Ora ragionando come nel caso precedente otteniamo una derivazione π''

$$\frac{\pi''}{\nabla, \Gamma' \vdash \Delta''}$$

di profondità \mathbf{n} . Poi si osservi che ∇, Γ' contiene le stesse formule con le stesse occorrenze di $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ e dunque operando un numero finito di scambi si trova una derivazione di profondità \mathbf{n}

$$\frac{\pi' + \text{scambi}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta}$$

Si noti che nell'argomentazione sopra non importa dove inseriamo Γ' nel contesto di sinistra.

Proposition 5.15 (n-ammissibilità della sostituzione) La regola di sostituzione

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \text{ sost}$$

posto che la sostituzione di \mathbf{x} con il termine \mathbf{t} sia ben definita (in sostanza variabili libere di \mathbf{t} non diventino vincolate dopo la sostituzione!) è **n**-ammissibile in $\mathbf{LC}_=$.

Inoltre se π è derivazione di $\Gamma \vdash \Sigma$ con \mathbf{t} sostituibile con \mathbf{x} in essa ed \mathbf{x} e le variabili libere in \mathbf{t} non sono usate per applicare $\forall - D$ o $\exists - S$, allora la derivazione $\pi[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ in cui \mathbf{x} è stata sostituita con \mathbf{t} è pure una derivazione di $\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$.

Dim Per induzione sulla profondità massima **n** delle derivazioni delle premesse della regola mostriamo che se $\Gamma \vdash \Sigma$ è derivabile con una derivazione di profondità al più **n** allora per ogni variabile \mathbf{x} e termine \mathbf{t} sostituibili in $\Gamma \vdash \Sigma$ allora $\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ con una derivazione di profondità al più **n**.

Se $\mathbf{n} = 0$ allora il sequente $\Gamma \vdash \Sigma$ è un'assioma o è radice di una sequenza di scambi culminanti in un assioma. In entrambi i casi possiamo riscrivere l'assioma con la sostituzione inclusa e questo risulta ancora un assioma.

Se $\mathbf{n} \geq 1$ allora esiste una derivazione

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \Sigma}$$

di profondità **n**.

Ora distinguiamo quattro casi: o l'ultima regola di π è una delle regole di un connettivo $\circ = -S$, oppure $\circ \exists - S$ o $\forall - D$, oppure $\exists - D$ o $\forall - S$, oppure è una regola di scambio.

caso ultima-regola-di-connettivo $\circ = -S$: supponiamo per semplicità che

$$\Gamma \equiv \Sigma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2$$

e che in π l'ultima regola usata sia

$$\frac{\Sigma, \text{fr}_1 \vdash \Delta \quad \Sigma, \text{fr}_2 \vdash \Delta}{\Sigma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2 \vdash \Delta} \vee -S$$

allora per ipotesi induttiva avendo i sequenti premessa profondità **n - 1** si conclude che

$$\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \quad \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$$

sono derivabili con profondità **n - 1**. Siano π_1, π_2 derivazioni dei rispettivi sequenti con profondità **n - 1**. Usiamo queste derivazioni per ottenere la seguente derivazione:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \quad \frac{\pi_2}{\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}}{\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vee \text{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \vee -S$$

che risulta di profondità **n** e dunque prova la nostra tesi in quanto $\text{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vee \text{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \equiv (\text{fr}_1 \vee \text{fr}_2)[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ e quindi $\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \equiv \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}_1[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vee \text{fr}_2[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$.

caso ultima-regola-di-scambio: si cerca in π l'ultima regola NON di scambio risalendo nell'albero fino a trovare una derivazione π'

$$\frac{\pi'}{\Gamma' \vdash \Delta'}$$

di profondità \mathbf{n} ove l'ultima regola usata è quella di un connettivo o uguaglianza o quantificatore e sappiamo che Γ' è una lista ottenuta permutando formule di Γ senza cambiare le occorrenze delle formule e le loro ripetizioni. Ora ragionando come negli altri casi in cui l'ultima regola è di un connettivo o uguaglianza oppure quantificatore, otteniamo una derivazione π''

$$\frac{\pi''}{\Gamma'[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta'[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}$$

di profondità \mathbf{n} . Poi si osservi che $\Gamma'[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ contiene le stesse formule con le stesse occorrenze di $\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ e dunque operando un numero finito di scambi si trova una derivazione di profondità \mathbf{n}

$$\frac{\pi' + \text{scambi}}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}$$

caso ultima-regola \forall -S o \exists -D: supponiamo per semplicità che

$$\Gamma \equiv \Sigma, \forall \mathbf{y} \text{ fr}$$

e che in π l'ultima regola usata sia

$$\frac{\Sigma, \forall \mathbf{y} \text{ fr}, \text{fr}[\mathbf{y}/\mathbf{u}] \vdash \Delta}{\Sigma, \forall \mathbf{y} \text{ fr} \vdash \Delta} \forall\text{-S}$$

allora per ipotesi induttiva avendo i sequenti premessa profondità $\mathbf{n} - 1$ si conclude che

$$\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], (\forall \mathbf{y} \text{ fr})[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}[\mathbf{y}/\mathbf{u}][\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$$

è derivabile con profondità $\mathbf{n} - 1$. Sia π_1 una sua derivazione con profondità $\mathbf{n} - 1$. Usiamo questa derivazione per ottenere la seguente derivazione:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \forall \mathbf{y} \text{ fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \text{fr}[\mathbf{y}/\mathbf{u}][\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}}{\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \forall \mathbf{y} (\text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]) \vdash \Delta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \forall\text{-S}$$

che risulta di profondità \mathbf{n} e dunque prova la nostra tesi in quanto $\text{fr}[\mathbf{y}/\mathbf{u}][\mathbf{x}/\mathbf{t}] = \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}][\mathbf{y}/\mathbf{u}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]]$ e $(\forall \mathbf{y} \text{ fr})[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \equiv \forall \mathbf{y} (\text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}])$ per le proprietà della sostituzione e quindi $\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \equiv \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \forall \mathbf{y} (\text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}])$.

Si noti sopra che nel caso

$$\Gamma \equiv \Sigma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}$$

allora si procede come sopra notando che $(\forall \mathbf{x} \text{ fr})[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \equiv \forall \mathbf{x} \text{ fr}$ e che $\text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{u}][\mathbf{x}/\mathbf{t}] \equiv (\text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{u}])[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \equiv \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{u}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]]$.

caso ultima-regola \exists -S o \forall -D.

Supponiamo che l'ultima regola sia \exists -S.

Ora distinguiamo due casi: o \mathbf{x} è la variabile vincolata su cui agisce l'applicazione di \exists -S oppure lo NON è.

Caso in cui \mathbf{x} NON è variabile vincolata su cui agisce l'applicazione di \exists -S.

In tal caso procediamo supponendo che

$$\Gamma \equiv \Sigma, \exists \mathbf{y} \text{ fr}$$

e che in π l'ultima regola usata sia

$$\frac{\Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}{\Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta} \exists\text{-S}$$

Poi distinguiamo i seguenti sottocasi:

1. *sottocaso in cui x è la variabile libera su cui agisce $\exists\text{-S}$.* In tal sottocaso x non compare libera in $\Gamma \vdash \Delta$ e dunque la sostituzione non si effettua nel senso che $\Gamma[x/t] \equiv \Gamma$ e $\Delta[x/t] \equiv \Delta$ e dunque la tesi è banalmente vera.
2. *sottocaso in cui x non è la variabile libera su cui agisce $\exists\text{-S}$* Supponiamo per semplicità che

$$\Gamma \equiv \Sigma, \exists y \text{ fr}$$

e che in π l'ultima regola usata sia

$$\frac{\Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}{\Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta} \exists\text{-S}$$

con w non libera nel sequente $\Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta$. Ora vi sono due sotto casi:

- (a) *sottocaso in cui w non compare in t :* per ipotesi induttiva avendo il sequente premessa profondità $n - 1$ si conclude che

$$\Sigma[x/t], \text{fr}[y/w][x/t] \vdash \Delta[x/t]$$

è derivabile con profondità $n - 1$. Sia π_1 una sua derivazione con profondità $n - 1$. Usiamo questa derivazione per ottenere la seguente derivazione:

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Sigma[x/t], \text{fr}[x/t][y/w] \vdash \Delta[x/t]}}{\Sigma[x/t], \exists y \text{ fr}[x/t] \vdash \Delta[x/t]} \exists\text{-S}$$

che soddisfa il vincolo delle variabili per $\exists\text{-S}$ visto che w non compare in t da cui segue pure che $\text{fr}[x/t][y/w] = \text{fr}[y/w][x/t]$ e quindi π_1 è proprio una derivazione di $\Sigma[x/t], \text{fr}[x/t][y/w] \vdash \Delta[x/t]$. Inoltre siccome la derivazione sopra risulta di profondità n la nostra tesi è dimostrata in questo sottocaso.

- (b) *caso in cui w compare (ovviamente libera) in t .* In tal caso non possiamo procedere come nel caso precedente perchè il sequente

$$\Sigma[x/t], \exists y \text{ fr}[x/t] \vdash \Delta[x/t]$$

ha w che vi compare libera. Sappiamo però che esiste una derivazione π di profondità $n - 1$ di

$$\frac{\pi}{\Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}$$

e scegliendo una variabile z che *non compare per nulla* in π , per ipotesi induttiva esiste una derivazione π_1 della stessa lunghezza $n - 1$ di

$$\Sigma[w/z], \text{fr}[y/w][w/z] \vdash \Delta[w/z]$$

e siccome $\text{fr}[y/w][w/z] = \text{fr}[y/z]$ e w non compare libera in Σ, Δ ne segue che abbiamo una derivazione

$$\frac{\pi_1}{\Sigma, \text{fr}[y/z] \vdash \Delta}$$

di lunghezza $n - 1$ e di nuovo per ipotesi induttiva otteniamo un'altra derivazione sempre di lunghezza $n - 1$ di

$$\frac{\pi'_1}{\Sigma[x/t], \text{fr}[y/z][x/t] \vdash \Delta[x/t]}$$

ovvero

$$\frac{\pi'_1}{\Sigma[x/t], \text{fr}[x/t][y/z] \vdash \Delta[x/t]}$$

perchè $\text{fr}[y/z][x/t] = \text{fr}[x/t][y/z]$ in quanto z , che non compare in t . e quindi usiamo questa derivazione per ottenere la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Sigma[x/t], \text{fr}[x/t][y/z] \vdash \Delta[x/t]}}{\Sigma[x/t], \exists y (\text{fr}[x/t]) \vdash \Delta[x/t]} \exists\text{-S}$$

in cui l'applicazione finale di $\exists\text{-S}$ è corretta perchè z non compare nè in t nè compariva in Σ, Δ e siccome tale derivazione risulta di profondità n la nostra tesi è dimostrata pure in questo sottocaso.

Infine supponiamo che

$$\Gamma \equiv \Sigma, \exists x \text{ fr}$$

e che in π l'ultima regola usata sia

$$\frac{\Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}{\Sigma, \exists x \text{ fr} \vdash \Delta} \exists\text{-S}$$

con w non libera nel sequente $\Sigma, \exists x \text{ fr} \vdash \Delta$.

In questo sottocaso si procede osservando che da π sappiamo che esiste una derivazione π' di lunghezza $n - 1$ di

$$\frac{\pi'}{\Sigma[x/z], \text{fr}[x/w][x/z] \vdash \Delta[x/z]}$$

con z variabile NON presente in $\Sigma, \exists x \text{ fr} \vdash \Delta$ in alcuna forma. Osservando che $\text{fr}[x/w][x/z] = \text{fr}[x/w]$ per la definizione di sostituzione si conclude che abbiamo una derivazione di lunghezza $n - 1$ di

$$\frac{\pi'}{\Sigma[x/z], \text{fr}[x/w] \vdash \Delta[x/z]}$$

e osservando che

$$\Sigma[x/z][z/t] = \Sigma[x/t] \quad \Delta[x/z][z/t] = \Delta[x/t]$$

in tal caso si può procedere cercando una derivazione di

$$(\Sigma[x/z])[z/t], \exists x \text{ fr}[z/t] \vdash (\Delta[x/z])[z/t]$$

ovvero di

$$(\Sigma[x/z])[z/t], \exists x \text{ fr} \vdash (\Delta[x/z])[z/t]$$

per la non presenza di z in $\exists x \text{ fr}$, operando per ipotesi induttiva su π' rispetto alla sostituzione di z con t esattamente come nel caso in cui π si supponeva una derivazione di $\Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta$ in cui l'ultima regola si supponeva un $\exists\text{-S}$ operante sulla quantificazione esistenziale di y al fine di ottenere una derivazione in cui la variabile x veniva sostituita con il termine t di

$$\Sigma[x/t], \exists y \text{ fr}[x/t] \vdash \Delta[x/t]$$

Infine si osservi che una derivazione di $(\Sigma[x/z])[z/t], \exists x \text{ fr} \vdash (\Delta[x/z])[z/t]$ è proprio una derivazione di

$$\Sigma[x/t], \exists x \text{ fr} \vdash \Delta[x/t]$$

ovvero la nostra tesi.

Nel caso l'ultima regola di π sia $\forall\text{-D}$ si procede analogamente al caso in cui è $\exists\text{-S}$.

Proposition 5.16 (n-ammissibilità di indebolimento in $\mathbf{LC}_=$) Le regole di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma} \text{ in}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma''}{\Gamma \vdash \Sigma, \Sigma', \Sigma''} \text{ in}_{\text{dx}}$$

sono **n**-ammissibili in $\mathbf{LC}_=$.

Dim Per induzione sulla profondità della derivazione della premessa della regola.

Proviamo la **n**-ammissibilità di in_{sx} in quanto la **n**-ammissibilità di in_{dx} segue analogamente.

Se $\mathbf{n} = 0$ allora il sequente $\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma$ è un'assioma o è radice di una sequenza di scambi culminanti in un assioma. In entrambi i casi possiamo riscrivere l'assioma con il Γ' incluso e rifare gli scambi per arrivare ad avere alla radice dell'albero di derivazione $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma$.

Se $\mathbf{n} \geq 1$ allora esiste una derivazione

$$\frac{\pi}{\Gamma, \Gamma'' \vdash \Sigma''}$$

di profondità **n**.

Ora si hanno i seguenti casi: o l'ultima regola di π è una delle regole di un connettivo o $\exists - \mathbf{D}$ o $\forall - \mathbf{S}$, oppure è una delle regole di un quantificatore $\exists - \mathbf{S}$ o $\forall - \mathbf{D}$, oppure è una regola di scambio.

caso ultima-regola-di-connettivo o $\exists - \mathbf{D}$ o $\forall - \mathbf{S}$: si procede come nella dimostrazione di **n**-ammissibilità di in_{sx} in \mathbf{LC}_p .

caso ultima-regola-di-scambio: si cerca in π l'ultima regola di scambio risalendo nell'albero fino a trovare una derivazione π'

$$\frac{\pi'}{\nabla \vdash \Sigma''}$$

di profondità **n** ove l'ultima regola usata è quella di un connettivo o quantificatore e sappiamo che ∇ è una lista ottenuta permutando formule di Γ, Γ'' senza cambiare le copie di formule come pure Σ'' è ottenuto da Σ allo stesso modo. Ora ragionando come nel caso precedente otteniamo una derivazione π''

$$\frac{\pi''}{\nabla, \Gamma' \vdash \Sigma''}$$

di profondità **n**. Poi si osservi che ∇, Γ' contiene le stesse formule con le stesse occorrenze di $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ e dunque operando un numero finito di scambi si trova una derivazione di profondità **n**

$$\frac{\pi' + \text{scambi}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Sigma}$$

Si noti che nell'argomentazione sopra non importa dove inseriamo Γ' nel contesto di sinistra.

caso ultima-regola-di-quantificatore $\forall - \mathbf{D}$ o $\exists - \mathbf{S}$: supponiamo per semplicità che

$$\Gamma'' \equiv \Sigma, \exists y \text{ fr}$$

e che π sia una derivazione della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}}{\Gamma, \Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta} \exists - \mathbf{S}$$

con w non libera nel sequente $\Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta$. Allora per ipotesi induttiva su π' che ha profondità $\mathbf{n} - 1$ si conclude che

$$\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta$$

è derivabile con profondità $\mathbf{n} - 1$. Sia π_1 una sua derivazione con profondità $\mathbf{n} - 1$

$$\frac{\pi_1}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}$$

Ora si hanno due sottocasi: o w compare libera in Γ' o non vi compare libera.

1. *caso w è variabile libera in Γ'* In questo caso, siccome w appare libera in Γ' e quindi in $\Gamma, \Gamma', \Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta$, non possiamo proseguire la derivazione π_1 verso il basso applicando \exists -S per raggiungere la nostra tesi perchè violeremmo la condizione della regola circa le variabili. Allora usiamo il lemma di sostituzione 11.116 a π' sostituendo w con una variabile NUOVA, diciamo z , non in $\Gamma, \Gamma', \Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta$ per ottenere una derivazione di

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma[w/z], \Sigma, \text{fr}[y/w][w/z] \vdash \Delta[w/z]}$$

con profondità $n - 1$ come π' . Siccome w non compare libera in Γ e in Δ abbiamo in verità una derivazione di profondità $n - 1$ di

$$\frac{\pi''_1}{\Gamma, \Sigma, \text{fr}[y/z] \vdash \Delta}$$

e ora per ipotesi induttiva otteniamo una derivazione di profondità $n - 1$ di

$$\frac{\pi'''_1}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}[y/z] \vdash \Delta}$$

e finalmente possiamo estenderla verso il basso applicando la regola \exists -S a π'''_1 per ottenere

$$\frac{\frac{\pi''_1}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \forall y \text{ fr} \vdash \Delta} \exists\text{-S}$$

che è una derivazione di profondità n per $\Gamma, \Gamma', \Sigma, \forall y \text{ fr} \vdash \Delta$. La nostra tesi in questo caso risulta quindi dimostrata.

2. *caso in cui w non compare in Γ'* : in questo caso siccome w NON appare libera in Γ' e quindi in $\Gamma, \Gamma', \Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta$, possiamo proseguire la derivazione π_1 verso il basso applicando \exists -S per ottenere

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \text{fr}[y/w] \vdash \Delta}}{\Gamma, \Gamma', \Sigma, \forall y \text{ fr} \vdash \Delta} \exists\text{-S}$$

che è una derivazione di profondità n per $\Gamma, \Gamma', \Sigma, \exists y \text{ fr} \vdash \Delta$. Dunque la nostra tesi risulta dimostrata in questo caso.

Proposition 5.17 *Le seguenti regole sono invertibili in $\mathbf{LC}_=$*

$$\begin{array}{l}
\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}_1, \Delta \quad \Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2, \Delta} \&-D_{ex} \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta} \&-S_{ex} \\
\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2, \Delta} \vee-D_{ex} \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1, \Sigma \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta} \vee-S_{ex} \\
\frac{\Gamma, \mathbf{fr} \vdash \Sigma, \Delta}{\Gamma \vdash \Sigma, \neg \mathbf{fr}, \Delta} \neg-D_{ex} \qquad \frac{\Gamma, \Sigma \vdash \mathbf{fr}, \Delta}{\Gamma, \neg \mathbf{fr}, \Sigma \vdash \Delta} \neg-S_{ex} \\
\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vdash \Sigma, \mathbf{fr}_2, \Delta}{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2, \Delta} \rightarrow-D_{ex} \qquad \frac{\Gamma, \Sigma \vdash \mathbf{fr}_1, \Delta \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta} \rightarrow-S_{ex} \\
\frac{\Gamma, \forall x \mathbf{fr}, \mathbf{fr}[x/t], \Sigma \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x \mathbf{fr}, \Sigma \vdash \nabla} \forall-S_{ex} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \forall x \mathbf{fr}, \nabla} \forall-D_{ex} \ (w \notin VL(\Gamma, \forall x \mathbf{fr}, \Sigma, \nabla)) \\
\frac{\Gamma, A(w), \Sigma \vdash \nabla}{\Gamma, \exists x \mathbf{fr}, \Sigma \vdash \nabla} \exists-S_{ex} \ (w \notin VL(\Gamma, \exists x \mathbf{fr}, \Sigma, \nabla)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \mathbf{fr}[x/t], \exists x \mathbf{fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \exists x \mathbf{fr}, \nabla} \exists-D_{ex}
\end{array}$$

Dim. Il fatto che le regole sopra siano ammissibili è facilmente dimostrabile usando le regole di scambio a partire dalle regole del calcolo \mathbf{LC} . Procediamo a mostrare che le inverse delle regole sopra sono ammissibili.

Per dimostrare l'ammissibilità delle inverse di ciascuna regola si proceda per induzione sulla profondità della derivazione della premessa.

Le regole proposizionali si dimostrano analogamente una con l'altra.

Mostriamo l'invertibilità di

$$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}_1, \Sigma \vdash \Delta \quad \Gamma, \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta} \vee-S_{ex}$$

Supponiamo quindi di avere una derivazione π di profondità \mathbf{n}

$$\frac{\pi}{\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta}$$

Se $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ allora

$$\Gamma, \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta$$

è un'assioma (ovvero π è una serie di scambi che terminano in un assioma ma già la radice lo è senz'altro). Se l'assioma è $\mathbf{ax}\text{-}\perp$ o $\mathbf{ax}\text{-}\mathbf{tt}$ allora lo sono pure

$$\Gamma, \mathbf{fr}_1, \Sigma \vdash \Delta \qquad \Gamma, \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta$$

e dunque sono derivabili come volevamo dimostrare.

Nel caso che l'assioma sia $\mathbf{ax}\text{-}\mathbf{id}$, ovvero un assioma identità, se la formula che compare a destra e a sinistra del sequente è $\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2$ allora la tesi è facilmente verificata grazie alle regole di destra della \vee (lo si verifichi per esercizio).

Se invece la formula che compare a destra e a sinistra del sequente NON è $\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2$ allora tale formula deve stare in Γ, Σ e in Δ ovvero concludiamo che pure

$$\Gamma, \mathbf{fr}_1, \Sigma \vdash \Delta \qquad \Gamma, \mathbf{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta$$

sono assiomi identità e quindi derivabili come volevamo dimostrare.

Nel caso $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$ si hanno i seguenti casi:

1. π ha come ultima regola proprio \vee -S (e in tal caso Σ è la lista vuota!) e dunque chiaramente le premesse $\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma \vdash \Delta$ e $\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta$ sono derivabili.
2. π ha come ultima regola una regola diversa dalla regola \vee -S ed è una regola di un connettivo o quantificatore o dell'uguaglianza. Supponiamo che sia la regola $\&$ -D e dunque π è della forma

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma \vdash \alpha, \Delta'} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma \vdash \beta, \Delta'}}{\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma \vdash \alpha \& \beta, \Delta'} \&-D$$

e dunque per ipotesi induttiva su $\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma \vdash \alpha, \Delta'$ e $\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma \vdash \beta, \Delta'$ che sono derivabili con alberi di profondità inferiore a $n - 1$ deduciamo che esistono alberi di derivazione π'_1 e π''_1 e π'_2 e π''_2 per

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma \vdash \alpha, \Delta'} \quad \frac{\pi''_1}{\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma \vdash \alpha, \Delta'} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma \vdash \beta, \Delta'} \quad \frac{\pi''_2}{\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma \vdash \beta, \Delta'}$$

Applicando opportunamente la regola $\&$ -D si ottiene

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma \vdash \alpha, \Delta'} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma \vdash \beta, \Delta'}}{\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma \vdash \alpha \& \beta, \Delta'} \&-D \quad \frac{\frac{\pi''_1}{\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma \vdash \alpha, \Delta'} \quad \frac{\pi''_2}{\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma \vdash \beta, \Delta'}}{\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma \vdash \alpha \& \beta, \Delta'} \&-D$$

e dunque la nostra tesi è dimostrata in questo caso.

3. π ha come ultima regola uno scambio. In tal caso si risale fino all'ultima regola non di scambio utilizzata fino a trovare una derivazione π'

$$\frac{\pi'}{\Gamma', \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma' \vdash \Delta'}$$

di profondità al più n ove l'ultima regola usata in π' è quella di un connettivo o quantificatore, sapendo che $\Gamma', \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma'$ è una lista ottenuta permutando formule di $\Gamma, \text{fr}_1 \vee \text{fr}_2, \Sigma$ senza cambiare le copie di formule e lo stesso Δ' è una lista ottenuta permutando formule di Δ senza cambiare le copie di formule.

Ora procedendo come negli altri casi sopra si trovano derivazioni

$$\frac{\pi_1}{\Gamma', \text{fr}_1, \Sigma' \vdash \Delta'} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma', \text{fr}_2, \Sigma' \vdash \Delta'}$$

e poi operando gli scambi, in quanto dalle assunzioni fatti si vede immediatamente che $\Gamma', \text{fr}_1, \Sigma'$ e $\Gamma', \text{fr}_2, \Sigma'$ sono liste rispettivamente ottenute permutando formule di $\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma$ e di $\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma$, si conclude operando soltanto scambi che pure

$$\frac{\pi_1}{\Gamma, \text{fr}_1, \Sigma \vdash \Delta} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma, \text{fr}_2, \Sigma \vdash \Delta}$$

sono derivabili e con ciò abbiamo dimostrato la nostra tesi anche in questo caso.

Lasciamo per esercizio al lettore di dimostrare l'invertibilità delle altre regole proposizionali con *scambio assorbito*.

Mostriamo l'invertibilità di

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \text{fr}[x/t], \exists x \text{ fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \exists x \text{ fr}, \nabla} \exists-D_{\text{ex}}$$

Supponiamo quindi di avere una derivazione π di profondità \mathbf{n}

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \Sigma, \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla}$$

allora per la \mathbf{n} -ammissibilità della regola di indebolimento a destra in_{dx} si ottiene una derivazione di profondità \mathbf{n} di

$$\Gamma \vdash \Sigma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \exists \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla$$

ovvero la nostra tesi è dimostrata.

Per mostrare l'invertibilità di $\forall\text{-S}_{\text{ex}}$ si procede analogamente utilizzando la \mathbf{n} -ammissibilità della regola di indebolimento a sinistra in_{sx} .

Mostriamo l'invertibilità di

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla} \forall\text{-D}_{\text{ex}} (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \Sigma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla))$$

Supponiamo quindi di avere una derivazione π di profondità \mathbf{n}

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \Sigma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla}$$

allora si hanno i seguenti casi:

1. Se $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ allora

$$\Gamma \vdash \Sigma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla$$

è un'assioma (ovvero π è una serie di scambi che terminano in un assioma ma già la radice lo è senz'altro).

Se l'assioma è $\text{ax-}\perp$ o ax-tt allora lo è pure

$$\Gamma \vdash \Sigma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla$$

e dunque è derivabile come volevamo dimostrare. Se invece l'assioma è quello identità allora anche $\Gamma \vdash \Sigma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla$ lo è a meno che la formula che compare a destra e a sinistra non sia proprio $\forall \mathbf{x} \text{ fr}$; in quest'ultimo caso si procede a derivare $\Gamma \vdash \Sigma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla$ applicando la regola di sinistra della quantificazione universale.

2. π ha come ultima regola proprio $\forall\text{-D}$ e quindi Σ è la lista vuota e questa regola agisce su

$$\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{z}], \nabla$$

ove la variabile libera \mathbf{z} poi sostituita con una vincolata NON è \mathbf{w} .

Dunque abbiamo una derivazione di profondità $\mathbf{n} - \mathbf{1}$ di

$$\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{z}], \nabla$$

Ricordando che \mathbf{z} non compare in $\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla$, come pure \mathbf{w} non vi compare, allora per il lemma di \mathbf{n} -ammissibilità della sostituzione possiamo trovare una derivazione di profondità $\mathbf{n} - \mathbf{1}$ di

$$\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla$$

come volevamo dimostrare.

3. π ha come ultima regola proprio $\forall - D$ e quindi Σ è la lista vuota e questa regola agisce su

$$\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla$$

ove la variabile libera \mathbf{w} poi sostituita con una vincolata è proprio quella cercata e dunque ovviamente abbiamo in tal caso che $\Gamma \vdash \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla$ è derivabile con una derivazione di profondità al più $\mathbf{n} - 1$ e dunque la nostra tesi è dimostrata in tal caso.

4. π ha come ultima regola una regola diversa da $\forall - D$ ma sempre di un connettivo o quantificatore o una regola di uguaglianza per esempio la $\&-D$ e dunque π risulta decomposta in tal modo π_1 e π_2 tali che

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma', \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma \vdash \beta, \Sigma', \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla}}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta, \Sigma', \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla} \&-D$$

Chiaramente le premesse $\Gamma \vdash \alpha, \Sigma', \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \Delta$ e $\Gamma \vdash \beta, \Sigma', \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \Delta$ sono derivabili con alberi di profondità inferiore a $\mathbf{n} - 1$ e per ipotesi induttiva si ottengono delle derivazioni π'_1 e π'_2 per

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma', \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma \vdash \beta, \Sigma', \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla}$$

Applicando opportunamente la regola $\&-D$ si ottiene

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma', \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma \vdash \beta, \Sigma', \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla}}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta, \Sigma', \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Delta} \&-D$$

e dunque la nostra tesi è dimostrata in questo caso.

5. π ha come ultima regola uno scambio. In tal caso si risale fino all'ultima regola non di scambio utilizzata, si opera poi come nei casi precedenti e infine si conclude rifacendo gli scambi. Più in dettaglio si risale fino all'ultima regola non di scambio utilizzata fino a trovare una derivazione π''

$$\frac{\pi''}{\Gamma', \vdash \Sigma', \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla'}$$

ove l'ultima regola usata è quella di un connettivo o quantificatore, sapendo che $\Sigma', \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla'$ e Γ' sono liste rispettivamente ottenute permutando formule di $\Sigma, \forall \mathbf{x} \text{ fr}, \nabla$ e di Γ senza cambiare le copie di formule.

Ora ragionando come nel caso precedente otteniamo una derivazione π''

$$\frac{\pi''}{\Gamma' \vdash \Sigma', \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla'}$$

di profondità al più \mathbf{n} e ora operando gli scambi, in quanto dalle assunzioni fatti si vede immediatamente che $\Sigma', \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla'$ è una lista ottenuta permutando formule di $\Sigma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla$ e si conclude operando soltanto scambi che pure

$$\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \Sigma, \text{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \nabla}$$

è derivabile e con ciò abbiamo dimostrato la nostra tesi anche in questo caso.

Per mostrare l'invertibilità di $\exists - S$ si procede analogamente (si verifichi per esercizio il caso in cui la premessa è un assioma grazie alla presenza di un esistenziale a destra e a sinistra).

Corollary 5.18 (Invertibilità delle regole di $\mathbf{LC}_=$) Tutte le regole del calcolo $\mathbf{LC}_=$ sono invertibili, ovvero le loro inverse sono ammissibili in $\mathbf{LC}_=$.

Dalle dimostrazioni operate sopra possiamo anche osservare che l'invertibilità delle regole è locale ovvero che:

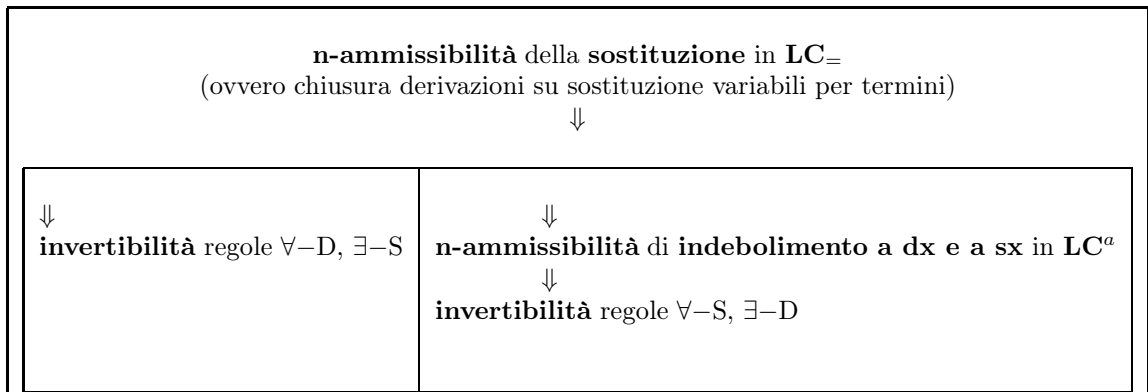
Corollary 5.19 (Invertibilità delle regole di \mathbf{LC}_p) Tutte le regole del calcolo \mathbf{LC}_p sono invertibili, ovvero le loro inverse sono ammissibili in \mathbf{LC}_p .

Corollary 5.20 (Invertibilità delle regole di \mathbf{LC}) Tutte le regole del calcolo \mathbf{LC} sono invertibili, ovvero le loro inverse sono ammissibili in \mathbf{LC} .

5.2.2 Conclusioni su invertibilità delle regole di $\mathbf{LC}_=$

Mostriamo ora i risultati principali che sono serviti per dimostrare l'invertibilità delle regole di \mathbf{LC} .

- l'invertibilità delle regole di \mathbf{LC}_p segue senza lemmi dopo aver dimostrato l'invertibilità della formulazione delle regole del calcolo con lo scambio assorbito;
- l'invertibilità delle regole con quantificatori di $\mathbf{LC}_=$ ha bisogno dei lemmi in tal modo



L'invertibilità delle regole di $\mathbf{LC}_=$ (si noti che le regole di uguaglianza sono invertibili per costruzione) ci permette di dimostrare:

Proposition 5.21 Dato un albero π costruito con sole regole di $\mathbf{LC}_=$ a partire da un sequente radice $\Gamma \vdash \Delta$ allora la radice $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ se e solo se lo sono anche tutte le sue foglie.

Quindi è possibile dimostrare la derivabilità o meno di sequenti in $\mathbf{LC}_=$ utilizzando questa proprietà come vedremo in vari esempi nel seguito.

5.3 Consistenza dei calcoli $LC_=$ ed $LI_=$

In **logica**, come in **matematica**
non si sa di cosa si parla
nè se ciò di cui si parla sia vero.
 (Russell)

Uno degli scopi di questo corso è chiarire come in matematica i teoremi che si dimostrano sono veri a condizione che gli assiomi e le regole logiche di cui si avvalgono le loro dimostrazioni siano assunti come veri.

In pratica la matematica come la logica è una *scienza deduttiva* che *dipende dai fondamenti logico-insiemistici* delle sue argomentazioni.

Nei capitoli precedenti abbiamo introdotto dei calcoli formali che rappresentano un modo per dedurre ciò che è logicamente vero per quanto riguarda la logica classica se si usa $DNC_=$ e per quanto riguarda la logica intuizionista se si usa $DNI_=$.

Ora ci chiediamo:

siamo sicuri che i sistemi $DNC_=$ o $DNI_=$ dimostrino solo formule intuitivamente vere? Non è che per caso siano contraddittori e per esempio dimostrino una formula fr e anche la sua negazione $\neg fr$?? o addirittura che dimostrino la costante \perp ?

Chiaramente avendo controllato che gli assiomi sia di $DNC_=$ che di $DNI_=$ sono intuitivamente veri e allo stesso modo dopo aver riconosciuto come valide intuitivamente anche le regole dei vari connettivi in verità siamo già sicuri che ciò non accade a meno di riconoscere il nostro ragionamento come contraddittorio. Una tal sicurezza dipende in verità dalla fiducia nel nostro ragionamento....

Ora ci proponiamo di riconoscere la non contraddittorietà dei nostri calcoli con dimostrazioni di carattere “matematico” che non fanno appello direttamente al nostro modo di ragionare.

L’obiettivo delle nostre note è quindi di dimostrare che sia in $DNC_=$ che in $DNI_=$ non si dimostra la costante falso o equivalentemente una formula e la sua negazione.

Iniziamo con l’introdurre la definizione di calcolo “*consistente*”:

Def. 5.22 Un calcolo dei sequenti L si dice *coerente* o *consistente*² se e solo se NON esiste alcuna formula fr per cui succede che si derivi lei, ovvero $\vdash fr$ sia derivabile, e anche la sua negazione $\neg fr$ ovvero pure $\vdash \neg fr$ sia derivabile.

Si noti che:

Proposition 5.23 Ciascun calcolo dei sequenti della deduzione naturale $DNC_=$ e $DNI_=$ è consistente se e solo se in esso il sequente $\vdash \perp$ NON è derivabile.

Dim. Invece di dimostrare l’enunciato della proposizione ne dimostriamo la controparte negativa ovvero che

Ciascun calcolo dei sequenti della deduzione naturale $DNC_=$ e $DNI_=$ NON è consistente se e solo se in esso il sequente $\vdash \perp$ è derivabile.

Infatti se $DNC_=$ NON fosse consistente allora esisterebbe un enunciato fr tale che si deriva sia lui che la sua negazione ovvero esisterebbero derivazioni π_1 e π_2 rispettivamente

$$\frac{\pi_1}{\vdash fr} \qquad \frac{\pi_2}{\vdash \neg fr}$$

e quindi applicando la regola di negazione a sinistra otterremmo una derivazione della costante falso come segue

$$\frac{\frac{\pi_1}{\vdash fr} \qquad \frac{\pi_2}{\vdash \neg fr}}{\vdash \perp} \neg\text{-Sn}$$

²In verità questo uso della parola “consistente” è un inglesismo che traduce l’inglese “consistent” usato in questo contesto nella lingua inglese in modo appropriato

Viceversa, se il sequente $\vdash \perp$ fosse derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ con una derivazione π

$$\frac{\pi}{\vdash \perp}$$

allora per la regola *ex-falso quodlibet* concludiamo che per una qualsiasi enunciato \mathbf{fr} deriviamo sia lui che la sua negazione

$$\frac{\frac{\pi}{\vdash \perp} \text{ ex-f-q}}{\vdash \mathbf{fr}} \quad \frac{\frac{\pi}{\vdash \perp} \text{ ex-f-q}}{\vdash \neg \mathbf{fr}}$$

e quindi $\mathbf{DNC}_=$ non sarebbe consistente.

La stessa dimostrazione vale se al posto di $\mathbf{DNC}_=$ poniamo $\mathbf{DNI}_=$.

Non è immediato dimostrare che i calcoli di deduzione naturale $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ sono consistenti (si provi a trovare una dimostrazione...). Invece è molto semplice dimostrare che i calcoli $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LI}_=$ sono consistenti!. Infatti mostremo che i calcoli $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ sono consistenti dimostrando che sono equivalenti rispettivamente ai calcoli $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LI}_=$ e deducendo quindi da quest'ultimi la loro consistenza.

5.3.1 NON derivabilità del falso in $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LI}_=$

Mostriamo di seguito che il calcolo $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LI}_=$ non derivano la costante falso. Vedremo in seguito che questo porterà a concludere che entrambi i calcoli sono consistenti.

Theorem 5.24 *Il sequente*

$$\vdash \perp$$

NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. Si noti che l'enunciato del teorema è logicamente equivalente al fatto che se esistesse una derivazione (che quindi ha una qualche profondità) allora troveremmo una contraddizione, il che ci dice che il sequente sopra NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

Dimostriamo l'enunciato del teorema mostrando che la (meta-)proposizione

$\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \text{NON esiste una derivazione } \pi \text{ di}$

$$\vdash \perp$$

di profondità al più \mathbf{n} in $\mathbf{LC}_=$

è vera qualsiasi sia il numero naturale \mathbf{n} per (meta-)induzione su \mathbf{n} ³.

Caso $n=0$. Siccome $\vdash \perp$ NON è un assioma del calcolo neanche dopo aver effettuato scambi (sono possibili solo scambi con liste vuote!) allora chiaramente $\vdash \perp$ NON ha derivazione di profondità 0.

Caso *induttivo*: Supponendo che $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ sia vera mostriamo che $\mathbf{P}(\mathbf{n} + 1)$ è pure vera.

A tal scopo supponiamo che *esista una derivazione π di $\vdash \perp$ di profondità al più $\mathbf{n} + 1$ in $\mathbf{LC}_=$ e facciamo vedere che troviamo una contraddizione.*

La supposta derivazione π termina sicuramente con una regola non di scambio con una o due premessa. Dalla forma delle regole si deduce che la premessa o le premesse dell'ultima regola in π non possono che essere del tipo

$$\vdash \perp$$

loro stesse con una profondità al più \mathbf{n} e ciò contraddice l'ipotesi $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ affermate che non esiste derivazione di $\vdash \perp$ di profondità al più \mathbf{n} .

Dunque $\mathbf{P}(\mathbf{n} + 1)$ è vera.

Analogamente possiamo dimostrare che

Theorem 5.25 *Il sequente*

$$\vdash \perp$$

NON è derivabile in $\mathbf{LI}_=$.

Nel seguito sarà utile sapere anche che:

Proposition 5.26 *Il sequente*

$$\mathbf{tt}, \dots, \mathbf{tt} \vdash \perp, \dots, \perp$$

con un numero finito arbitrario a sinistra di \mathbf{tt} e un numero finito arbitrario a destra di \perp , NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. Per esercizio.

5.4 Procedura di decisione per la logica classica proposizionale

Nel seguito definiamo la nozione di proposizione formale e il frammento proposizionale della logica classica predicativa con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ che chiamiamo \mathbf{LC}_p . Lo scopo è mostrare una procedura di decisione per classificare le proposizioni formali in termini di tautologia/opinione/contraddizione in logica classica proposizionale.

Def. 5.27 Sia L un linguaggio predicativo con uguaglianza. Diciamo che \mathbf{pr} è una *proposizione formale* se e solo se è una formula definita dai predicati atomici con le sole costanti del vero e del falso e i connettivi di congiunzione, disgiunzione, negazione e implicazione.

³Qui stiamo usando una nozione di numero naturale con relativo principio di induzione definito al metalinguaggio

5.4.1 Calcolo dei sequenti della Logica classica proposizionale LC_p

Il calcolo contiene regole per i connettivi \perp , $\&$, \vee , \neg , \rightarrow assieme all' **assioma identità** e alle regole di **scambio a destra e a sinistra** come segue

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \text{ax-id} & \text{ax-}\perp & \text{ax-tt} \\
 \Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, A, \Delta' & \Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \nabla & \Gamma \vdash \nabla, \text{tt}, \nabla'
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \Sigma'}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \Sigma'} \text{sc}_{\text{sx}} & & \frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} \text{sc}_{\text{dx}} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \& B, \Delta} \&-D & \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \& B \vdash \Delta} \&-S \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee-D & & \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee-S \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg-D & & \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg-S \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -D & & \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -S
 \end{array}
 \end{array}$$

e tale calcolo è chiuso su tutte le regole ottenute istanziando le variabili **A** e **B** con proposizioni arbitrarie e i contesti denotati con lettere greche Γ, Δ, Σ , **etc.** con liste arbitrarie di proposizioni (anche vuote). **PROPRIETÀ del CALCOLO:** le regole **DIMINUISCONO la complessità** delle formule coinvolte **dal BASSO verso l'ALTO**. Questa proprietà è cruciale per dimostrare l'esistenza della procedura di decisione che segue:

5.4.2 PROCEDURA di DECISIONE su DERIVABILITÀ di un sequente in LC_p

Per sapere se $\Gamma \vdash \nabla$ è **DERIVABILE** in LC_p procedi in tal modo:

1. $\Gamma \vdash \nabla$ è assioma? $\left\{ \begin{array}{l} \text{sì} \quad \text{vai in 5.} \\ \text{no} \quad \text{vai in 2.} \\ \text{se in } \Gamma \text{ o in } \nabla \text{ c'è proposizione composta} \\ \text{altrimenti STOP} \end{array} \right.$
 2. Scegli in $\Gamma \vdash \nabla$ una proposizione composta, diciamo $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ per esempio. $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ sta a dx di \vdash nel sequente, a sx se $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ sta a sx di \vdash)? $\left\{ \begin{array}{l} \text{sì} \quad \text{vai in 4. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \\ \text{no} \quad \text{vai in 3. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \end{array} \right.$
 3. se operi su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ fai uno scambio per portarla in posizione buona da poter applicare la sua regola e vai in 4. operando su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$.
 4. se operi su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ applica la sua regola. Quante premesse ha la regola? $\left\{ \begin{array}{l} \text{una} \quad \text{vai in 1. operando sulla premessa} \\ \text{due} \quad \text{scegli la prima premessa e vai in 1. operando su di essa} \end{array} \right.$
 5. nell'albero ottenuto c'è foglia che **NON** è assioma con almeno una proposizione composta? $\left\{ \begin{array}{l} \text{sì} \quad \text{scegli la foglia NON assioma e vai in 2.} \\ \quad \text{operando su di lei} \\ \text{no} \quad \text{STOP} \end{array} \right.$
- CONCLUSIONE: se nell'albero ottenuto tutte le foglie sono assiomi, allora $\Gamma \vdash \nabla$ è **DERIVABILE** in LC_p , e quindi **vera** ;
altrimenti **NON** è **DERIVABILE**.

5.4.3 PROCEDURA di CLASSIFICAZIONE VERITÀ di un SEQUENTE in LC_p

Passo 1: Per decidere se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **derivabile in LC_p** o meno si applichi la procedura di decisione della sua derivabilità in sezione 5.4.2 al sequente.

Si hanno due casi:

I caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **derivabile**, dunque è **vero** e quindi STOP.

II caso: il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **NON derivabile**.

Si vada poi al passo 2.

Passo 2: per decidere se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **indipendente da LC_p** o è un **paradosso** in LC_p si applichi il processo di decisione di validità in sezione 5.4.2 al sequente $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$

Ora si hanno due sottocasi:

I sottocaso: $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ risulta **NON derivabile** in LC_p

e quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta **indipendente da LC_p** , ovvero un' **opinione** in LC_p e dunque STOP.

II sottocaso: $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ risulta **derivabile** in LC_p

quindi $\Gamma \vdash \Delta$ risulta un **paradosso** in LC_p e dunque STOP.

Perchè la procedura di decisione di LC_p è corretta? La procedura è corretta per due motivi

- le regole di LC_p sono tutte *invertibili* ovvero anche le loro inverse conservano la derivabilità dal basso verso l'alto e quindi nella ricerca della prova dal basso verso l'alto NON c'è pericolo di sbagliare strategia (contrariamente a quel che succede con i calcoli in deduzione naturale).
- le regole, eccetto quelle di scambio, **DIMINUISCONO la complessità** delle formule coinvolte **dal BASSO verso l'ALTO** strettamente e quindi nella ricerca della prova la procedura di applicare le regole dal basso verso l'alto termina sempre in un sequente con solo costanti o variabili proposizionali.

5.5 Correttezza della procedura di decisione per \mathbf{LC}_p

Grazie alla consistenza del calcolo $\mathbf{LC}_=$ sappiamo che \mathbf{LC}_p è consistente e anche che:

Corollary 5.28 *Il sequente*

$$\mathbf{tt}, \dots, \mathbf{tt} \vdash \perp, \dots, \perp$$

NON è derivabile in \mathbf{LC}_p .

Ora l'invertibilità delle regole di \mathbf{LC}_p assieme al fatto che tutte le regole meno quelle di scambio DIMINUISCONO strettamente di COMPLESSITÀ dal BASSO verso l'ALTO consente di stabilire la correttezza della procedura di \mathbf{LC}_p come segue.

La procedura applicata ad un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ termina sempre con un albero le cui foglie sono fatte di sole variabili proposizionali senza poter applicare altre regole diverse da quelle di scambio. Ora, o questo albero è di derivazione, e dunque $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile, ossia vero formalmente in \mathbf{LC}_p (e sue estensioni) oppure esiste una foglia che non è assioma che può essere di tre forme diverse:

1. la foglia è data da un sequente della forma

$$\mathbf{S}_{i_1}, \dots, \mathbf{S}_{i_n} \vdash \mathbf{D}_{k_1}, \dots, \mathbf{D}_{k_m}$$

che è fatta solo da predicati atomici a dx o sx con eventualmente la costante \mathbf{tt} a sinistra o la costante \perp a destra, SENZA NESSUN predicato in comune a dx e a sx e nè costante vero \mathbf{tt} a destra o \perp a sinistra (altrimenti la foglia sarebbe assioma!);

2. la foglia è data da un sequente della forma

$$\vdash \mathbf{D}_{k_1}, \dots, \mathbf{D}_{k_m}$$

fatta da soli predicati atomici con eventualmente la costante \perp ;

3. la foglia è data da un sequente della forma

$$\mathbf{S}_{i_1}, \dots, \mathbf{S}_{i_n} \vdash$$

fatta da soli predicati atomici con eventualmente la costante \mathbf{tt} .

Ora si noti che in tal caso NESSUNA di tali foglie è derivabile in \mathbf{LC}_p . Lo si può constatare dimostrando che per ciascun tipo di sequente foglia sopra descritto non esiste una derivazione perchè se esistesse una derivazione π della foglia in questione o questa è di profondità zero, il che non può essere perchè il sequente foglia abbiamo detto che NON è un assioma, oppure è di profondità 1 ma neanche questo è possibile perchè non vi è alcuna regola applicabile per costruire una derivazione di profondità al più 1 a parte le regole di scambio applicate a vuoto o al più la regola di uguaglianza applicata a vuoto.

Un modo alternativo per vedere che il sequente della prima forma NON è derivabile è anche notare che se tal sequente fosse derivabile lo sarebbe pure il sequente

$$\mathbf{tt}, \dots, \mathbf{tt} \vdash \perp, \dots, \perp$$

ottenuto sostituendo le variabili proposizionali di sinistra \mathbf{S}_{i_j} con \mathbf{tt} per $j = 1, \dots, n$ e quelle di destra \mathbf{D}_{k_i} con \perp per $i = 1, \dots, m$. Ma per la proposizione 5.28 il sequente $\mathbf{tt}, \dots, \mathbf{tt} \vdash \perp, \dots, \perp$ non è derivabile in \mathbf{LC}_p , e dunque **per la chiusura su sostituzione di variabili proposizionali o predicative dei sequenti derivabili** il sequente foglia

$$\mathbf{S}_{i_1}, \dots, \mathbf{S}_{i_n} \vdash \mathbf{D}_{k_1}, \dots, \mathbf{D}_{k_m}$$

NON può essere derivabile in \mathbf{LC}_p e neanche in $\mathbf{LI}_=$.

Lo stesso metodo di sostituzione con le costanti vero e falso si può applicare per dedurre che anche i sequenti foglie delle altre forme (2) e (3) elencate sopra non sono derivabili in \mathbf{LC}_p .

Una volta stabilito che esiste una foglia dell'albero sviluppato secondo la procedura di decisione che NON è derivabile, ne segue che pure il sequente radice NON è derivabile in \mathbf{LC}_p perchè per l'invertibilità delle regole di \mathbf{LC}_p se la radice fosse derivabile allora lo sarebbe anche la foglia che abbiamo stabilito non essere derivabile.

Si noti infine che grazie al fatto che le regole applicabili ad un sequente sono solo quelle relative ai connettivi o quantificatori o uguaglianze che vi compaiono, il concetto di derivabilità di un sequente proposizionale in \mathbf{LC}_p coincide con quello in \mathbf{LC}_p :

Proposition 5.29 Un sequente proposizionale $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{LC}_p se e solo se è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

Ciò significa che possiamo applicare la procedura di decisione di \mathbf{LC}_p alle formule costruite con connettivi proposizionali a partire da predicati e uguaglianze.

5.6 Come stabilire la derivabilità di un sequente in $\mathbf{LC}_=$?

Per quanto riguarda il calcolo predicativo classico $\mathbf{LC}_=$ NON esiste una procedura di decisione per via del fatto che le regole non diminuiscono in complessità dal basso verso l'alto, ma anzi aumentano la complessità dei simboli di termine dal basso verso l'alto. Si dimostra infatti che il calcolo $\mathbf{LC}_=$ è INDECIDIBILE (teorema di Church) con tecniche simili a quelle utilizzate per il teorema di incompletezza di Gödel.

Però mostremo, aiutati dal fatto che *TUTTE* le regole di $\mathbf{LC}_=$ *conservano la derivabilità di un sequente dal BASSO verso l'ALTO*, ovvero sono *invertibili*, che possiamo stabilire la non derivabilità di un sequente in $\mathbf{LC}_=$ ragionando ad hoc sequente per sequente come negli esempi che seguono.

5.6.1 Esempio paradigmatico di come stabilire derivabilità o meno di un sequente predicativo

Il sequente $\vdash \exists x s(x) = x$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ e lo si dimostra provando che i sequenti del tipo

$$\vdash s(t_1) = t_1, \quad \exists x s(x) = x, \quad s(t_2) = t_2 \quad \dots \quad s(t_n) = t_n$$

NON sono derivabili in $\mathbf{LC}_=$.

Proposition 5.30 I sequenti del tipo

$$\vdash \Delta$$

ove Δ contiene solo formule del tipo $s(t) = t$ per qualche termine t e una o più occorrenze di $\exists x s(x) = x$ non sono derivabili in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. Per dimostrare questa proposizione dimostriamo per induzione su n naturale che

Lemma 5.31 I sequenti del tipo

$$\vdash \Delta$$

ove Δ contiene solo formule del tipo $s(t) = t$ per qualche termine t e una o più occorrenze di $\exists x s(x) = x$ non sono derivabili con una derivazione di profondità al più n in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. Dimostriamo l'enunciato per induzione su n .

Per $n=0$ non esiste tale derivazione perchè il sequente non è nè riconducibile ad un'assioma uguaglianza con eventuali scambi, nè tantomeno ad un altro assioma.

Supponiamo che per ipotesi induttiva non esista derivazione di profondità al più n . Allora vediamo che non ne esiste neppure una di profondità $n+1$. Infatti supponiamo che esista la ipotetica derivazione di profondità $n+1$ di $\vdash \Delta$

$$\frac{\pi'}{\vdash \Delta}$$

allora l'ultima regola utilizzata può essere \exists -D oppure uno scambio perchè altre regole non si possono usare.

Nel primo caso, ovvero se l'ultima regola è \exists -D, allora la sua premessa è $\vdash \Delta'$ con $\Delta' \equiv \mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \Delta''$ (perchè gli unici esistenziali sono della forma $\exists \mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$) e $\vdash \Delta''$ è del tipo Δ sopra. Dunque dalle assunzioni fatte sopra segue che abbiamo una derivazione di $\vdash \Delta'$ di al più profondità \mathbf{n} . Ma per ipotesi induttiva, essendo Δ' della forma di Δ nella proposizione principale, NON esiste una derivazione di al più profondità \mathbf{n} e quindi siamo arrivati ad una contraddizione assumendo che esista una derivazione di profondità $\mathbf{n} + 1$ di $\vdash \Delta$ con ultima regola un \exists -D. Dunque la derivazione di profondità $\mathbf{n} + 1$ di $\vdash \Delta$ non esiste in tal caso.

Nel secondo caso, ovvero se l'ultima regola per derivare

$$\frac{\pi'}{\vdash \Delta}$$

è uno scambio si consideri la derivazione π'' che termina in una radice $\vdash \Delta'$ la cui ultima regola non è di scambio (e questa esiste perchè la derivazione π' ha profondità maggiore di 1). Ora si conclude che tale derivazione NON esiste ragionando come nel precedente caso perchè Δ' è del tipo Δ menzionato nella proposizione principale.

Grazie alla proposizione 5.31, ne segue che la proposizione 5.30 è dimostrata, ovvero che $\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ in quanto le derivazioni hanno profondità finita.

Poi con un metodo analogo possiamo dimostrare che

Proposition 5.32 Il sequente

$$\vdash \neg \exists \mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. Se fosse derivabile allora applicando le regole di $\mathbf{LC}_=$

$$\frac{\frac{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash}{\exists \mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash} \exists\text{-S}}{\vdash \neg \exists \mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}} \neg\text{-D}$$

che sono invertibili otterremmo che pure il sequente $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash$ sarebbe derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

Ora si osservi che il sequente $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ in quanto a parte la regola di $=$ -S non c'è nessun'altra regola da applicare e si vede NON essendo un'assioma non esiste derivazione di profondità zero e neppure di profondità diversa da zero perchè a parte l'applicazione di regole di scambi o della regola di uguaglianza a vuoto come in

$$\begin{array}{l} \frac{\pi}{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash} = \text{-S} \\ \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash}{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash} = \text{-S} \\ \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash}{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash} = \text{-S} \\ \frac{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash}{\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash} = \text{-S} \end{array}$$

non si ottiene una derivazione ma solo una lista potenzialmente infinita dello stesso sequente. Siccome questa è l'unica possibilità di costruire alberi con le regole di $\mathbf{LC}_=$ per $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash$, ne segue banalmente che $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \vdash$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ e di conseguenza pure $\vdash \neg \exists \mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ come volevamo dimostrare.

Quindi possiamo concludere che:

Proposition 5.33 Il sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

NON è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ assieme alla sua negazione, ovvero è un'opinione in $\mathbf{LC}_=$ (o indipendente da $\mathbf{LC}_=$).

Dim. Segue dalle proposizioni 5.30 e 9.11.

Conclusione su quanto dimostrato sinora...

Nelle sezioni precedenti abbiamo analizzato le regole di $\mathbf{LC}_=$ al fine di

- mostrare la correttezza della procedura di decisione per il calcolo dei sequenti proposizionale \mathbf{LC}_p
- avere un metodo per semi-decidere la derivabilità o meno in $\mathbf{LC}_=$

5.6.2 Sulla classificazione della verità delle formule

Nei calcoli alla Gentzen per la logica classica e intuizionista la classificazione di una formula risulta la seguente secondo le definizioni già date precedentemente per un calcolo qualsiasi:

Nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_= (\mathbf{LI}_=)$, una formula \mathbf{fr} si dice

TAUTOLOGIA (o **VALIDA LOGICAMENTE**) in $\mathbf{LC}_= (\mathbf{LI}_=)$ se lo è la sua chiusura universale.

OPINIONE in (o **INDIPENDENTE da**) $\mathbf{LC}_= (\mathbf{LI}_=)$ se lo è la sua chiusura universale.

CONTRADDIZIONE (o **INSODDISFACIBILE**) in $\mathbf{LC}_= (\mathbf{LI}_=)$ se lo è la sua chiusura universale.

Il motivo di tale definizione risulta ora comprensibile grazie al seguente lemma:

Proposition 5.34 In $\mathbf{LC}_=$ (in $\mathbf{LI}_=$) una formula \mathbf{fr} è una tautologia se e solo se lo è la sua chiusura universale $Cu(\mathbf{fr})$.

Dim. Segue dall'invertibilità della regola \forall -D in $\mathbf{LC}_=$. Lo stesso dicasi per $\mathbf{LI}_=$.

Ricordiamo qui la classificazione di verità di un sequente nei calcoli alla Gentzen per la logica classica e intuizionista secondo quanto definito in generale:

Def. 5.35 (classificazione verità di un sequente nella logica L) Dato un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ in un linguaggio della logica $\mathbf{LC}_= (\mathbf{LI}_=)$, diciamo che il sequente è **tautologico** (o **valido logicamente**) oppure un'opinione o una **contraddizione** nella logica $\mathbf{LC}_= (\mathbf{LI}_=)$ se solo se lo è rispettivamente la chiusura universale della formula che rappresenta il suo significato ovvero

$$Cu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{fr})$$

Questa definizione è motivata dalle seguenti proposizioni:

Proposition 5.36 In $\mathbf{LC}_=$ un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile se e solo se lo è il sequente $\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ e se e solo se lo è pure la sua chiusura universale $\vdash Cu(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$.

Dim. Segue per l'invertibilità delle regole di quantificazione universale, di implicazione e di disgiunzione a destra e della congiunzione a sinistra.

Distinguiamo i casi in cui sia Γ che Δ sono non vuoti dai casi in cui uno dei due sia la lista vuota

Caso in cui sia Γ che Δ sono liste di formule non vuote

Data una derivazione π di $\Gamma \vdash \Delta$, si può procedere in tal modo:

1. se Δ consiste di una sola formula si vada al passo successivo; altrimenti si applichi un numero di \forall -D tante quante sono le formule in Δ meno $\mathbf{1}$ per ottenere una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \Delta_1^\forall \vee \mathbf{fr}}$$

supposto $\Delta \equiv \Delta_1, \mathbf{fr}$.

2. Se Γ consiste di una sola formula abbiamo terminato. Se invece $\Gamma \equiv \mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2, \Gamma_2$ si prosegue in tal modo

$$\frac{\frac{\pi_1}{\mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2, \Gamma_2 \vdash \Delta^\forall}}{\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2, \Gamma_2 \vdash \Delta^\forall} \&-S_{ex}$$

Ora se Γ_2 è la lista vuota si passi al passo successivo 3). Se non lo è allora è del tipo $\Gamma_2 \equiv \mathbf{fr}', \Gamma_3$ e si prosegue verso il basso la derivazione ripetendo il passo 2) a partire dal sequente $\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2, \mathbf{fr}', \Gamma_3 \vdash \Delta^\forall$ supposto che al posto di \mathbf{fr}_1 ci sia la formula $\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2$ e al posto di \mathbf{fr}_2 la formula \mathbf{fr}' ottenendo

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\mathbf{fr}_1, \mathbf{fr}_2, \Gamma_2 \vdash \Delta^\forall}}{\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2, \Gamma_2 \vdash \Delta^\forall} \&-S_{ex}}{(\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2) \& \mathbf{fr}', \Gamma_3 \vdash \Delta^\forall} \&-S_{ex}}$$

e con il sequente finale si ritorna al passo 2).

3. Si applichi la regola \rightarrow -D.

Ad un certo punto la procedura termina perchè il numero di formule in Γ e Δ .

Tale procedura è invertibile perchè lo sono le regole \forall -D e $\&$ -S e consente di trovare una derivazione di $\Gamma \vdash \Delta$ a partire da una di $\vdash \Gamma^\& \rightarrow \Delta^\forall$.

La seconda parte del lemma segue per l'invertibilità della regola di \forall -D in logica classica con uguaglianza con una procedura analoga.

Caso in cui Γ è la lista vuota mentre Δ non lo è In tal caso data una derivazione di $\vdash \Delta$ per il lemma di indebolimento se ne trova una di $\mathbf{tt} \vdash \Delta$ e si applichi poi la procedura al caso precedente per trovare una derivazione di $\vdash \mathbf{tt} \rightarrow \Delta^\forall$.

Viceversa se si ha una derivazione di $\vdash \mathbf{tt} \rightarrow \Delta^\forall$ applicando la procedura nel caso precedente si ottiene una derivazione π di $\mathbf{tt} \vdash \Delta$ e poi componendo con l'assioma del vero una derivazione del tipo

$$\frac{\mathbf{ax-tt} \quad \frac{\pi}{\mathbf{tt} \vdash \Delta}}{\vdash \mathbf{tt}} \text{ comp}$$

Caso in cui Γ non è la lista vuota mentre Δ lo è In tal caso data una derivazione di $\Gamma \vdash$ per il lemma di indebolimento se ne trova una di $\Gamma \vdash \perp$ e si applichi poi la procedura al caso precedente per trovare una derivazione di $\vdash \Gamma^\& \rightarrow \perp$.

Viceversa se si ha una derivazione di $\vdash \Gamma^\& \rightarrow \perp$ applicando la procedura nel caso precedente si ottiene una derivazione π di $\Gamma \vdash \perp$ e poi componendo con l'assioma del falso una derivazione del tipo

$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash \perp} \quad \mathbf{ax-\perp}}{\Gamma \vdash} \text{ comp}$$

Analogamente si dimostra nel calcolo alla Gentzen intuizionista:

Proposition 5.37 In $\mathbf{LI}_=$ un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile se e solo se lo è pure $\vdash \Gamma^\& \rightarrow \mathbf{fr}$ e se e solo se anche la sua chiusura universale $\vdash \mathbf{Cu}(\Gamma^\& \rightarrow \mathbf{fr})$ è derivabile.

Dim. Segue per l'invertibilità delle regole di implicazione a destra e di congiunzione a sinistra.

Anche nel calcolo dei sequenti intuizionista e nel suo frammento proposizionale si dimostra:

Lemma 5.38 In $\mathbf{LI}_=$ (o in \mathbf{LI}_p) un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile se e solo se è pure derivabile $\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{fr}$.

Dim. Per esercizio usando l'invertibilità delle regole dell'implicazione a destra e dalla congiunzione a sinistra.

5.7 La regola di composizione

All'interno di un qualsiasi calcolo dei sequenti, la regola di composizione in questa forma

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathbf{fr}_1 \quad \Gamma, \mathbf{fr}_1, \Gamma'' \vdash \mathbf{fr}_2}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \mathbf{fr}_2} \text{ comp}$$

dice che la conoscenza dei teoremi si *accumula*, ovvero che un teorema già dimostrato, nel caso sopra \mathbf{fr}_1 a partire da dalle ipotesi Γ, Γ'' , può essere usato come premessa di un altro teorema \mathbf{fr}_2 con l'eventuale aggiunta di altre ipotesi Γ' .

Chiaramente una tal regola deve essere *almeno ammissibile* in ogni calcolo logico che si rispetti.

Nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_=$ è ammissibile una forma più generale di regola di composizione in quanto il calcolo tratta di sequenti multiconclusioni.

Def. 5.39 (regole di composizione in forma generale) *Chiamiamo* regola di composizione (in forma generale) *la seguente regola*

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', \mathbf{fr}, \Delta'' \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \nabla, \Delta''} \text{ comp}$$

e diciamo che \mathbf{fr} è la formula **tagliata**.

In altri termini

Theorem 5.40 (eliminazione della composizione generale) *La regola di composizione generale*

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \Delta_1, \mathbf{fr}, \Delta_3 \quad \Gamma_1, \mathbf{fr}, \Gamma_3 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \text{ comp}$$

è ammissibile in $\mathbf{LC}_=$, e nei frammenti \mathbf{LC} e \mathbf{LC}_p , ovvero i calcoli $\mathbf{LC}_=$, \mathbf{LC} e \mathbf{LC}_p sono ciascuno equivalente al calcolo stesso con l'aggiunta della regola di composizione generale.

La sua dimostrazione (complessa e delicata) per quanto riguarda \mathbf{LC} si trova in

A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, **Basic Proof Theory** Cambridge University Press, 1996.

e nelle dispense di logica matematica 2

in

<http://www.math.unipd.it/~maietti/21o16.html>

Per quanto riguarda le regole di uguaglianze è al momento solo disponibile in italiano una tesi di Diploma galileiano ottenuta dall'articolo

F. Parlamento and F. Previale. *Cut Elimination for Gentzen's Sequent Calculus with Equality and Logic of Partial Terms*. In Kamal Lodaya (ed.), *Logic and its Applications*. Springer 161–172 (2013).

Significato della regola di composizione. L'ammissibilità della regola di composizione implica che la seguente istanza di composizione

$$\frac{\vdash \mathbf{fr}_1 \quad \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2}{\vdash \mathbf{fr}_2} \text{ comp}$$

è ammissibile.

Tale istanza di composizione dice che se $\mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2$ è **una tautologia** allora vale che *se* \mathbf{fr}_1 *è tautologia allora anche* \mathbf{fr}_2 *è una tautologia*. In altri termini il segno di conseguenza logica di un sequente espresso da $\mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2$ si traduce nell'implicazione *se* \mathbf{fr}_1 *è vero logicamente (ovvero è una tautologia) allora anche* \mathbf{fr}_2 *è vera logicamente (ossia è una tautologia)* nel metalinguaggio.

Analogamente anche la regola

$$\frac{\vdash \mathbf{fr}_1 \quad \vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2}{\vdash \mathbf{fr}_2} \text{ Modus Ponens}$$

è ammissibile in quanto lo è la regola di composizione e per il fatto che la regola $\rightarrow -D$ è invertibile in $\mathbf{LC}_=$ (e per equivalenza lo sarà pure in $\mathbf{DNC}_=$), si ha che in $\mathbf{LC}_=$, e quindi in $\mathbf{DNC}_=$, $\vdash \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2$ è una tautologia se e solo $\mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2$ lo è. Dunque anche il segno di implicazione logica \rightarrow è si traduce nell'implicazione *se \mathbf{fr}_1 è vero logicamente allora anche \mathbf{fr}_2 è vera logicamente* nel metalinguaggio.

Utilizzando l'ammissibilità della composizione in $\mathbf{LC}_=$ si dimostrano le seguenti proposizioni:

Proposition 5.41 (ammissibilità di contrazione a sx e a dx) Le seguenti regole di contrazione a sinistra e a destra

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Delta \vdash \nabla}{\Gamma, \Sigma, \Delta \vdash \nabla} \text{cn}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \Sigma, \nabla}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma, \nabla} \text{cn}_{\text{dx}}$$

sono ammissibili in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. Per dimostrare che le due regole sono ammissibili basta mostrare che lo sono nei seguenti due casi di contrazione di una sola formula

$$\frac{\Gamma, \mathbf{fr}, \mathbf{fr}, \Delta \vdash \nabla}{\Gamma, \mathbf{fr}, \Delta \vdash \nabla} \text{cn}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{fr}, \mathbf{fr}, \nabla}{\Gamma \vdash \Delta, \mathbf{fr}, \nabla} \text{cn}_{\text{dx}}$$

in quanto le istanze più generali si ottengono applicando iterativamente quelle di contrazione di una sola formula.

Per dimostrare che le regole di contrazione con una formula valgono basta usare la composizione con il sequente $\mathbf{fr}, \mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}$ che è assioma si conclude. Per esempio per mostrare l'ammissibilità della contrazione a sinistra con una formula basta osservare che se esiste una derivazione π di $\Gamma, \mathbf{fr}, \mathbf{fr}, \Delta \vdash \nabla$ allora una derivazione di $\Gamma, \mathbf{fr}, \Delta \vdash \nabla$ si ottiene con la regola di composizione in tal modo

$$\frac{\frac{\text{ax-id} \quad \text{ax-id}}{\mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr} \quad \mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}} \&-D \quad \frac{\frac{\pi}{\Gamma, \mathbf{fr}, \mathbf{fr}, \Delta \vdash \nabla}}{\Gamma, \mathbf{fr} \& \mathbf{fr}, \Delta \vdash \nabla} \&-S}{\Gamma, \mathbf{fr}, \Delta \vdash \nabla} \text{comp}}$$

Si lascia per esercizio di dimostrare lo stesso per la regola di contrazione a destra.

5.8 Traduzione di $\mathbf{DNC}_=$ in $\mathbf{LC}_=$

Utilizzando il teorema di eliminazione della composizione siamo pronti per dimostrare

Theorem 5.42 (traduzione di $\mathbf{DNC}_=$ in $\mathbf{LC}_=$) Per ogni formula \mathbf{fr} se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ allora $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

Dim. La dimostrazione si ottiene per induzione sulla lunghezza di una derivazione π

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}}$$

Caso base: $\mathbf{dt}(\pi) = \mathbf{0}$ Ovviamente gli assiomi di $\mathbf{DNC}_=$ sono assiomi di $\mathbf{LC}_=$. Ma già la regola dell'ex-falso quodlibet richiede l'uso della regola di composizione.

Infatti supposta che π abbia come ultima regola

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \text{ex-f-q}$$

Sappiamo per ipotesi induttiva che esiste una derivazione $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \perp}$$

Ora componendo con l'assioma del falso si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \perp} \quad \text{ax-}\perp}{\Gamma \vdash \text{fr}} \perp \vdash \text{fr} \quad \text{comp}$$

che fornisce una derivazione in $\mathbf{LC}_=$ come volevasi dimostrare.

Caso Induttivo: supponiamo che la tesi valga per tutte le formule con derivazione π tale che $\mathbf{lh}(\pi) \leq \mathbf{n}$ e mostriamo che vale anche per le derivazioni π tale che $\mathbf{lh}(\pi) = \mathbf{n} + \mathbf{1}$.

Supponiamo che la derivazione π abbia $\mathbf{lh}(\pi) = \mathbf{n} + \mathbf{1}$, ovvero si concluda con una regola e procediamo analizzando le varie possibili regole applicabili:

Caso ultima regola di scambio oppure $\&-D$ oppure $\rightarrow -D$, oppure $\forall -D$: si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' della sua premessa (e anche a quella dell'altra premessa π'' nel caso di $\&-D$) trovando una derivazione $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$ (e anche una derivazione $\overline{\pi''}$ nel caso di $\&-D$) e poi di nuovo si conclude applicando lo stesso tipo di regola visto che le istanze delle regole di scambio e le regole $\&-D$ e $\rightarrow -D$ sono pure istanze di regole di $\mathbf{LC}_=$.

Caso ultima regola $\&-Sn_1$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}}{\Gamma \vdash \alpha} \&-Sn_1$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' della sua premessa trovando una derivazione $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta} \quad \frac{\text{ax-id}}{\alpha, \beta \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha} \&-S \quad \text{comp}$$

Nel *Caso ultima regola $\&-Sn_2$* si dimostra la tesi come nel caso precedente.

Caso ultima regola $\vee -Sn$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\pi''}{\Gamma, \alpha \vdash \text{fr}} \quad \frac{\pi'''}{\Gamma, \beta \vdash \text{fr}}}{\Gamma \vdash \text{fr}} \vee -Sn$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni π' , π'' , π''' della premesse trovando delle derivazioni $\overline{\pi'}$, $\overline{\pi''}$, $\overline{\pi'''}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\frac{\overline{\pi''}}{\Gamma, \alpha \vdash \text{fr}} \quad \frac{\overline{\pi'''}{\Gamma, \beta \vdash \text{fr}}}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \text{fr}} \vee -S}{\Gamma, \Gamma \vdash \text{fr}} \text{comp}}{\Gamma \vdash \text{fr}} \text{cn}_{\text{sx}}$$

ricordando che la regola di contrazione a sinistra è ammissibile in $\mathbf{LC}_=$.

Caso ultima regola $\vee -Dn_1$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \vee -Dn_1$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' della premessa trovando una derivazione $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\text{ax-id}}{\alpha \vdash \alpha, \beta}}{\alpha \vdash \alpha \vee \beta} \vee\text{-D}}{\Gamma \vdash \beta} \text{comp}$$

Caso ultima regola $\vee\text{-Dn}_2$: si procede analogamente al caso precedente con ultima regola $\vee\text{-Dn}_1$.

Caso ultima regola $\rightarrow\text{-Sn}$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\pi''}{\Gamma \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \beta} \rightarrow\text{-Sn}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni π', π'' della premesse trovando delle derivazioni $\overline{\pi'}, \overline{\pi''}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\pi''}}{\Gamma \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha, \beta} \text{ind}_x \quad \frac{\text{ax-id}}{\Gamma, \beta \vdash \beta}}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta} \text{comp}}{\frac{\Gamma, \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta} \text{cn}_{\text{sx}}} \rightarrow\text{-S}}$$

ricordando che la regola di contrazione a sinistra è ammissibile in $\mathbf{LC}_=$.

Caso ultima regola $\forall\text{-Sn}$: ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \text{fr}(\mathbf{x})}}{\Gamma \vdash \text{fr}(\mathbf{t})} \forall\text{-Sn}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' della premessa trovando una derivazione $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \text{fr}(\mathbf{x})} \quad \frac{\text{ax-id}}{\forall \mathbf{x} \text{fr}(\mathbf{x}), \text{fr}(\mathbf{t}) \vdash \text{fr}(\mathbf{t})}}{\forall \mathbf{x} \text{fr}(\mathbf{x}) \vdash \text{fr}(\mathbf{t})} \forall\text{-S}}{\Gamma \vdash \text{fr}(\mathbf{t})} \text{comp}$$

Caso ultima regola $\exists\text{-Sn}$: ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \alpha(\mathbf{x})} \quad \frac{\pi''}{\Gamma, \alpha(\mathbf{x}) \vdash \text{fr}}}{\Gamma \vdash \text{fr}} \exists\text{-Sn}$$

con x non libera in $\Gamma, \exists \mathbf{x} \alpha(\mathbf{x}), \text{fr}$. In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' della premessa trovando una derivazione $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \alpha(\mathbf{x})} \quad \frac{\frac{\overline{\pi''}}{\Gamma, \alpha(\mathbf{x}) \vdash \text{fr}}}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \alpha(\mathbf{x}) \vdash \text{fr}} \exists\text{-S}}{\frac{\Gamma, \Gamma \vdash \text{fr}}{\Gamma \vdash \text{fr}} \text{cn}_{\text{sx}}} \text{comp}}$$

ricordando che la regola di contrazione a sinistra è ammissibile in $\mathbf{LC}_=$.

Caso ultima regola = -Sn: ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{s}} \quad \frac{\pi''}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{t})}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{s})} = -\text{Sn}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni π', π'' delle premesse trovando delle derivazioni $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{s}} \quad \frac{\frac{\overline{\pi''}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{t})} \quad \frac{\text{ax-id}}{\mathbf{t} = \mathbf{s}, \mathbf{fr}(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{t})}}{\mathbf{t} = \mathbf{s}, \mathbf{fr}(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{s})}}{\mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{s})} \text{comp}}{\frac{\Gamma, \Gamma \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{s})}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{s})} \text{cn}_{\text{sx}}} = -\text{Sn}$$

ricordando che la regola di contrazione a sinistra è ammissibile in $\mathbf{LC}_=$.

Caso ultima regola ra: ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \neg \mathbf{fr} \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \text{ra}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' della premessa trovando una derivazione $\overline{\pi'}$ in $\mathbf{LC}_=$. Poi componendo come segue si ottiene

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \neg \mathbf{fr} \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \neg \neg \mathbf{fr}, \perp} \neg\text{-S} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{\mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}}}{\vdash \neg \mathbf{fr}, \mathbf{fr}} \neg\text{-D}}{\neg \neg \mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}} \neg\text{-S}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}, \perp} \text{comp}}{\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}, \perp}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \text{ax-}\perp} \perp\text{-}\vdash \text{comp}$$

Def. 5.43 Sia \mathbf{DNC}_p il frammento di $\mathbf{DNC}_=$ senza le regole dei quantificatori e dell'uguaglianza.

Theorem 5.44 (traduzione di \mathbf{DNC}_p in \mathbf{LC}_p) Per ogni formula \mathbf{fr} se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathbf{DNC}_p allora $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathbf{LC}_p .

Dim. Segue dal teorema 5.40 e dal fatto che nella dimostrazione del teorema 5.42 bastano le regole di \mathbf{LC}_p con la regola di composizione per tradurre le regole proposizionali di \mathbf{DNC}_p .

Def. 5.45 Sia $\mathbf{LC}_{=,c}$ il calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_=$ con l'aggiunta della regola di composizione.

Def. 5.46 Sia $\mathbf{LC}_{p,c}$ il calcolo dei sequenti \mathbf{LC}_p con l'aggiunta della regola di composizione.

Corollary 5.47 (traduzione delle regole $\mathbf{DNC}_=$ in $\mathbf{LC}_{=} + \text{comp}$) Le regole di $\mathbf{DNC}_=$ sono regole *derivate* nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_{=,c}$ ovvero nel calcolo $\mathbf{LC}_=$ con la regola di composizione.

Corollary 5.48 (traduzione delle regole \mathbf{DNC}_p in $\mathbf{LC}_p + \text{comp}$) Le regole di \mathbf{DNC}_p sono regole *derivate* nel calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_{p,c}$ ovvero nel calcolo \mathbf{LC}_p con la regola di composizione.

5.9 Proprietà strutturali di $\mathbf{DNC}_=$

Di seguito enunciamo alcune proprietà strutturali di $\mathbf{DNC}_=$ che si dimostrano sostanzialmente allo stesso modo di quelle per $\mathbf{LC}_=$.

Useremo però anche il concetto di **profondità pura** di una derivazione che differisce dal concetto di profondità a meno di scambi già espresso semplicemente per il fatto che si contano anche le regole di scambio:

Def. 5.49 La **profondità a pura** di un albero di derivazione π in un calcolo dei sequenti \mathbf{L} è la massima lunghezza (ovvero numero di nodi meno 1) di ciascuno dei suoi rami (contando anche le regole di scambio!).

Di seguito enunciamo l'ammissibilità della regola di sostituzione e delle regole di contrazione a sinistra lasciando al lettore di dimostrare gli enunciati in quanto le dimostrazioni sono del tutto analoghe all'ammissibilità delle stesse regole nei calcoli dei sequenti alla Gentzen.

Proposition 5.50 (n-ammissibilità della sostituzione) La regola di sostituzione

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{fr}}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \text{ sost}$$

posto che la sostituzione di \mathbf{x} con il termine \mathbf{t} sia ben definita (in sostanza variabili libere di \mathbf{t} non diventino vincolate dopo la sostituzione!) è **n-ammissibile** in $\mathbf{DNC}_=$.

Inoltre se π è derivazione di $\Gamma \vdash \Sigma$ con \mathbf{t} sostituibile con \mathbf{x} in essa ed \mathbf{x} e le variabili libere in \mathbf{t} non sono usate per applicare $\forall - D$ o $\exists - \mathbf{S}$, allora la derivazione $\pi[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ in cui \mathbf{x} è stata sostituita con \mathbf{t} è pure una derivazione di $\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$.

Dim Per esercizio.

Inoltre, dal fatto che le regole della deduzione naturale agiscono sostanzialmente solo a destra, si dimostrano facilmente le seguenti proposizione per induzione sulla profondità delle derivazioni nelle eventuali premesse:

Proposition 5.51 (n-ammissibilità di indebolimento in $\mathbf{DNC}_=$) La regola di indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma'' \vdash \mathbf{fr}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \mathbf{fr}} \text{ in}_{\text{sx}}$$

è **n-ammissibile** in $\mathbf{DNC}_=$.

Dim Per esercizio.

Proposition 5.52 (n-ammissibilità di contrazione in $\mathbf{DNC}_=$) La regola di contrazione

$$\frac{\Gamma, \Sigma, \Sigma, \Delta \vdash \mathbf{fr}}{\Gamma, \Sigma, \Delta \vdash \mathbf{fr}} \text{ cn}_{\text{sx}}$$

è **n-ammissibile** in $\mathbf{DNC}_=$.

Dim Per esercizio.

Una grossa differenza tra il calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_=$ e il calcolo della deduzione naturale classica $\mathbf{DNC}_=$ è che mentre nel primo l'ammissibilità della composizione generale è un teorema dalla prova delicata

e complessa, nel secondo l'ammissibilità della regola di composizione ha una dimostrazione semplice. Questo fatto è compensato dal fatto che mentre in $\mathbf{LC}_=$ c'è una procedura di decisione e il calcolo ha una dimostrazione di consistenza elementare la dimostrazione della consistenza del calcolo $\mathbf{DNC}_=$ non è per nulla banale e noi la otteniamo dimostrando l'equivalenza di $\mathbf{DNC}_=$ con $\mathbf{LC}_=$.

Dimostrazione dirette di consistenza dei calcoli di deduzione naturale si trovano dimostrando i cosiddetti teoremi di normalizzazione (si veda A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, **Basic Proof Theory** Cambridge University Press, 1996).

Theorem 5.53 (eliminazione della composizione generale) *La regola di composizione*

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \xi \quad \Gamma_1, \xi, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}$$

è ammissibile in $\mathbf{DNC}_=$.

Dim. Assumiamo che siano date derivazioni π_1 e π_2 in $\mathbf{DNC}_=$ rispettivamente

$$\frac{\pi_1}{\Gamma_2 \vdash \xi} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma_1, \xi, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}}$$

e mostriamo che esiste una derivazione π_3 di

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}$$

per induzione sulla *profondità pura* di π_2 ovvero per induzione su $pf(\pi_2)$.

Caso $pf(\pi_2) = \mathbf{0}$ ovvero $\Gamma_1, \alpha, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}$ è un assioma.

Se è l'assioma identità in cui $\xi \equiv \mathbf{fr}$ allora dal fatto che $\Gamma_2 \vdash \xi$ per l'ammissibilità della regola di indebolimento si trova che pure

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \xi$$

è pure derivabile.

Se invece π_2 è un assioma identità con \mathbf{fr} diverso da ξ , ovvero ξ compare in Γ_1 o in Γ_3 , oppure un'assioma del vero ovvero $\mathbf{fr} \equiv \mathbf{tt}$, si osservi pure che

$$\Gamma_1, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}$$

è un assioma dello stesso tipo e analogamente pure

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}$$

e quindi la tesi è dimostrata in tal caso.

Caso ultima regola $\&-S_{n_1}$ ovvero π_2 è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma_1, \xi, \Gamma_3 \vdash \alpha \& \beta}}{\Gamma_1, \xi, \Gamma_3 \vdash \alpha} \&-S_{n_1}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' assieme a quella di partenza π_1 trovando una derivazione in $\mathbf{DNC}_=$

$$\frac{\pi''}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \alpha \& \beta}$$

con cui si ricava la derivazione

$$\frac{\frac{\pi''}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \alpha \& \beta}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \alpha} \&-S_{n_1}$$

come richiesto dalla tesi.

I casi in cui π_2 si conclude con le rimanenti regole si dimostrano in modo completamente analogo eccetto per i casi in cui l'ultima regola è un $\exists-S$ o un $\forall-D$ dove può essere necessario applicare una sostituzione di variabili, possibile grazie alla **n**-ammissibilità della sostituzione in $\mathbf{DNC}_=$, per garantire l'applicabilità delle regole menzionate dove occorre.

5.10 Traduzione di $\mathbf{LC}_=$ in $\mathbf{DNC}_=$

Utilizzando il teorema di eliminazione della composizione siamo pronti a dimostrare che esista una traduzione del calcolo $\mathbf{LC}_=$ nel calcolo $\mathbf{DNC}_=$ ovvero esiste un modo per trasformare derivazioni di sequenti in $\mathbf{LC}_=$ in derivazioni di $\mathbf{DNC}_=$ mantenendo il significato dei sequenti.

Theorem 5.54 (traduzione di $\mathbf{LC}_=$ in $\mathbf{DNC}_=$) Per ogni sequente $\Gamma \vdash \Delta$, se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ allora $\Gamma \vdash \Delta^\vee$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$.

Dim. La dimostrazione si ottiene per induzione sulla profondità pura di una derivazione π

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Caso $pf(\pi_2) = 0$ ovvero $\Gamma \vdash \Delta$ è un assioma.

Distinguiamo vari sottocasi:

\dot{E} ax-id : ovvero $\Gamma \equiv \Gamma_1, \text{fr}, \Gamma_2$ e $\Delta \equiv \Delta_1, \text{fr} \Delta_2$ In tal caso il sequente $\Gamma_1, \text{fr}, \Gamma_2 \vdash \Delta^\vee$ è derivabile, applicando la $\vee\text{-Dn}_1$ un numero di volte k pari alla lunghezza di Δ_2 e poi infine $\vee\text{-Dn}_2$ per concludere la derivazione con un ax-id (dimostrarlo per bene per esercizio).

\dot{E} ax-tt o -ax : si procede come nel precedente caso solo che la derivazione termina rispettivamente con ax-tt nel primo caso e con -ax nel secondo.

\dot{E} ax- \perp : ovvero $\Gamma \equiv \Gamma_1, \perp, \Gamma_2$. In tal caso il sequente $\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \Delta^\vee$ è derivabile in tal modo:

$$\frac{\text{ax-id}}{\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \perp} \text{ ex-f-q} \\ \frac{}{\Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \Delta^\vee}$$

Caso ultima regola sc_{sx} ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \nabla}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \nabla} sc_{sx}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$ che allunghiamo con lo stesso tipo di regola di scambio in tal modo

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \nabla}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \nabla} sc_{sx}$$

Caso ultima regola sc_{dx} ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla}}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla} sc_{dx}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$ che usiamo per costruire la derivazione richiesta dalla tesi

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla)^\vee} \quad \frac{\pi_1}{(\Sigma, \Delta, \Theta, \Delta', \nabla)^\vee \vdash (\Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla)^\vee}}{\Gamma \vdash (\Sigma, \Delta', \Theta, \Delta, \nabla)^\vee} \text{ comp}$$

ove la dimostrazione dell'esistenza di π_1 è lasciata al lettore.

Caso ultima regola $\&-D$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma} \quad \frac{\pi''}{\Gamma \vdash \beta, \Sigma}}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta, \Sigma} \&-D$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni π', π'' ottenendo delle derivazioni $\overline{\pi'}, \overline{\pi''}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee} \quad \frac{\overline{\pi''}}{\Gamma \vdash (\beta, \Sigma)^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee} \quad \frac{\overline{\pi''}}{\Gamma \vdash (\beta, \Sigma)^\vee}}{\Gamma \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee \& (\beta, \Sigma)^\vee} \&-D \quad \frac{\tilde{\pi}}{(\alpha, \Sigma)^\vee \& (\beta, \Sigma)^\vee \vdash (\alpha \& \beta, \Sigma)^\vee}}{\Gamma \vdash (\alpha \& \beta, \Sigma)^\vee} \text{comp}$$

e si lascia per esercizio di trovare $\tilde{\pi}$ (che si dimostra esistere per induzione finita sulla lunghezza della lista Σ nel caso che sia non vuota).

Caso ultima regola $\&-S$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}}{\Gamma, \alpha \& \beta \vdash \Delta} \&-S$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta} \quad \frac{\text{ax-id}}{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}}{\alpha \& \beta \vdash \alpha} \&-S_{n_1} \quad \frac{\frac{\text{ax-id}}{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta} \quad \frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta^\vee}}{\Gamma, \alpha, \alpha \& \beta \vdash \Delta^\vee} \&-S_{n_2} \text{comp}}{\frac{\Gamma, \alpha \& \beta, \alpha \& \beta \vdash \Delta^\vee}{\Gamma, \alpha \& \beta \vdash \Delta^\vee} \text{comp}} \text{comp}$$

Caso ultima regola $\vee-D$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Sigma}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Sigma} \&-D$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' e si ottiene la seguente derivazione

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha, \beta, \Sigma)^\vee}$$

e si osserva che questa soddisfa la tesi in quanto la serie di disgiunzioni in $(\alpha, \beta, \Sigma)^\vee$ coincide proprio con quella in $(\alpha \vee \beta, \Sigma)^\vee$ perchè definite per induzione associando due formule alla volta a partire da sinistra ovvero si conclude che $\overline{\pi'}$ è anche una derivazione del tipo

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta, \Sigma)^\vee}$$

e questa soddisfa la tesi.

Caso ultima regola \vee -S ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} \quad \frac{\pi''}{\Gamma, \beta \vdash \Delta}}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta} \vee\text{-S}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni π', π'' ottenendo le derivazioni $\overline{\pi'}$ e $\overline{\pi''}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta^\vee} \quad \frac{\overline{\pi''}}{\Gamma, \beta \vdash \Delta^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta^\vee} \quad \frac{\overline{\pi''}}{\Gamma, \beta \vdash \Delta^\vee}}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta} \vee\text{-Sn}}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta^\vee} \vee\text{-Sn}$$

Caso ultima regola \neg -D ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}}{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Sigma} \neg\text{-D}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\frac{\tilde{\pi}_1}{\Gamma \vdash \alpha \vee \neg\alpha} \quad \frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma^\vee}}{\Gamma, \alpha \vdash \neg\alpha \vee \Sigma^\vee} \vee\text{-Dn}_2 \quad \frac{\text{ax-id} \quad \frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\alpha}}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\alpha \vee \Sigma^\vee} \vee\text{-Dn}_1}{\Gamma \vdash \neg\alpha \vee \Sigma^\vee} \vee\text{-Sn} \quad \frac{\tilde{\pi}_2}{\neg\alpha \vee \Sigma^\vee \vdash (\neg\alpha, \Sigma)^\vee} \text{comp}}{\Gamma \vdash (\neg\alpha, \Sigma)^\vee} \text{comp}$$

e si lascia per esercizio di trovare $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$.

Caso ultima regola \neg -S ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma}}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Sigma} \neg\text{-S}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee}}{\Gamma, \neg\alpha \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee} \text{in}_{\text{sx}}}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\alpha \& (\alpha, \Sigma)^\vee} \&\text{-D} \quad \frac{\tilde{\pi}_1}{\neg\alpha \& (\alpha, \Sigma)^\vee \vdash \Sigma^\vee} \text{comp}}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Sigma^\vee} \text{comp}$$

e si lascia per esercizio di trovare $\tilde{\pi}_1$.

Caso ultima regola $\rightarrow -D$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Sigma}}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \Sigma} \rightarrow -D$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha \vdash (\beta, \Sigma)^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \alpha \vdash (\beta, \Sigma)^\vee} \rightarrow -D \quad \frac{\tilde{\pi}_1}{\alpha \rightarrow (\beta, \Sigma)^\vee \vdash (\alpha \rightarrow \beta, \Sigma)^\vee}}{\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta, \Sigma)^\vee} \text{ comp}}$$

e si lascia per esercizio di trovare $\tilde{\pi}_1$.

Caso ultima regola $\rightarrow -S$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma} \quad \frac{\pi''}{\Gamma, \beta \vdash \Sigma}}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Sigma} \rightarrow -S$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alle derivazioni π', π'' ottenendo le derivazioni $\overline{\pi'}, \overline{\pi''}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee} \quad \frac{\overline{\pi''}}{\Gamma, \beta \vdash \Sigma^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\alpha, \Sigma)^\vee} \quad \frac{\tilde{\pi}_1}{(\alpha, \Sigma)^\vee \vdash \alpha \vee \Sigma^\vee}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \Sigma^\vee} \text{ comp} \quad \frac{\frac{\tilde{\pi}_1}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta} \rightarrow -Sn \quad \frac{\overline{\pi''}}{\Gamma, \beta \vdash \Sigma^\vee}}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \Sigma^\vee} \text{ comp}}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Sigma^\vee} \text{ in}_{sx} \quad \frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta, \Sigma^\vee \vdash \Sigma^\vee}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta, \Sigma^\vee \vdash \Sigma^\vee} \text{ ax-id}}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Sigma^\vee} \vee -Sn$$

where $\tilde{\pi}_1$ is the following derivation

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\text{ax-id}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \alpha}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta} \rightarrow -Sn$$

che soddisfa la tesi.

Caso ultima regola $\forall -D$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Sigma}}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \beta, \Sigma} \forall -D$$

con $\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta, \Sigma)$. In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Sigma)^\vee}$$

Ora distinguiamo due casi: il caso in cui $\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\Sigma)$ e il caso in cui $\mathbf{x} \in \mathbf{VL}(\Sigma)$.

Caso in cui $\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\Sigma)$: Dopo aver notato che $(\beta, \Sigma)^\vee[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \equiv (\beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Sigma)^\vee$ costruiamo la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Sigma)^\vee}}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} (\beta, \Sigma)^\vee} \forall\text{-D} \quad \frac{\tilde{\pi}_1}{\forall \mathbf{x} (\beta, \Sigma)^\vee \vdash (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma)^\vee}}{\Gamma \vdash (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma)^\vee} \text{comp}$$

ove l'applicazione della regola di $\forall\text{-D}$ è lecita in quanto $\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} (\beta, \Sigma)^\vee)$ e si lascia per esercizio di trovare $\tilde{\pi}_1$ che vale in quanto $\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\Sigma)$.

Caso in cui $\mathbf{x} \in \mathbf{VL}(\Sigma)$: Scegliamo una variabile DIVERSA da \mathbf{x} e NON PRESENTE in $\Gamma \vdash (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma)^\vee$ e per semplicità supponiamo sia \mathbf{z} . Per il lemma di sostituzione 5.50 esiste una derivazione $\widehat{\pi'}$ della stessa profondità pura di $\overline{\pi'}$ tale che

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{z}] \vdash (\beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Sigma)^\vee[\mathbf{x}/\mathbf{z}]}$$

Dopo aver notato che $(\beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Sigma)^\vee[\mathbf{x}/\mathbf{z}] \equiv (\beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}], \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee \equiv (\beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee[\mathbf{x}/\mathbf{w}]$ costruiamo la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{z}] \vdash (\beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{z}] \vdash \forall \mathbf{x} (\beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee} \forall\text{-D} \quad \frac{\tilde{\pi}_1}{\forall \mathbf{x} (\beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee \vdash (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee}}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{z}] \vdash (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee} \text{comp}$$

ove l'applicazione della regola di $\forall\text{-D}$ è lecita in quanto $\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{z}], \forall \mathbf{x} (\beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee)$ e $\tilde{\pi}_1$ si dimostra come nel precedente caso perchè $\mathbf{x} \notin \mathbf{VL}(\Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}]^\vee)$. Infine per il lemma di sostituzione 5.50 applicato alla derivazione sopra troviamo una derivazione $\widehat{\pi'}$ di

$$\frac{\widehat{\pi'}}{\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{z}][\mathbf{z}/\mathbf{x}] \vdash (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee[\mathbf{z}/\mathbf{x}]}$$

ovvero una derivazione della forma

$$\frac{\widehat{\pi'}}{\Gamma \vdash (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma)^\vee}$$

visto che $(\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma[\mathbf{x}/\mathbf{z}])^\vee[\mathbf{z}/\mathbf{x}] \equiv (\forall \mathbf{x} \beta, \Sigma)^\vee$ e che $\Gamma[\mathbf{x}/\mathbf{z}][\mathbf{z}/\mathbf{x}] \equiv \Gamma$ che soddisfa la tesi.

Caso ultima regola $\forall\text{-S}$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta}}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta \vdash \Delta} \forall\text{-S}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta^\vee}$$

che usiamo per ottenere la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\forall \mathbf{x} \beta \vdash \forall \mathbf{x} \beta} \quad \frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta^\vee}}{\forall \mathbf{x} \beta \vdash \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \forall\text{-Sn} \quad \frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \Delta^\vee}}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta, \forall \mathbf{x} \beta \vdash \Delta^\vee} \text{comp} \quad \text{cn}_{\text{sx}} \quad \frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta, \forall \mathbf{x} \beta \vdash \Delta^\vee}{\Gamma, \forall \mathbf{x} \beta \vdash \Delta^\vee}$$

che soddisfa la tesi.

Caso ultima regola \exists -D ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \Sigma}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \beta, \Sigma} \exists\text{-D}$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\exists \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \Sigma)^\vee}$$

che usiamo per costruire la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \beta \vee \Sigma^\vee} \quad \frac{\pi_2}{\exists \mathbf{x} \beta \vee \Sigma^\vee \vdash (\exists \mathbf{x} \beta, \Sigma)^\vee}}{\Gamma \vdash (\exists \mathbf{x} \beta, \Sigma)^\vee} \text{comp}$$

ove l'esistenza di π_2 è lasciata come esercizio al lettore (segue tramite associatività della \vee per induzione sulla lunghezza di Σ) e π_1 è la derivazione seguente

$$\frac{\frac{\pi_3}{\Gamma \vdash (\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]) \vee \Sigma^\vee} \quad \frac{\pi_4}{\Gamma, (\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]) \vdash \exists \mathbf{x} \beta \vee \Sigma^\vee} \quad \frac{\text{ax-id}}{\Gamma, \Sigma^\vee \vdash \Sigma^\vee}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \beta \vee \Sigma^\vee} \begin{array}{l} \vee\text{-D}_2 \\ \vee\text{-S} \end{array}$$

dove π_4 è la derivazione seguente

$$\frac{\frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \quad \frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \exists \mathbf{x} \beta \vdash \exists \mathbf{x} \beta} \quad \frac{\text{ax-id}}{\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \quad \vee\text{-D}_2}{\frac{\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \exists \mathbf{x} \beta \vee \Sigma^\vee}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \exists \mathbf{x} \beta \vee \Sigma^\vee} \text{in}_{sr}} \vee\text{-S} \quad \exists\text{-Dn}$$

e π_3 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash (\exists \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \Sigma)^\vee} \quad \frac{\pi_5}{(\exists \mathbf{x} \beta, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \Sigma)^\vee \vdash (\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]) \vee \Sigma^\vee}}{\Gamma \vdash (\exists \mathbf{x} \beta \vee \beta[\mathbf{x}/\mathbf{t}]) \vee \Sigma^\vee} \text{comp}$$

ove l'esistenza di π_5 è lasciata come esercizio al lettore (segue tramite associatività della \vee per induzione sulla lunghezza di Σ).

Caso ultima regola \exists -S ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \Sigma}}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \beta \vdash \Sigma} \exists\text{-S}$$

con $\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \beta, \Sigma)$. In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \beta[\mathbf{x}/\mathbf{w}] \vdash \Sigma^\vee}$$

che usiamo per costruire la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{\overline{\pi'}}{\Gamma, \beta[x/w] \vdash \Sigma^\vee}}{\Gamma, \exists x \beta \vdash \exists x \beta} \quad \exists-S_n$$

ove l'applicazione di $\exists-S_n$ è lecita in quanto $w \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists x \beta, \Sigma)$ e quindi $w \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists x \beta, \Sigma^\vee)$.

Caso ultima regola = $-S_1$ ovvero π è della forma

$$\frac{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash \Delta(t), \nabla}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash \Delta(s), \nabla} = -S_1$$

In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' ottenendo la derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Sigma, t = s, \Gamma(t) \vdash (\Delta(t), \nabla)^\vee}$$

che usiamo per costruire la seguente derivazione che soddisfa la tesi

$$\frac{\text{ax-id} \quad \frac{\pi_1}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash (\Delta(t), \nabla)^\vee}}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash t = s} \quad = -S_n$$

ove π_1 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\pi_2}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash (\Sigma, \Gamma(s))^\& \& t = s} \quad \frac{\pi_3}{(\Sigma, \Gamma(s))^\& \& t = s \vdash (\Delta(t), \nabla)^\vee}}{\Sigma, \Gamma(s), t = s \vdash (\Delta(t), \nabla)^\vee} \text{ comp}$$

ove π_2 (che si dimostra per induzione sulla lunghezza di $\Sigma, \Gamma(s)$) si lascia come esercizio al lettore e π_3 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\pi_4}{(\Sigma, \Gamma(s))^\& \& t = s \vdash (\Sigma, \Gamma(t))^\& \& t = s} \quad \frac{\pi_5}{(\Sigma, \Gamma(t))^\& \& t = s \vdash (\Delta(t), \nabla)^\vee}}{\Gamma(s)^\& \& t = s \vdash (\Delta(t), \nabla)^\vee} \text{ comp}$$

ove π_4 è la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\text{ax-id} \quad \frac{\Gamma(s)^\& \& t = s \vdash \Gamma(s)^\& \& t = s}{\Gamma(s)^\& \& t = s \vdash t = s} \quad \&-S_{n1}}{\Gamma(s)^\& \& t = s \vdash t = t} \quad = -\text{ax}}{\Gamma(s)^\& \& t = s \vdash s = t} \quad = -S_n \quad \frac{\text{ax-id} \quad \Gamma(s)^\& \& t = s \vdash \Gamma(s)^\& \& t = s}{\Gamma(s)^\& \& t = s \vdash \Gamma(t)^\& \& t = s} \quad = -S_n$$

e π_5 si dimostra esistere a partire da $\overline{\pi'}$ per induzione sulla lunghezza di $\Sigma, \Gamma(t)$ e si lascia per esercizio al lettore.

Caso ultima regola = $-S_2$ si tratta analogamente al precedente osservando che la regola

$$\frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash \mathbf{A}(s)}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(t)} = -S_{n2}$$

è ammissibile in $\mathbf{DNC}_=$. Infatti dati

$$\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash t = s} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(s)}$$

si costruisce la seguente derivazione

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{s}} \quad = -ax \quad \Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}}{\Gamma \vdash \mathbf{s} = \mathbf{t}} \quad = -Sn \quad \frac{\pi_2}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{s})}}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})} = -Sn$$

Def. 5.55 Sia \mathbf{DNC}_p il frammento di $\mathbf{DNC}_=$ senza le regole dei quantificatori e dell'uguaglianza.

Theorem 5.56 (traduzione di \mathbf{LC}_p in \mathbf{DNC}_p) Per ogni sequente $\Gamma \vdash \Delta$, se $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{LC}_p allora $\Gamma \vdash \Delta^\vee$ è derivabile in \mathbf{DNC}_p .

Dim. Segue dal teorema 5.40 e dal fatto che nella dimostrazione del teorema 5.42 bastano le regole di \mathbf{LC}_p con la regola di composizione per tradurre le regole proposizionali di \mathbf{DNC}_p .

Usando i teoremi 5.42 e 5.54, concludiamo che:

Theorem 5.57 (equivalenza $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{LC}_=$) Il sistema formale $\mathbf{DNC}_=$ è equivalente al sistema formale $\mathbf{LC}_=$ ovvero i due sistemi derivano gli stessi sequenti del tipo $\vdash \mathbf{fr}$ per una qualsiasi formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo \mathcal{L} .

Theorem 5.58 (equivalenza \mathbf{DNC}_p e \mathbf{LC}_p) Il sistema formale \mathbf{DNC}_p è equivalente al sistema formale \mathbf{LC}_p ovvero derivano gli stessi sequenti del tipo $\vdash \mathbf{fr}$ per una qualsiasi formula \mathbf{fr} di un linguaggio proposizionale \mathcal{L} .

5.11 Equivalenza di $\mathbf{DNI}_=$ e $\mathbf{LI}_=$ e loro frammenti proposizionali

Anche per il calcolo dei sequenti intuizionista alla Gentzen $\mathbf{LI}_=$ vale il seguente teorema

Theorem 5.59 (eliminazione della composizione) *La regola di composizione della forma*

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma_1, \mathbf{fr}, \Gamma_3 \vdash \alpha}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \alpha} \text{ comp}$$

è ammissibile in $\mathbf{LI}_=$ e anche in \mathbf{LI}_p .

Dim. La dimostrazione (complessa e delicata) si ottiene adattando a $\mathbf{LI}_=$ quella per il calcolo dei sequenti classico nel teorema 5.40.

Con una dimostrazione analoga al teorema 5.42 utilizzando la regola di composizione, ovvero grazie al teorema 5.59, si dimostra che:

Theorem 5.60 (traduzione di $\mathbf{DNI}_=$ in $\mathbf{LI}_=$) Per ogni formula \mathbf{fr} se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ allora $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{LI}_=$.

È immediato constatare che la traduzione della deduzione naturale intuizionista nel calcolo intuizionista alla Gentzen si restringe ai corrispondenti frammenti proposizionali:

Def. 5.61 Sia \mathbf{DNI}_p il frammento di $\mathbf{DNI}_=$ senza le regole dei quantificatori e dell'uguaglianza.

Theorem 5.62 (traduzione di \mathbf{DNI}_p in \mathbf{LI}_p) Per ogni formula \mathbf{fr} se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathbf{DNI}_p allora $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathbf{LI}_p .

Dim. Segue dal teorema 5.59 e dal fatto che nella dimostrazione del teorema 5.60 bastano le regole di \mathbf{LI}_p con la regola di composizione per tradurre le regole proposizionali di \mathbf{DNI}_p .

Inoltre con una dimostrazione analoga al teorema 5.53 anche nella deduzione naturale intuizionista è ammissibile la regola di composizione:

Theorem 5.63 (eliminazione della composizione) *La regola di composizione*

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \alpha \quad \Gamma_1, \alpha, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}$$

è ammissibile in $\mathbf{DNI}_=$, ovvero il calcolo $\mathbf{DNI}_=$ è equivalente allo stesso calcolo con l'aggiunta della regola di composizione.

Poi utilizzando il teorema 5.63 con una dimostrazione del tutto analoga al teorema 5.54 (e più semplice in quanto le regole di destra di $\mathbf{LI}_=$ sono esattamente quelle di $\mathbf{DNI}_=$) si prova che

Theorem 5.64 (traduzione di $\mathbf{LI}_=$ in $\mathbf{DNI}_=$) Per ogni sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$, se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{LI}_=$ allora $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

Def. 5.65 Sia \mathbf{DNI}_p il frammento di $\mathbf{DNI}_=$ senza le regole dei quantificatori e dell'uguaglianza.

È immediato notare che la traduzione 5.64 si restringe ai rispettivi frammenti proposizionali dei calcoli:

Theorem 5.66 (traduzione di \mathbf{LI}_p in \mathbf{DNI}_p) Per ogni sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$, se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathbf{LI}_p allora $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathbf{DNI}_p .

Quindi grazie ai teoremi 5.60 and 5.64 concludiamo che:

Theorem 5.67 (equivalenza $\mathbf{DNI}_=$ e $\mathbf{LI}_=$) Il sistema formale $\mathbf{DNI}_=$ è equivalente al sistema formale $\mathbf{LI}_=$ ovvero dimostrano gli stessi sequenti del tipo $\vdash \mathbf{fr}$ per una qualsiasi formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo \mathcal{L} .

Theorem 5.68 (equivalenza \mathbf{DNI}_p e \mathbf{LI}_p) Il sistema formale \mathbf{DNI}_p è equivalente al sistema formale \mathbf{LI}_p ovvero dimostrano gli stessi sequenti del tipo $\vdash \mathbf{fr}$ per una qualsiasi formula \mathbf{fr} di un linguaggio proposizionale \mathcal{L} .

5.12 Sull'invertibilità delle regole in $\mathbf{LI}_=$ e proof-search in essa

Non tutte le regole di $\mathbf{LI}_=$ sono invertibili contrariamente a quel che accade per le regole di $\mathbf{LC}_=$. Infatti con una dimostrazione analoga a quella per le corrispondenti regole della logica classica si prova che:

Proposition 5.69 Le regole di $\mathbf{LI}_=$ denominate sc_{sx} , $\rightarrow -D$, $\neg -D$, $\& -D$, $\& -S$, $\vee -S$ $\forall -D$, $\forall -S$ ed $\exists -S$ sono invertibili in $\mathbf{LI}_=$.

Inoltre in $\mathbf{LI}_=$, se un sequente $\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile lo è pure $\Gamma, \beta \vdash \mathbf{fr}$ ovvero è invertibile la regola di implicazione a sinistra solo sul ramo di destra.

Invece le regole di destra della congiunzione, della quantificazione esistenziale e la regola dell'implicazione a sinistra nel ramo di sinistra di $\mathbf{LI}_=$ NON sono invertibili e un controesempio si trova facendo agire le inverse sugli assiomi identità con la formula su cui agisce la regola. Ad esempio mostriamo che

Proposition 5.70 La regola $\vee -D_1$ NON è invertibile in $\mathbf{LI}_=$.

Dim. Per mostrarlo basta applicare l' inversa della regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \text{ inv-}\vee -D_1$$

mettendo nella premessa un assioma identità con la formula su cui agisce la regola ottenendo la regola

$$\frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}} \text{ inv-}\vee -D_1$$

che non è ammissibile in quanto la premessa è derivabile essendo un assioma identità mentre il sequente conclusione

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$$

NON è derivabile in $\mathbf{LI}_=$ perchè non lo è neppure in $\mathbf{LC}_=$ (lo si dimostri con la procedura di decisione!) sapendo che infatti che entrambi i calcoli sono equivalenti rispettivamente a $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ dove si vede chiaramente che un sequente derivabile intuizionisticamente lo è anche classicamente! Dunque dato che l'inversa di $\vee -D_1$ non è ammissibile la regola $\vee -D_1$ NON è invertibile.

Analogamente si dimostra che

Proposition 5.71 La regola $\vee -D_2$ NON è invertibile in $\mathbf{LI}_=$.

Dim. per esercizio.

Poi si dimostra che

Proposition 5.72 La regola $\exists -D$ NON è invertibile in $\mathbf{LI}_=$.

Dim. Per mostrarlo basta applicare l' inversa della regola

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})} \text{ inv-}\exists -D$$

mettendo nella premessa un assioma identità con la formula su cui agisce la regola e al posto di \mathbf{t} una costante \mathbf{c} , ottenendo la regola

$$\frac{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c})} \text{ inv-}\exists -D$$

che non è ammissibile in quanto la premessa è derivabile essendo un assioma identità mentre il sequente conclusione

$$\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c})$$

NON è derivabile in $\mathbf{LI}_=$ qui per le stesse ragioni per cui non è derivabile in $\mathbf{LC}_=$. Infatti per derivare $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c})$ in $\mathbf{LI}_=$ l'unica regola applicabile è la regola della quantificazione esistenziale di sinistra ovvero

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c})}{\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c})} \exists\text{-S } (w \notin VL(\exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{c})))$$

per cui si arriva ad un sequente

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{c})$$

che non è assioma identità in quanto la variabile \mathbf{w} (e ogni altra variabile sostituibile al posto di \mathbf{x} nella regola) è diversa dalla costante \mathbf{c} . Dunque dato che l'inversa di $\exists\text{-D}$ non è ammissibile la regola $\exists\text{-D}$ NON è invertibile.

Poi si dimostra che

Proposition 5.73 La regola $\neg\text{-S}$ NON è invertibile in $\mathbf{LI}_=$.

Dim. Per mostrarlo basta applicare l' inversa della regola

$$\frac{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}} \text{inv-}\neg\text{-S}$$

mettendo nella premessa un assioma identità con la formula su cui agisce la regola ottenendo

$$\frac{\neg \mathbf{A} \vdash \neg \mathbf{A}}{\neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}} \text{inv-}\neg\text{-S}$$

che non è ammissibile in quanto la premessa è derivabile essendo un assioma identità mentre il sequente conclusione

$$\neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$$

NON è derivabile in $\mathbf{LI}_=$ perchè non lo è neppure in $\mathbf{LC}_=$ (lo si dimostri con la procedura di decisione!) sapendo che infatti che entrambi i calcoli sono equivalenti rispettivamente a $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ dove si vede chiaramente che un sequente derivabile intuizionisticamente lo è anche classicamente! Dunque dato che l'inversa di $\forall\text{-D}_1$ non è ammissibile la regola $\neg\text{-S}$ NON è invertibile.

Poi si dimostra che

Proposition 5.74 La seguente inversa della regola $\rightarrow\text{-S}$ NON è ammissibile e dunque la regola $\rightarrow\text{-S}$ NON è invertibile in $\mathbf{LI}_=$.

Dim. Per mostrarlo basta applicare l' inversa della regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \text{inv-}\rightarrow\text{-S}_1$$

mettendo nella premessa un assioma identità con la formula su cui agisce la regola ottenendo

$$\frac{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}}{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \text{inv-}\rightarrow\text{-S}_1$$

che non è ammissibile in quanto la premessa è derivabile essendo un assioma identità mentre il sequente conclusione

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$$

NON è derivabile in $\mathbf{LI}_=$ perchè non lo è neppure in $\mathbf{LC}_=$ (lo si dimostri con la procedura di decisione!) sapendo che infatti che entrambi i calcoli sono equivalenti rispettivamente a $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ dove si vede chiaramente che un sequente derivabile intuizionisticamente lo è anche classicamente! Dunque dato che l'inversa $\text{inv-}\rightarrow\text{-S}_1$ non è ammissibile la regola $\rightarrow\text{-S}$ NON è invertibile in $\mathbf{LI}_=$.

Quindi NON si può usare per la ricerca delle derivazioni in $\mathbf{LI}_=$, ovvero per il *proof-search* in $\mathbf{LI}_=$, il metodo utilizzato per ricercare derivazioni in $\mathbf{LC}_=$ in quanto occorre distinguere se si sta applicando una regola invertibile o non invertibile.

Però si dimostra in ogni caso che esiste una procedura di decisione per i sequenti proposizionali in $\mathbf{LI}_=$ o meglio nel frammento proposizionale \mathbf{LI}_p (con solo regole delle costanti vero e falso, della congiunzione, disgiunzione, negazione e implicazione) in quanto le regole proposizionali applicabili, come per i sequenti proposizionali in \mathbf{LC}_p , sono solo quelle corrispondenti alle sottoformule delle formule del sequente proposizionale e queste sono in *numero finito*. Quello che può accadere è solo che una stessa regola venga ripetuta all'infinito come accade nel cercare una dimostrazione in $\mathbf{LI}_=$ del sequente

$$\vdash \neg\neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$$

5.12.1 Esempio di ricerca della derivazione di un sequente proposizionale intuizionista

Per decidere se un sequente è valido in logica intuizionista si può cercare la derivazione in $\mathbf{LI}_=$ stando attenti di **dichiarare fallimentare una strategia di ricerca della prova nel momento in cui si approda ad una foglia NON derivabile in logica classica proposizionale!** accorciando così l'ispezione dell'albero di proof-search del sequente nel calcolo dei sequenti intuizionista.

Come esempio andiamo a stabilire se è logicamente valido in $\mathbf{LI}_=$, ovvero è una tautologia intuizionista, il sequente

$$\vdash \neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$$

Innanzitutto per l'invertibilità della regola $\rightarrow -D$ in $\mathbf{LI}_=$ la validità intuizionista del sequente di partenza è equivalente a quella del sequente $\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$ ed non essendo questo un assioma, una sua possibile derivazione ha un'ultima regola non di scambio NON invertibile che può essere:

1. *caso ultima regola* $\neg-S$, ovvero la ricerca della derivazione dal basso verso l'alto inizia in tal modo

$$\frac{\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}}{\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}} \neg-S$$

Ora si noti che il sequente $\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}$ NON è valido in \mathbf{LC}_p (basta sostituire \mathbf{A} e \mathbf{B} con \perp e mostrarlo per bene oppure basta applicare la procedura di decisione 5.4.2).

2. *caso ultima regola* $\vee-D_1$, ovvero la ricerca della derivazione dal basso verso l'alto inizia in tal modo

$$\frac{\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A}}{\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}} \vee-D_1$$

Ora si noti che $\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A}$ NON è valido in \mathbf{LC}_p (basta sostituire \mathbf{A} con \mathbf{tt} e \mathbf{B} con \perp e mostrarlo per bene oppure basta applicare la procedura di decisione 5.4.2).

3. *caso ultima regola* $\vee-D_1$, ovvero la ricerca della derivazione dal basso verso l'alto inizia in tal modo

$$\frac{\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{B}}{\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}} \vee-D_2$$

Ora si noti che $\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{B}$ NON è valido in \mathbf{LC}_p (basta sostituire \mathbf{A} con \perp e \mathbf{B} con \mathbf{tt} e mostrarlo per bene oppure basta applicare la procedura di decisione 5.4.2).

Visto che come nella procedura 5.13 abbiamo esplorato tutte le possibili strategie di derivazione a partire dalla prima regola non di scambio a vuoto applicabile dal basso verso l'alto, concludiamo che il sequente $\vdash \neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$ NON è valido intuizionisticamente ed essendo valido in logica classica è un'opinione in logica intuizionista.

5.13 Decidibilità della logica intuizionista proposizionale

È possibile trovare un algoritmo di decisione per la logica intuizionista proposizionale \mathbf{LI}_p riportata sotto?

Def. 5.75 Una formula \mathbf{fr} è **sottoformula** di una formula ψ in un linguaggio predicativo con uguaglianza

- se $\psi \equiv \mathbf{fr}$,
- se $\psi \equiv \mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2$, oppure $\psi \equiv \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2$ oppure $\psi \equiv \mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2$ allora \mathbf{fr} è sottoformula di \mathbf{fr}_1 oppure \mathbf{fr} è sottoformula di \mathbf{fr}_2 ;
- se $\psi \equiv \forall x \mathbf{fr}_1$, oppure $\psi \equiv \exists x \mathbf{fr}_1$ allora \mathbf{fr} è sottoformula di \mathbf{fr}_1 .

Def. 5.76 Sia \mathbf{LI}_p il calcolo contenente le regole che seguono e la loro chiusura per sostituzione delle variabili predicative con formule arbitrarie:

$$\begin{array}{c}
 \text{ax-id} \qquad \text{ax-}\perp \qquad \text{ax-tt} \\
 \frac{}{\Gamma, \mathbf{A}, \Gamma' \vdash \mathbf{A}} \qquad \frac{}{\Gamma, \perp, \Gamma' \vdash \mathbf{C}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{tt}} \\
 \\
 \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash \mathbf{C}}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash \mathbf{C}} \text{sc}_{\text{sx}} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \&\text{S} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}} \&\text{-D} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{C} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \vee\text{-S} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee\text{-D}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee\text{-D}_2 \\
 \\
 \frac{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{A}}{\Gamma, \neg \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}} \neg\text{-S} \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \mathbf{A}} \neg\text{-D} \\
 \\
 \frac{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}} \rightarrow\text{-S} \qquad \frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow\text{-D}
 \end{array}$$

Si osservi che le regole di \mathbf{LI}_p dal basso verso l'alto coinvolgono solo sequenti con SOTTOFORMULE dei sequenti premessa. Considerando che l'insieme delle sottoformule di un insieme finito di formule è esso stesso finito è possibile modificare l'algoritmo di decisione per la logica classica proposizionale al fine di ottenerne uno per il calcolo della logica intuizionista proposizionale \mathbf{LI}_p che riportiamo di seguito. A tal fine dobbiamo prima definire il concetto di *albero di proof-search* ovvero l'albero delle sequenze di regole che si possono applicare da un sequente radice verso l'alto.

Def. 5.77 (albero di proof-search) Dato un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{C}$ in un linguaggio \mathcal{L} per la logica intuizionista proposizionale, si definisce un **albero di proof-search per $\Gamma \vdash \mathbf{C}$** come un albero in cui ogni nodo è formato da una lista finita di sequenti

$$\Gamma_1 \vdash \mathbf{C}_1 \quad , \quad \Gamma_2 \vdash \mathbf{C}_2, \dots, \quad \Gamma_n \vdash \mathbf{C}_n$$

in tal modo

- La radice dell'albero è dato dal sequente $\Gamma \vdash \mathbf{C}$.
- Un predecessore di un nodo

$$\Phi \equiv \Phi_1 \quad , \quad \Gamma \vdash \mathbf{C} \quad , \quad \Phi_2$$

ove Φ_1 e Φ_2 sono liste (anche vuote di sequenti) può essere formato da una lista

$$\Phi_1 \quad , \quad \Gamma' \vdash \mathbf{C}' \quad , \quad \Phi_2$$

ove

$$\frac{\Gamma' \vdash C'}{\Gamma \vdash C}$$

è un'istanza di una regola di \mathbf{LI}_p .

- Un predecessore di un nodo

$$\Phi \equiv \Phi_1, \Gamma \vdash C, \Phi_2$$

ove Φ_1 e Φ_2 sono liste (anche vuote di sequenti) può essere formato da una lista

$$\Phi_1, \Gamma' \vdash C', \Gamma'' \vdash C'', \Phi_2$$

ove

$$\frac{\Gamma' \vdash C' \quad \Gamma'' \vdash C''}{\Gamma \vdash C}$$

è un'istanza di una regola di \mathbf{LI}_p .

Def. 5.78 In un albero di proof-search una formula all'interno di un sequente $\Gamma \vdash C$ che compare in un nodo Φ si dice **usata** se nell'albero c'è un nodo **predecessore** ottenuto applicando **una sua regola**.

Usando il concetto di albero di proof-search si può definire un'algoritmo che ne costruisce uno per ogni dato sequente e tramite questo albero si decide la derivabilità o meno del sequente in \mathbf{LI}_p .

Procedura di decisione per \mathbf{LI}_p

Per sapere se $\Gamma \vdash C$ è **DERIVABILE** in \mathbf{LI}_p procedi in tal modo:

1. $\Gamma \vdash C$ è assioma? $\begin{cases} \text{sì} & \text{Stop} \\ \text{no} & \text{vai in 12. operando con } \Phi \equiv \Gamma \vdash C \end{cases}$
2. nel nodo Φ di sequenti, c'è un sequente, che chiamiamo $\Gamma \vdash C$, con una proposizione composta, che chiamiamo $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$, che a meno di uno scambio ha una regola invertibile di \mathbf{LI}_p applicabile su di essa? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 3. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \text{ in } \Gamma \vdash C \text{ di } \Phi \\ \text{no} & \text{vai in 6.} \end{cases}$
3. la proposizione composta $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ scelta nel sequente $\Gamma \vdash C$ all'interno del nodo Φ , è in posizione buona per applicare ad essa una SUA regola (a dx se $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ sta a dx di \vdash nel sequente, a sx se $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ sta a sx di \vdash)? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 5. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \\ \text{no} & \text{vai in 4. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \end{cases}$
4. se operi su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ in $\Gamma \vdash C$ all'interno del nodo $\Phi \equiv \Phi_1, \Gamma \vdash C, \Phi_2$ estendi Φ operando uno scambio solo su $\Gamma \vdash C$ in modo da ottenere un sequente $\Gamma' \vdash C'$ in cui poter applicare la regola relativa a $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ e vai in 5. operando su $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ nel sequente $\Gamma' \vdash C'$ nel nuovo nodo $\Phi' \equiv \Phi_1, \Gamma' \vdash C', \Phi_2$.
5. nel nodo Φ di sequenti, c'è un sequente, che chiamiamo $\Gamma \vdash C$, con una proposizione composta, che chiamiamo $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ in posizione buona per applicare una sua regola. Estendi Φ con un nuovo nodo Φ' in cui il sequente $\Gamma \vdash C$ è stato sostituito con le premesse, o premessa, della regola relativa a $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$. Poi vai in 10. se la regola applicata era invertibile altrimenti se la regola applicata non era invertibile, dichiara $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ *usata* in Φ e vai in 6. operando su Φ .
6. nel nodo Φ di sequenti, c'è un sequente, che chiamiamo $\Gamma \vdash C$, con una proposizione composta, che chiamiamo $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$ NON usata, che a meno di uno scambio ha una regola NON invertibile di \mathbf{LI}_p applicabile su di essa? $\begin{cases} \text{sì} & \text{vai in 7. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \text{ in } \Gamma \vdash C \text{ di } \Phi \\ \text{no} & \text{vai in 10.} \end{cases}$

7. nel nodo Φ di sequenti, c'è un sequente, che chiamiamo $\Gamma \vdash \mathbf{C}$, con una proposizione composta, $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2$, che a meno di uno scambio ha una regola NON invertibile di \mathbf{LI}_p applicabile su di essa. La proposizione composta è una congiunzione $\text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \equiv \text{pr}_1 \vee \text{pr}_2$? $\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{vai in 8. operando su } \text{pr}_1 \vee \text{pr}_2 \text{ in } \Gamma \vdash \mathbf{C} \text{ di } \Phi \\ \text{no} & \text{vai in 3. operando su } \text{pr}_1 \circ \text{pr}_2 \text{ in } \Gamma \vdash \mathbf{C} \text{ di } \Phi \end{array} \right.$

8. nel nodo $\Phi \equiv \Phi_1, \Gamma \vdash \mathbf{C}, \Phi_2$ si ha $\mathbf{C} \equiv \text{pr}_1 \vee \text{pr}_2$. Dichiaro $\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2$ usata in Φ ed estendi Φ con due nuovi nodi Φ' e Φ'' , ove $\Phi' \equiv \Phi_1, \Gamma \vdash \text{pr}_1, \Phi_2$ e $\Phi'' \equiv \Phi_1, \Gamma \vdash \text{pr}_2, \Phi_2$. Se Φ' o Φ'' è un nodo di soli assiomi STOP altrimenti va in 6. operando su Φ .

10. l'albero di proof-search

ha una foglia composta di sequenti che sono tutti assiomi? $\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{Stop.} \\ \text{no} & \text{vai in 11.} \end{array} \right.$

11. Se ce ne sono, dichiara LOOP tutte le foglie dell'albero di proof-search con sequenti uguali a meno di scambi e CONTRAZIONI di formule ad un nodo successore dell'albero. Poi vai in 12.

12. nell'albero di proof-search ottenuto c'è una foglia Φ , che NON è un LOOP e che non è fatta da soli assiomi e

che ha un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{C}$ con almeno una proposizione composta NON usata?

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{sì} & \text{vai in 2. operando sulla foglia } \Phi \\ \text{no} & \text{Stop} \end{array} \right.$

CONCLUSIONE: se nell'albero ottenuto una foglia è fatta di soli sequenti assiomi, allora $\Gamma \vdash \mathbf{C}$ è **DERIVABILE** in \mathbf{LI}_p ; altrimenti NON è **DERIVABILE** in \mathbf{LI}_p .

Esercizio teorico: Dimostrare che l'algoritmo di decisione per \mathbf{LI}_p termina.

Esercizio teorico: L'algoritmo di decisione per \mathbf{LI}_p può essere migliorato?

Osservazione: Si osservi che è molto più semplice trovare se un sequente è derivabile in \mathbf{LI}_p andando a controllare se le premesse trovate applicando le regole nella ricerca della derivazione sono *derivabili* in $\mathbf{LC}_=$.

Per esempio lo si scopra applicando la procedura di decisione descritta sopra al sequente

$$\vdash \neg(\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$$

6 Esempi di proof-search in logica classica ed intuizionista

Nel seguito forniamo alcuni esempi non banali di classificazione di sequenti in logica classica e intuizionista predicativa con uguaglianza.

Iniziamo con il dare alcuni consigli su come derivare in presenza di quantificatori in $\mathbf{LC}_=$

6.0.1 Consigli utili per derivare in $\mathbf{LC}_=$ e in $\mathbf{LI}_=$

Nell'intento di cercare una derivazione di un sequente è meglio:

<p>applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e \forall-D e \exists-S con variabili NUOVE</p>
<p>Se si confida di poter derivare il sequente si possono abbreviare le derivazioni con le regole di indebolimento</p>
<p>applicare le regole \forall-S e \exists-D con TERMINI presenti nelle formule del sequente (se ce ne sono) per ottenere eventualmente assiomi identità</p>
<p>usare SOLO le lettere w, x, y, z come VARIABILI nelle regole \exists-S e \forall-D</p>
<p>le lettere u, v, u, t, s sono usate come METAVARIABILI per termini ovvero sono usate al posto sia di costanti che di variabili</p>

6.1 Utili lemmi per stabilire se certi sequenti sono opinioni

Lemma 6.1 Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ se esiste un predicato atomico \mathbf{P} e una formula \mathbf{fr} tale che NON è valido in logica classica con uguaglianza (in logica intuizionista con uguaglianza) il sequente

$$\Gamma[\mathbf{P}/\mathbf{fr}] \vdash \Delta[\mathbf{P}/\mathbf{fr}]$$

allora $\Gamma \vdash \Delta$ risulta NON valido in logica classica con uguaglianza (in logica intuizionista con uguaglianza).

Dim. Se $\Gamma \vdash \Delta$ fosse valido nella logica considerata, allora lo sarebbe pure $\Gamma[\mathbf{P}/\mathbf{fr}] \vdash \Delta[\mathbf{P}/\mathbf{fr}]$ per la chiusura della derivabilità di un sequente sotto sostituzione di predicati atomici con formule arbitrarie nel sequente stesso. Ma invece $\Gamma[\mathbf{P}/\mathbf{fr}] \vdash \Delta[\mathbf{P}/\mathbf{fr}]$ NON è derivabile perchè per ipotesi è NON valido. Dunque il sequente di partenza è pure NON derivabile ovvero NON valido nella logica considerata.

Lemma 6.2 Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ nel linguaggio predicativo con uguaglianza le cui formule includono un predicato atomico \mathbf{P}_1 ed esistono due formule \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 tali che

- NON è derivabile in logica classica con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ il sequente $\Gamma[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_1] \vdash \Delta[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_1]$, ottenuto sostituendo TUTTE le occorrenze di \mathbf{P}_1 con la formula \mathbf{fr}_1 nel sequente $\Gamma \vdash \Delta$,
- è derivabile in logica classica con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ il sequente $\Gamma[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2] \vdash \Delta[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2]$, ottenuto sostituendo TUTTE le occorrenze di \mathbf{P}_1 con la formula \mathbf{fr}_2 nel sequente $\Gamma \vdash \Delta$,

allora il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una *opinione* in logica classica con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$, e quindi anche in logica intuizionista con uguaglianza.

Dim. Chiaramente dalla prima condizione NON è possibile che $\Gamma \vdash \Delta$ sia valido, ovvero derivabile, in logica classica con uguaglianza per il lemma 6.1.

Per stabilire se è un'opinione allora consideriamo due casi:

$\Gamma \vdash \Delta$ NON ha variabile libere: Consideriamo il sequente

$$\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$$

Se questo fosse derivabile allora lo sarebbe pure

$$\vdash \neg(\Gamma^{\&}[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2] \rightarrow \Delta^{\vee}[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2])$$

per la chiusura della derivabilità di un sequente sotto sostituzione di predicati atomici con formule arbitrarie nel sequente stesso. Chiamiamo π_2 una sua derivazione.

Ora per il lemma 5.36 dalla seconda condizione sappiamo che pure

$$\vdash \Gamma^{\&}[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2] \rightarrow \Delta^{\vee}[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2]$$

è derivabile in logica classica con uguaglianza e chiamiamo π_1 una sua derivazione. Allora usando l'abbreviazione $\mathbf{fr} \equiv \Gamma^{\&}[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2] \rightarrow \Delta^{\vee}[\mathbf{P}_1/\mathbf{fr}_2]$ avremmo che

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\vdash \mathbf{fr}} \quad \frac{\pi_2}{\vdash \neg \mathbf{fr}}}{\vdash \mathbf{fr} \& \neg \mathbf{fr}} \&-D \quad \frac{\frac{\mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr}, \perp}{\mathbf{fr}, \neg \mathbf{fr} \vdash \perp} \neg-S \quad \frac{\mathbf{fr} \& \neg \mathbf{fr} \vdash \perp}{\mathbf{fr} \& \neg \mathbf{fr} \vdash \perp} \&-S}{\vdash \perp} \text{comp}}{\vdash \perp} \text{ax-id}$$

Dunque otterremo una derivazione del falso in logica classica con uguaglianza il che NON è possibile perchè sappiamo per il teorema 5.24 che la logica classica con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$ è consistente. Dunque $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ NON è valido in $\mathbf{LC}_=$ e quindi è un'opinione.

$\Gamma \vdash \Delta$ con variabile libere: basta rifare il ragionamento sopra ma per il sequente $\vdash \mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ sapendo che questo è derivabile se e solo se lo è $\Gamma \vdash \Delta$ per il lemma 5.36.

Corollary 6.3 Se un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{C}$ è *opinione* in logica classica con uguaglianza allora lo è anche in logica intuizionista con uguaglianza.

Inoltre se un sequente $\Gamma \vdash \mathbf{C}$ è valido in logica classica con uguaglianza ma NON è valido in logica intuizionista con uguaglianza allora è *opinione* in logica intuizionista con uguaglianza.

Dim. Per esercizio.

6.2 Alcuni esempi di proof-search in logica classica con uguaglianza

Andiamo a stabilire se i sequenti

$$\vdash \exists x \exists y \ x \neq y \quad \vdash \exists y \ s \neq y$$

posto che s NON abbia variabili libere, sono validi, opinioni o paradossi in logica classica con uguaglianza. A tal scopo diamo una definizione:

Def. 6.4 Una formula α è *esistenziale* se è della forma

$$\exists \mathbf{x}_1 \exists \mathbf{x}_2 \dots \exists \mathbf{x}_n \beta$$

e β è una formula proposizionale (ossia costruita a partire da proposizioni atomiche, inclusa l'uguaglianza, e i connettivi $\rightarrow, \vee, \&, \neg$).

Poi dimostriamo questa proposizione

Lemma 6.5 Sia $\Gamma \vdash \Delta_1, \exists y \beta, \Delta_2$ un sequente ove Γ è formato solo da formule proposizionali e Δ_1, Δ_2 contengono solo formule proposizionali o formule esistenziali.

Se un tal sequente $\Gamma \vdash \Delta_1, \exists y \beta, \Delta_2$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ allora esiste un numero finito di termini t_1, \dots, t_m tale che $\Gamma \vdash \Delta_1, \beta[y/t_1], \dots, \beta[y/t_m], \Delta_2$ è pure derivabile in $\mathbf{LC}_=$.

dim. Dimostriamo il lemma per induzione sulla profondità pura della lunghezza della derivazione π del sequente $\Gamma \vdash \Delta_1, \exists y \beta, \Delta_2$ ovvero

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta_1, \exists y \beta, \Delta_2 \Gamma \vdash \mathbf{fr}}$$

Se $pf(\pi) = 0$ allora $\Gamma \vdash \Delta_1, \exists y \beta, \Delta_2$ è un assioma e si vede che in tutti i casi deve esserlo pure

$$\Gamma \vdash \Delta_1, \beta[y/t_1], \dots, \beta[y/t_m], \Delta_2$$

in quando l'unico caso critico sarebbe l'assioma identità con la formula esistenziale $\exists y \beta$ ma questo caso non è possibile perchè Γ è fatto solo di formule proposizionali.

Se la tesi si assume valida per derivazioni π' tali che $pf(\pi') \leq n$ e si suppone che $pf(\pi) = n + 1$ allora si considera l'ultima regola di π . Si osservi che questa o è una regola di un connettivo proposizionale oppure è l'applicazione di un \exists -D.

Caso ultima regola \vee -D ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha, \xi, \Delta'_1, \exists y \beta, \Delta_2}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \xi, \Delta'_1, \exists y \beta, \Delta_2} \vee\text{-D}$$

Per ipotesi induttiva applicata a π' di profondità n , che soddisfa le ipotesi del lemma, esiste una derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \alpha \xi, \Delta'_1, \beta[y/t_1], \dots, \beta[y/t_m], \Delta_2}$$

e quindi pure

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha, \xi, \Delta'_1, \beta[y/t_1], \dots, \beta[y/t_m], \Delta_2}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \xi, \Delta'_1, \beta[y/t_1], \dots, \beta[y/t_m], \Delta_2} \vee\text{-D}$$

come volevamo dimostrare.

Caso ultima regola \exists -D ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \beta[x/s], \exists y \beta, \Delta_2}}{\Gamma \vdash \exists y \beta, \Delta_2} \exists\text{-D}$$

con $\Delta_1 \equiv []$.

Per ipotesi induttiva applicata a π' di profondità n , che soddisfa le ipotesi della proposizione esiste una derivazione $\overline{\pi'}$

$$\frac{\overline{\pi'}}{\Gamma \vdash \beta[x/s], \beta[y/t_1], \dots, \beta[y/t_m], \Delta_2}$$

che dimostra già la nostra tesi.

Negli altri casi si procede in maniera analoga.

Ora applicando il lemma 6.5 risulta che se

$$\vdash \exists x \exists y x \neq y$$

fosse valido in $\mathbf{LC}_=$ allora lo sarebbe pure

$$\vdash \exists y t_1 \neq y, \dots, \exists y t_n \neq y$$

e riapplicando a questo sequente di nuovo il lemma 6.5 si ricava che sarebbe derivabile pure

$$\vdash \mathbf{t}_1 \neq \mathbf{s}_{11}, \quad \dots, \mathbf{t}_n \neq \mathbf{s}_{n1}$$

e per l'invertibilità della regola \neg -D lo sarebbe pure

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{s}_1, \quad \dots, \mathbf{t}_n = \mathbf{s}_j \vdash$$

che chiaramente non lo è perchè nell'intento di trovare una derivazione solo le regole dell'uguaglianza a sx o scambi a sx a vuoto sono applicabili senza trovare una assioma (fare per bene la dimostrazione che $\mathbf{t}_1 = \mathbf{s}_1, \quad \dots, \mathbf{t}_n = \mathbf{s}_j \vdash$ NON è derivabile per induzione sulla profondità pura del sequente $\mathbf{t}_1 = \mathbf{s}_1, \quad \dots, \mathbf{t}_n = \mathbf{s}_j \vdash$).

Dunque

$$\vdash \exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

è NON VALIDO in logica classica con uguaglianza.

Andiamo ora a stabilire se il sequente $\vdash \exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ è opinione o paradosso in logica classica con uguaglianza, visto che non è valido. Siccome la formula che lo rappresenta è un enunciato, per raggiungere il nostro scopo basta stabilire se la sua negazione è valida ovvero se è valido il sequente

$$\vdash \neg \exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

(che è equivalente al sequente $\vdash \neg(\mathbf{t} \rightarrow \exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$) per l'invertibilità delle regole \neg -D, \rightarrow -S-dimostrarlo per bene!). Ora si noti che la validità di $\vdash \neg \exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ è equivalente alla validità del sequente

$$\exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \vdash$$

per l'invertibilità di \neg -D. Ora per l'invertibilità della regola \exists -S applicata due volte si ottiene che il sequente $\exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \vdash$ è valido se e solo se lo è pure un sequente della forma

$$\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_2 \vdash$$

ove per le condizioni sulle variabili di \exists -S le variabili \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 devono per forza essere distinte! Poi per l'invertibilità di \neg -D, il sequente $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_2 \vdash$ è valido se e solo se lo è $\vdash \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ che chiaramente non è valido in quanto non è un assioma di uguaglianza e nessuna regola a parte lo scambio a vuoto si può applicare nell'intento di trovare una derivazione in $\mathbf{LC}_=$ (fare per bene la dimostrazione che $\vdash \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ NON è derivabile per induzione sulla profondità pura di una sua derivazione). Dunque il sequente $\vdash \neg \exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ è pure NON valido in $\mathbf{LC}_=$.

Si conclude quindi che il sequente di partenza $\vdash \exists x \exists y \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ è un **opinione in logica classica con uguaglianza**.

Per stabilire se il sequente

$$\vdash \exists y \mathbf{s} \neq \mathbf{y}$$

è valido si procede analogamente. Infatti applicando il lemma 6.5 risulta che se

$$\vdash \exists y \mathbf{s} \neq \mathbf{y}$$

fosse valido in $\mathbf{LC}_=$ allora lo sarebbe pure

$$\vdash \mathbf{s} \neq \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{s} \neq \mathbf{t}_n$$

e per l'invertibilità della regola \neg -D lo sarebbe pure

$$\mathbf{s} = \mathbf{t}_1, \quad \dots, \mathbf{s} = \mathbf{t}_n \vdash$$

che chiaramente non è derivabile perchè solo le regole dell'uguaglianza a sx o scambi a sx a vuoto sono applicabili senza trovare una assioma (fare per bene la dimostrazione che $\mathbf{s} = \mathbf{t}_1, \quad \dots, \mathbf{s} = \mathbf{t}_n \vdash$ NON

è derivabile per induzione sulla profondità pura del sequente $s = t_1, \dots, s = t_n \vdash$). Dunque il sequente $\vdash \exists y s \neq y$ è NON valido.

Andiamo ora a stabilire se il sequente $\vdash \exists y s \neq y$ è opinione o paradosso in logica classica con uguaglianza, visto che non è valido. Siccome la formula che lo rappresenta è un enunciato, perchè s NON ha variabili libere, per raggiungere il nostro scopo basta stabilire se la sua negazione è valida ovvero se è valido il sequente

$$\vdash \neg \exists y s \neq y$$

(che è equivalente al sequente $\vdash \neg(t_1 \rightarrow \exists y s \neq y)$ per l'invertibilità delle regole \neg -D, \rightarrow -S). Ora si nota che la validità di $\vdash \neg \exists y s \neq y$ è equivalente alla validità del sequente

$$\exists y s \neq y \vdash$$

per l'invertibilità di \neg -D. Ora per l'invertibilità della regola \exists -S si ottiene che il sequente $\exists y s \neq y \vdash$ è valido se e solo se lo è pure un sequente della forma

$$s \neq w \vdash$$

ove per le condizioni sulle variabili di \exists -S la variabile w NON PUÒ coincide con s che non ha variabili libere! Poi per l'invertibilità di \neg -D, il sequente $s \neq w \vdash$ è valido se e solo se lo è $\vdash s = w$ che chiaramente non lo è in quanto non è un assioma di uguaglianza e nessuna regola a parte lo scambio a vuoto si può applicare nell'intento di trovare una sua derivazione. Dunque il sequente $\vdash \neg \exists y s \neq y$ è pure NON valido in $\mathbf{LC}_=$.

Si conclude quindi che il sequente di partenza $\vdash \exists y s \neq y$ è un **opinione in logica classica con uguaglianza**.

6.2.1 Non validità intuizionista di $\forall x (A(x) \vee C) \vdash \forall x A(x) \vee C$

Intanto proviamo due lemmi ausiliari che ci serviranno per dimostrare che il sequente $\forall x (A(x) \vee C) \vdash \forall x A(x) \vee C$ che sappiamo essere valido in logica classica con uguaglianza NON lo è in logica intuizionista e quindi in questa è un'opinione.

Lemma 6.6 *Non esiste in $\mathbf{LC}_=$ una derivazione del sequente*

$$\Gamma, \forall x (A(x) \vee C) \vdash \forall x A(x)$$

ove o Γ è lista vuota oppure contiene solo formule o del tipo $A(t) \vee C$ per qualche t oppure del tipo $A(t')$ per qualche termine t' (dove i vari termini t possono essere diversi).

Dim. Se il sequente fosse derivabile lo sarebbe pure il sequente ove al posto C si mette la costante vero \mathbf{tt} e dunque avremmo una dimostrazione π del tipo

$$\frac{\pi}{\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}], \forall x (A(x) \vee \mathbf{tt}) \vdash \forall x A(x)}$$

Poi componendo come segue otterremmo una dimostrazione

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{ax-tt}}{\vdash A(x), \mathbf{tt}}}{\vdash A(x) \vee \mathbf{tt}} \vee\text{-D}}{\vdash \forall x (A(x) \vee \mathbf{tt})} \vee\text{-D} \quad \frac{\pi}{\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}], \forall x (A(x) \vee \mathbf{tt}) \vdash \forall x A(x)}}{\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash \forall x A(x)} \text{comp}$$

Ora si osservi che $\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash \forall x A(x)$ è equivalente per l'invertibilità della regola $\vee\text{-D}$ a

$$\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash A(\mathbf{w})$$

con \mathbf{w} non in $\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}]$. Ora il sequente $\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash A(\mathbf{w})$ NON è valido in logica intuizionista con uguaglianza perchè non lo è neanche in logica classica. Per stabilirlo consideriamo vari casi:

1. *caso Γ lista vuota:* chiaramente $\vdash A(\mathbf{w})$ non è valido classicamente perchè NON è un assioma e non c'è altra regola da applicare dal basso verso l'alto per raggiungere un'assioma.
2. *caso in cui in Γ non c'è alcuna occorrenza di $A(t) \vee C$ ma ci sono solo occorrenze di $A(t)$:* in tal caso il sequente è del tipo

$$A(\mathbf{t}_1), \dots, A(\mathbf{t}_n) \vdash A(\mathbf{w})$$

che chiaramente NON è valido perchè i \mathbf{t}_n non contengono \mathbf{w} e quindi sono diversi da \mathbf{w} e non c'è nessuna regola applicabile dal basso verso l'alto a parte lo scambio.

3. *caso in cui in Γ c'è un'occorrenza del tipo $A(t) \vee C$ ovvero $\Gamma \equiv \Gamma_1, A(t) \vee C, \Gamma_3$:* in questo caso se $\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash A(\mathbf{w})$ fosse derivabile con una derivazione π' , lo sarebbe pure il sequente

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{ax-tt} \quad \mathbf{tt}}{\vdash C, \mathbf{tt}}}{\vdash C \vee \mathbf{tt}} \vee\text{-D} \quad \frac{\pi'}{\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash A(\mathbf{w})}}{\Gamma_1, \Gamma_3 \vdash A(\mathbf{w})} \text{comp}$$

Ora se in Γ_1, Γ_3 NON c'è altra occorrenza di $A(t') \vee C$ il sequente $\Gamma_1, \Gamma_3[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash A(\mathbf{w})$ è del tipo considerato in 2) e quindi NON è valido classicamente. Altrimenti se in Γ_1, Γ_3 c'è un'altra o più occorrenze del tipo $A(t'') \vee C$ (con i t'' tutti diversi eventualmente) si riapplica il ragionamento sopra andando ad eliminare TUTTE queste occorrenze con la composizione fino ad ottenere un sequente del tipo considerato in 2).

Lemma 6.7 *Non esiste in $\mathbf{LC}_=$ una derivazione del sequente*

$$\Gamma, \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}) \vdash \mathbf{C}$$

ove Γ è lista vuota oppure contiene solo formule o del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \mathbf{C}$ per qualche \mathbf{t} oppure del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t}')$ per qualche termine \mathbf{t}' (dove i vari termini \mathbf{t} possono essere diversi).

Dim. Se il sequente fosse derivabile lo sarebbe pure il sequente ove al posto \mathbf{C} si mette la costante falso \perp e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ la costante \mathbf{tt} (in particolare si ottiene che $\mathbf{A}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ e quindi $\mathbf{A}(\mathbf{x})[\mathbf{x}/\mathbf{t}][[\mathbf{A}(\mathbf{x})/\perp] = \perp$ e dunque avremmo una dimostrazione π del tipo

$$\frac{\pi}{\Gamma[\mathbf{C}/\perp], \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp) \vdash \perp}$$

Poi componendo come segue otterremmo una dimostrazione

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\mathbf{ax-tt}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}), \perp} \quad \vee\text{-D}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}), \perp} \quad \vee\text{-D}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp} \quad \vee\text{-D}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \perp)} \quad \vee\text{-D} \quad \frac{\pi}{\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}], \forall \mathbf{x} (\mathbf{tt} \vee \perp) \vdash \perp}}{\Gamma[\mathbf{C}/\perp], \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp} \quad \text{comp}$$

Ora si osservi che $\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è equivalente per l'invertibilità della regola $\vee\text{-D}$ a

$$\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})$$

con \mathbf{w} non in $\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}]$. Ora il sequente $\Gamma[\mathbf{C}/\mathbf{tt}] \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})$ NON è valido in logica intuizionista con uguaglianza perchè non lo è neanche in logica classica. Per stabilirlo consideriamo vari casi:

1. *caso Γ lista vuota:* chiaramente $\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp$ non è valido classicamente perchè NON è un assioma e non c'è altra regola da applicare dal basso verso l'alto per raggiungere un'assioma.
2. *caso in cui in Γ non c'è alcuna occorrenza di $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \mathbf{C}$ ma ci sono solo occorrenze di $\mathbf{A}(\mathbf{t})$:* in tal caso il sequente è del tipo

$$\mathbf{A}(\mathbf{t}_1), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{t}_n), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp$$

che chiaramente NON è valido perchè NON è un assioma e se fosse derivabile l'ultima regola non di scambio sarebbe un $\vee\text{-S}$ con un sequente derivabile di lunghezza inferiore dello stesso tipo (dimostrare per induzione sulla profondità pura che il sequente $\mathbf{A}(\mathbf{t}_1), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{t}_n), \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp$ NON è derivabile in logica classica).

3. *caso in cui in Γ c'è un'occorrenza del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \mathbf{C}$ ovvero $\Gamma \equiv \Gamma_1, \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \mathbf{C}, \Gamma_3$:* in questo caso se $\Gamma[\mathbf{C}/\perp] \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w})$ fosse derivabile con una derivazione π' , lo sarebbe pure il sequente

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{ax-tt} \quad \mathbf{tt}}{\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}), \perp} \quad \vee\text{-D}}{\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \perp} \quad \vee\text{-D}}{\Gamma_1, \mathbf{A}(\mathbf{t}), \Gamma_3, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp} \quad \frac{\pi}{\Gamma[\mathbf{C}/\perp], \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp}}{\Gamma_1, \mathbf{A}(\mathbf{t}), \Gamma_3, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp} \quad \text{comp}$$

Ora se in Γ_1, Γ_3 NON c'è altra occorrenza di $\mathbf{A}(\mathbf{t}') \vee \mathbf{C}$ il sequente $\Gamma_1, \Gamma_3[\mathbf{C}/\perp], \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \perp$ è del tipo considerato in 2) e quindi NON è valido classicamente. Altrimenti se in Γ_1, Γ_3 c'è un'altra o più occorrenze del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t}'') \vee \mathbf{C}$ (con i \mathbf{t}'' tutti diversi eventualmente) si riapplica il ragionamento sopra andando ad eliminare TUTTE queste occorrenze con la composizione fino ad ottenere un sequente del tipo considerato in 2).

Proposition 6.8 *Non esiste in $\mathbf{LI}_=$ una derivazione del sequente $\Gamma, \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}) \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}$, ove Γ è lista vuota oppure contiene solo formule del tipo $\mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \mathbf{C}$ per qualche \mathbf{t} (dove i vari termini \mathbf{t} possono essere diversi).*

Dim. Dimostriamo per induzione sul numero naturale \mathbf{n} che vale

$$\text{Pred}(\mathbf{n}) =$$

Non esiste in $\mathbf{LI}_=$ una derivazione di lunghezza al più \mathbf{n} del sequente $\Gamma, \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}) \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}$.

Il caso base $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ è vero perchè il sequente $\Gamma, \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}) \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}$ NON è un assioma di $\mathbf{LI}_=$.

Ora supponiamo che il predicato $\text{Pred}(\mathbf{n})$ sia vero per \mathbf{n} e andiamo a dimostrare che è vero pure $\text{Pred}(\mathbf{n} + 1)$. A tal scopo supponiamo che $\Gamma, \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}) \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}$ sia derivabile con una derivazione π di profondità pura al più $\mathbf{n} + 1$ che in verità è proprio di profondità $\mathbf{n} + 1$ perchè per ipotesi non esiste derivazione di profondità \mathbf{n} . Allora la derivazione π ha un'ultima regola non di scambio che può essere:

1. *caso ultima regola $\vee - D_1$* : in tal caso sarebbe derivabile intuizionisticamente il sequente

$$\Gamma, \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}) \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

ma per il lemma 6.6 ciò non è possibile perchè tale sequente NON è valido in logica classica con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$.

2. *caso ultima regola $\vee - D_2$* : in tal caso sarebbe derivabile intuizionisticamente il sequente

$$\Gamma, \forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}) \vdash \mathbf{C}$$

ma per il lemma 6.7 ciò non è possibile perchè tale sequente NON è valido in logica classica con uguaglianza $\mathbf{LC}_=$.

3. *caso ultima regola $\forall - S$* : in tal caso sarebbe derivabile intuizionisticamente il sequente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}), \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \mathbf{C} \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{C}$$

ma con una derivazione di profondità pura \mathbf{n} mentre per ipotesi ciò non è possibile.

Ciò permette di concludere che pure $\text{Pred}(\mathbf{n} + 1)$ è vera e quindi *per ogni \mathbf{n} si ha che $\text{Pred}(\mathbf{n} + 1)$ è vera* e dunque la tesi è dimostrata.

7 Proprietà caratterizzanti la logica intuizionista rispetto alla classica

Def. 7.1 (proprietà disgiuntiva) Un calcolo L dei sequenti nel linguaggio predicativo o proposizionale soddisfa la proprietà **disgiuntiva** se vale

$$\begin{array}{c} \vdash \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2 \text{ è derivabile in L} \\ \text{sse} \\ \vdash \mathbf{fr}_1 \text{ è derivabile in L} \quad \text{OPPURE} \quad \vdash \mathbf{fr}_2 \text{ è derivabile in L} \end{array}$$

Def. 7.2 (proprietà di esistenza) Un calcolo L dei sequenti nel linguaggio predicativo o proposizionale soddisfa la proprietà di **esistenza** se vale

$$\begin{array}{c} \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}(\mathbf{x}) \text{ è derivabile in L} \\ \text{sse} \\ \text{esiste un termine } \mathbf{t} \text{ tale che } \vdash \mathbf{fr}(\mathbf{t}) \text{ è derivabile in L} \end{array}$$

Proposition 7.3 La proprietà disgiuntiva NON vale in $\mathbf{LC}_=$.

Proof. Basta osservare che *il principio del terzo escluso* $\mathbf{fr} \vee \neg \mathbf{fr}$ è vero in $\mathbf{LC}_=$, ovvero che è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ il sequente

$$\vdash \mathbf{fr} \vee \neg \mathbf{fr}$$

in tal modo

$$\begin{array}{c} \mathbf{ax-id} \\ \mathbf{fr} \vdash \mathbf{fr} \\ \hline \vdash \neg \mathbf{fr}, \mathbf{f} \quad \neg\text{-D} \\ \hline \vdash \mathbf{fr}, \neg \mathbf{fr} \quad \text{sc}_{dx} \\ \hline \vdash \mathbf{fr} \vee \neg \mathbf{fr} \quad \vee\text{-D} \end{array}$$

Ma se poniamo $\mathbf{fr} \equiv \mathbf{A}$ allora seppur $\vdash \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$, NON lo è invece

$$\vdash \mathbf{A}$$

in quanto a parte la regola di scambio (con la lista vuota) NON si può applicare nessun'altra regola per ottenere un albero di derivazione. Neppure

$$\vdash \neg \mathbf{A}$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ in quanto a parte la negazione a sx

$$\frac{\mathbf{A} \vdash}{\vdash \neg \mathbf{A}} \neg\text{-D}$$

e la regola di scambio (con la lista vuota) NON si può applicare nessun'altra regola per ottenere un albero di derivazione. Da ciò si conclude che la proprietà disgiuntiva non vale per $\vdash \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ in $\mathbf{LC}_=$.

Proposition 7.4 La proprietà di esistenza NON vale in $\mathbf{LC}_=$.

Proof. Data una formula \mathbf{fr} , si provi a derivare in $\mathbf{LC}_=$ la seguente formula

$$\vdash \exists \mathbf{x} ((\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{0})) \& \mathbf{fr}) \vee ((\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{1})) \& \neg \mathbf{fr}))$$

per esercizio.

Sempre per esercizio si provi a dimostrare che se \mathbf{fr} è un predicato atomico \mathbf{B} per NESSUN \mathbf{t} si deriva in $\mathbf{LC}_=$

$$\vdash ((\mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{0})) \& \mathbf{B}) \vee ((\mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{1})) \& \neg \mathbf{B})$$

Proposition 7.5 *La proprietà disgiuntiva vale in logica intuizionista con l'uguaglianza $\mathbf{LI}_=$.*

Dim. In $\mathbf{LI}_=$ una qualsiasi derivazione di una disgiunzione deve per forza avere come ultima regola diversa da uno scambio a vuoto, la regola $\vee\text{-Dn}_1$ o la $\vee\text{-Dn}_2$ e dunque la tesi è verificata.

Proposition 7.6 *La proprietà esistenziale vale in $\mathbf{LI}_=$.*

Dim. In $\mathbf{LI}_=$ una qualsiasi derivazione di un esistenziale deve per forza avere come ultima regola diversa dallo scambio a vuoto, la regola $\exists\text{-Dn}$ e dunque la tesi è verificata.

7.1 Osservazioni conclusive

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto sia per la logica classica con uguaglianza che per quella intuizionista con uguaglianza due sistemi formali di derivazione entrambi in forma di calcolo dei sequenti: i calcoli dei sequenti per la deduzione naturale $\mathbf{DNI}_=$ e $\mathbf{DNC}_=$ e poi i calcoli puri alla Gentzen $\mathbf{LI}_=$ e $\mathbf{LC}_=$.

Ora possiamo concludere che

- I calcoli $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ *definiscono* le regole logiche rispettivamente per la logica classica e intuizionista, la cui correttezza è presa come evidente. Possiamo in pratica dire
la logica classica con uguaglianza è rappresentata dal sistema formale $\mathbf{DNC}_=$
la logica intuizionista con uguaglianza è rappresentata dal sistema formale $\mathbf{DNI}_=$
- I calcoli $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LI}_=$ servono per fare la ricerca della dimostrazione in logica classica e intuizionista con uguaglianza in quanto si è dimostrato che sono equivalenti rispettivamente a $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$. Essi in particolare servono per definire le proprietà di *decidibilità*, del fatto che una proposizione sia o meno un teorema, per i frammenti proposizionali di $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ tramite i calcoli \mathbf{LC}_p e \mathbf{LI}_p . Inoltre servono per stabilire la validità o meno delle proprietà disgiuntiva e di esistenza enunciate sopra.
- Infine si noti che tutti i lemmi enunciati per $\mathbf{LC}_=$ e $\mathbf{LI}_=$ si trasportano in forma opportuna a $\mathbf{DNC}_=$ e $\mathbf{DNI}_=$ sfruttando l'equivalenza dei sistemi.

7.2 La logica classica si può tradurre in quella intuizionista

Qui di seguito enunciamo importanti risultati relativi al rapporto tra derivabilità in logica classica e intuizionista.

Def. 7.7 (traduzione della DOPPIA NEGAZIONE di Gödel) *Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} una traduzione*

$$(-)^\circ : Frm(\mathcal{L}) \longrightarrow Frm(\mathcal{L})$$

in tal modo:

1. $\perp^\circ \equiv \perp$;
2. $\mathbf{tt}^\circ \equiv \mathbf{tt}$;
3. $P^\circ \equiv \neg\neg P$ per ogni predicato atomico P inclusa l'uguaglianza;
4. per ogni formula \mathbf{fr}_1 e \mathbf{fr}_2 , e \mathbf{fr}
 - (a) $(\mathbf{fr}_1 \ \& \ \mathbf{fr}_2)^\circ \equiv \mathbf{fr}_1^\circ \ \& \ \mathbf{fr}_2^\circ$
 - (b) $(\mathbf{fr}_1 \ \vee \ \mathbf{fr}_2)^\circ \equiv \neg(\neg\mathbf{fr}_1^\circ \ \& \ \neg\mathbf{fr}_2^\circ)$
 - (c) $(\mathbf{fr}_1 \ \rightarrow \ \mathbf{fr}_2)^\circ \equiv \mathbf{fr}_1^\circ \ \rightarrow \ \mathbf{fr}_2^\circ$
 - (d) $(\neg\mathbf{fr})^\circ \equiv \neg\mathbf{fr}^\circ$
 - (e) $(\forall x \ \mathbf{fr})^\circ \equiv \forall x \ \mathbf{fr}^\circ$
 - (f) $(\exists x \ \mathbf{fr})^\circ \equiv \neg \forall x \ \neg\mathbf{fr}^\circ$

Inoltre poniamo questa notazione: se $\Gamma \equiv \mathbf{fr}_1, \dots, \mathbf{fr}_n$

$$\Gamma^\circ \equiv \mathbf{fr}_1^\circ, \dots, \mathbf{fr}_n^\circ$$

Lemma 7.8 (sostituzione) *Per ogni formula \mathbf{fr} di un linguaggio proposizionale \mathcal{L} e per ogni termine \mathbf{t}_{ter} la sostituzione commuta con la traduzione della doppia negazione ovvero vale*

$$(\mathbf{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}])^\circ \equiv \mathbf{fr}^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{t}_{\text{ter}}]$$

Dim. Segue banalmente per induzione sulla formazione di \mathbf{fr} grazie alla definizione induttiva di sostituzione e al fatto che la traduzione \circ sulle formule atomiche non opera sostituzioni di termini.

Lemma 7.9 *Per ogni formula \mathbf{fr} di un linguaggio proposizionale \mathcal{L} si ha che in logica intuizionista $\text{DNI}_=$ si deriva*

$$\vdash \mathbf{fr}^\circ \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{fr}$$

Dim. Mostriamo il lemma per induzione sulla formazione della proposizione \mathbf{fr} .

1. caso $\mathbf{fr} \equiv \mathbf{tt}$ oppure $\mathbf{fr} \equiv \perp$: ricordando che

$$\mathbf{tt}^\circ \equiv \mathbf{tt} \qquad \perp^\circ \equiv \perp$$

la tesi segue banalmente dal fatto che sono tautologie intuizioniste (che si lasciano da derivare al lettore)

$$\vdash \mathbf{tt} \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{tt} \qquad \perp \leftrightarrow \neg\neg\perp$$

2. caso \mathbf{fr} *atomica*: ricordando che per definizione

$$\mathbf{fr}^\circ \equiv \neg\neg\mathbf{fr}$$

la tesi segue banalmente.

3. caso $\text{fr} \equiv \neg\alpha$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Dal lemma 3.14, grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\neg\alpha$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ e dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare!)

$$\vdash \neg\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 si ottiene che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\alpha$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Ora ricordando che $(\neg\alpha)^\circ \equiv \neg\alpha^\circ$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\neg\alpha)^\circ \leftrightarrow \neg\alpha$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

4. caso $\text{fr} \equiv \alpha \& \beta$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\beta$$

sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$, e dal lemma 3.14, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash \alpha^\circ \& \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha \& \neg\neg\beta$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Ora dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare!)

$$\vdash \neg\neg\alpha \& \neg\neg\beta \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \& \beta)$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 ne segue che

$$\vdash \alpha^\circ \& \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \& \beta)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Quindi, ricordando che $(\alpha \& \beta)^\circ \equiv \alpha^\circ \& \beta^\circ$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\alpha \& \beta)^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \& \beta)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

5. caso $\text{fr} \equiv \alpha \rightarrow \beta$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\beta$$

sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$, e dal lemma 3.14, grazie al fatto che l'implicazione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash (\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ) \leftrightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta)$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Ora dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare!)

$$\vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta) \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 si ottiene che

$$\vdash (\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ) \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Quindi, ricordando che $(\alpha \rightarrow \beta)^\circ \equiv \alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta)^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

6. caso $\mathbf{fr} \equiv \alpha \vee \beta$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\beta$$

sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$ e per il lemma 3.14 grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti ne segue che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\neg\alpha \quad \vdash \neg\beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\neg\beta$$

sono pure derivabili in $\mathbf{DNI}_=$. Ora grazie alla transitività delle equivalenze con la tautologia intuizionista

$$\vdash \neg\neg\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{A}$$

si ottiene che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\alpha \quad \vdash \neg\beta^\circ \leftrightarrow \neg\beta$$

sono pure derivabili in $\mathbf{DNI}_=$. Di nuovo per il lemma 3.14, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ \leftrightarrow \neg\alpha \& \neg\beta$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Ora dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare!)

$$\vdash \neg\alpha \& \neg\beta \leftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 ne segue che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ \leftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Ora per il lemma lemma 3.14, grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti, si ottiene che

$$\vdash \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ) \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \vee \beta)$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Infine, ricordando che $(\alpha \vee \beta)^\circ \equiv \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ)$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\alpha \vee \beta)^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \vee \beta)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

Osservazione: Il lemma sopra non vale per le formule predicative. Un controesempio è dato dal fatto che il seguente

$$\vdash \forall \mathbf{x} \neg\neg\mathbf{B}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \neg\neg\forall \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

NON è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ per una formula atomica $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Questo comporta che

$$\vdash (\forall \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x}))^\circ \leftrightarrow \neg\neg\forall \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

NON è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ in quanto $(\forall \mathbf{x} \mathbf{B}(\mathbf{x}))^\circ \equiv \forall \mathbf{x} \neg\neg\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

Lemma 7.10 *Per ogni formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo \mathcal{L} si ha che in logica intuizionista $\mathbf{DNI}_=$ si deriva*

$$\vdash \mathbf{fr}^\circ \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{fr}^\circ$$

Dim. Per induzione sulla definizione di \mathbf{fr} .

1. caso $\mathbf{fr} \equiv \mathbf{tt}$ oppure $\mathbf{fr} \equiv \perp$: ricordando che

$$\mathbf{tt}^\circ \equiv \mathbf{tt} \quad \perp^\circ \equiv \perp$$

la tesi segue banalmente dal fatto che sono tautologie intuizioniste (che si lasciano da derivare al lettore)

$$\vdash \mathbf{tt} \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{tt} \quad \perp \leftrightarrow \neg\neg\perp$$

2. caso \mathbf{fr} *atomica*: ricordando che per definizione

$$\mathbf{fr}^\circ \equiv \neg\neg\mathbf{fr}$$

la tesi segue dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare!)

$$\vdash \neg\neg\mathbf{fr} \leftrightarrow \neg\neg\neg\neg\mathbf{fr}$$

3. caso $\mathbf{fr} \equiv \neg\alpha$: per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha^\circ$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Dal lemma 3.14, grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\neg\alpha^\circ$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ e questo sequente coincide con la nostra tesi in quanto $(\neg\alpha)^\circ \equiv \neg\alpha^\circ$ ovvero

$$\vdash (\neg\alpha)^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\neg\alpha)^\circ$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

4. caso $\mathbf{fr} \equiv \alpha \& \beta$: per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha^\circ \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\beta^\circ$$

sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$, e dal lemma 3.14, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash \alpha^\circ \& \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha^\circ \& \neg\neg\beta^\circ$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Ora dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare!)

$$\vdash \neg\neg\mathbf{A} \& \neg\neg\mathbf{B} \leftrightarrow \neg\neg(\mathbf{A} \& \mathbf{B})$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 ne segue che

$$\vdash \alpha^\circ \& \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\alpha^\circ \& \beta^\circ)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Quindi, ricordando che $(\alpha \& \beta)^\circ \equiv \alpha^\circ \& \beta^\circ$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\alpha \& \beta)^\circ \leftrightarrow \neg\neg((\alpha \& \beta)^\circ)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

5. caso $\mathbf{fr} \equiv \alpha \rightarrow \beta$: per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha^\circ \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \neg\neg\beta^\circ$$

sono derivabili in $\mathbf{DNI}_=$, e dal lemma 3.14, grazie al fatto che l'implicazione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash (\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ) \leftrightarrow (\neg\neg\alpha^\circ \rightarrow \neg\neg\beta^\circ)$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Ora dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare!)

$$\vdash (\neg\neg\mathbf{A} \rightarrow \neg\neg\mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 si ottiene che

$$\vdash (\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ) \leftrightarrow \neg\neg(\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Quindi, ricordando che $(\alpha \rightarrow \beta)^\circ \equiv \alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta)^\circ \leftrightarrow \neg\neg((\alpha \rightarrow \beta)^\circ)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

6. caso $\mathbf{fr} \equiv \alpha \vee \beta$: ricordando che $(\alpha \vee \beta)^\circ \equiv \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ)$ la tesi segue dalla segue dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare)

$$\vdash \neg\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\neg\neg\mathbf{A}$$

ovvero da questa tautologia si conclude immediatamente che

$$\vdash (\alpha \vee \beta)^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \vee \beta)^\circ$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

7. caso $\mathbf{fr} \equiv \forall\mathbf{x} \alpha$: per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha^\circ$$

Ora per lemma 3.14, grazie al fatto che la quantificazione universale conserva gli equivalenti, si ottiene che è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$

$$\vdash \forall\mathbf{x} \alpha^\circ \leftrightarrow \forall\mathbf{x} \neg\neg\alpha^\circ \quad (1)$$

Ora dalla tautologia intuizionista (che si lascia al lettore da derivare)

$$\vdash \forall\mathbf{x} \neg\mathbf{B}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \neg\neg\forall\mathbf{x} \neg\mathbf{B}(\mathbf{x})$$

si ottiene che è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$

$$\vdash \forall\mathbf{x} \neg\neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\forall\mathbf{x} \neg\neg\alpha^\circ$$

e da questo grazie alla transitività delle equivalenze nel lemma 3.12 con il sequente (1) si conclude che è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$

$$\vdash \forall\mathbf{x} \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\forall\mathbf{x} \neg\neg\alpha^\circ$$

Ma dalla derivabilità intuizionista di

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\alpha^\circ$$

sempre per lemma 3.14, grazie al fatto che la quantificazione universale e la negazione conservano gli equivalenti si ottiene pure che

$$\vdash \neg\neg\forall\mathbf{x} \neg\neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\forall\mathbf{x} \alpha^\circ$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Quindi per transitività degli equivalenti in 3.12 da quanto dimostrato sopra si deriva in $\mathbf{DNI}_=$ pure

$$\vdash \forall\mathbf{x} \alpha^\circ \leftrightarrow \neg\neg\forall\mathbf{x} \alpha^\circ$$

Infine, ricordando che $(\forall\mathbf{x} \alpha)^\circ \equiv \forall\mathbf{x} \alpha^\circ$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\forall\mathbf{x} \alpha)^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\forall\mathbf{x} \alpha)^\circ$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

8. caso $\mathbf{fr} \equiv \exists\mathbf{x} \alpha$: ricordando che $(\exists\mathbf{x} \alpha)^\circ \equiv \neg\forall\mathbf{x} \neg\alpha^\circ$ la tesi segue dalla segue dalla tautologia intuizionista

$$\vdash \neg\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\neg\neg\mathbf{A}$$

ovvero da questa si conclude immediatamente che

$$\vdash (\exists\mathbf{x} \alpha)^\circ \leftrightarrow \neg\neg(\exists\mathbf{x} \alpha)^\circ$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$.

Lemma 7.11 *Per ogni formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo \mathcal{L} si ha che in logica classica $\mathbf{DNC}_=$ si deriva*

$$\vdash \mathbf{fr} \leftrightarrow \mathbf{fr}^\circ$$

Dim. Si procede per induzione sulla formazione della formula \mathbf{fr} .

1. caso $\mathbf{fr} \equiv \mathbf{tt}$ oppure $\mathbf{fr} \equiv \perp$: ricordando che

$$\mathbf{tt}^\circ \equiv \mathbf{tt} \quad \perp^\circ \equiv \perp$$

la tesi segue banalmente.

2. caso \mathbf{fr} atomica: ricordando che per definizione

$$\mathbf{fr}^\circ \equiv \neg\neg\mathbf{fr}$$

la tesi segue banalmente dalla grazie alla legge classica della doppia negazione.

3. caso $\mathbf{fr} \equiv \neg\alpha$: per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ e quindi dal lemma 3.14, grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti, ne segue che è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\alpha$$

che è la nostra tesi ricordando che $(\neg\alpha)^\circ \equiv \neg\alpha^\circ$.

4. caso $\mathbf{fr} \equiv \alpha \& \beta$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \beta$$

sono derivabili in $\mathbf{DNC}_=$, e dal lemma 3.14, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, ne segue che è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash \alpha^\circ \& \beta^\circ \leftrightarrow \alpha \& \beta$$

che è la nostra tesi ricordando che $(\alpha \& \beta)^\circ \equiv \alpha^\circ \& \beta^\circ$.

5. caso $\mathbf{fr} \equiv \alpha \rightarrow \beta$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \beta$$

sono derivabili in $\mathbf{DNC}_=$, e dal lemma 3.14, grazie al fatto che l'implicazione conserva gli equivalenti, ne segue che è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash (\alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

che è la nostra tesi ricordando che $(\alpha \rightarrow \beta)^\circ \equiv \alpha^\circ \rightarrow \beta^\circ$.

6. caso $\mathbf{fr} \equiv \alpha \vee \beta$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha \quad \vdash \beta^\circ \leftrightarrow \beta$$

sono derivabili in $\mathbf{DNC}_=$, e per il lemma 3.14 grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti ne segue che sono pure derivabili in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \neg\alpha \quad \vdash \neg\beta^\circ \leftrightarrow \neg\beta$$

Di nuovo per il lemma 3.14, grazie al fatto che la congiunzione conserva gli equivalenti, ne segue che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ \leftrightarrow \neg\alpha \& \neg\beta$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$. Ora dalla tautologia intuizionista e quindi classica

$$\vdash \neg\alpha \& \neg\beta \leftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 ne segue che

$$\vdash \neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ \leftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$. Poi per il lemma lemma 3.14, grazie al fatto che la negazione conserva gli equivalenti, si ottiene che

$$\vdash \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ) \leftrightarrow \neg\neg(\alpha \vee \beta)$$

è pure derivabile in $\mathbf{DNC}_=$. Inoltre dalla legge della doppia negazione

$$\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A}$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 ne segue che è pure derivabile in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ) \leftrightarrow \alpha \vee \beta$$

Infine, ricordando che $(\alpha \vee \beta)^\circ \equiv \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ)$ si conclude la tesi ovvero che

$$\vdash (\alpha \vee \beta)^\circ \leftrightarrow \alpha \vee \beta$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$.

7. caso $\mathbf{fr} \equiv \forall \mathbf{x} \alpha$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$. Ora per lemma 3.14, grazie al fatto che la quantificazione universale conserva gli equivalenti, si ottiene che è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash \forall \mathbf{x} \alpha^\circ \leftrightarrow \forall \mathbf{x} \alpha$$

che è la nostra tesi ricordando che $(\forall \mathbf{x} \alpha)^\circ \equiv \forall \mathbf{x} \alpha^\circ$.

8. caso $\mathbf{fr} \equiv \exists \mathbf{x} \alpha$: allora per ipotesi induttiva sappiamo che

$$\vdash \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$. Ora per lemma 3.14, grazie al fatto che la quantificazione esistenziale conserva gli equivalenti, si ottiene che è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash \exists \mathbf{x} \alpha^\circ \leftrightarrow \exists \mathbf{x} \alpha$$

Dalla tautologia classica (che si lascia da derivare al lettore!)

$$\vdash \neg\forall \mathbf{x} \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \exists \mathbf{x} \alpha^\circ$$

per la transitività delle equivalenze in lemma 3.12 ne segue che è pure derivabile in $\mathbf{DNC}_=$

$$\vdash \neg\forall \mathbf{x} \neg\alpha^\circ \leftrightarrow \exists \mathbf{x} \alpha$$

che è la nostra tesi ricordando che $(\exists \mathbf{x} \alpha)^\circ \equiv \neg\forall \mathbf{x} \neg\alpha^\circ$ ovvero concludiamo che

$$\vdash (\exists \mathbf{x} \alpha)^\circ \leftrightarrow \exists \mathbf{x} \alpha$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$.

Ora mostriamo che la doppia negazione è davvero una traduzione dei sequenti derivabili in logica classica in quella intuizionista:

Proposition 7.12 (correttezza-traduzione doppia negazione) *Per ogni sequente predicativo $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ vale che*

$$\begin{array}{c} \text{se } \Gamma \vdash \mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNC}_= \\ \text{allora} \\ \Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ \text{ è derivabile in } \mathbf{DNI}_= \end{array}$$

Dim. Si procede per induzione sulla profondità pura della derivazione in $\mathbf{DNC}_=$ di $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ che chiamiamo π .

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}}$$

di profondità \mathbf{n} .

Se $\mathbf{n} = 0$ allora il sequente $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è un'assioma identità oppure un'assioma della costante vero o dell'uguaglianza.

Se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è un'assioma identità allora

$$\Gamma \equiv \Gamma_1, \mathbf{fr}, \Gamma_2$$

e dunque pure

$$\Gamma_1^\circ, \mathbf{fr}^\circ, \Gamma_2^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$$

è un'assioma in $\mathbf{DNI}_=$ ovvero il sequente $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ e questa è la nostra tesi. Se invece $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è un'assioma del vero allora

$$\mathbf{fr} \equiv \mathbf{tt}$$

e dunque ricordando che

$$\mathbf{tt}^\circ \equiv \mathbf{tt}$$

segue per l'assioma del vero in $\mathbf{DNI}_=$ che $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{tt}^\circ$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ come richiesto dalla tesi. Se invece $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è un'assioma dell'uguaglianza

$$\mathbf{fr} \equiv \mathbf{t} = \mathbf{t}$$

ricordando che l'uguaglianza è un predicato atomico e che quindi

$$(\mathbf{t} = \mathbf{t})^\circ \equiv \neg\neg(\mathbf{t} = \mathbf{t})$$

si lascia come esercizio al lettore di dimostrare che è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ il sequente

$$\Gamma^\circ \vdash \neg\neg(\mathbf{t} = \mathbf{t})$$

ossia è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ il sequente $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ come richiesto dalla tesi.

Se invece $\mathbf{n} \geq 1$ allora esiste una derivazione

$$\frac{\pi}{\Gamma \vdash \mathbf{f}}$$

di profondità \mathbf{n} che termina con l'applicazione di una regola del calcolo avente delle premesse. Per dimostrare la nostra tesi analizzare le varie possibilità con cui la derivazione può concludersi.

Caso ultima regola $\&-S_{n_1}$ ovvero π è della forma

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}}{\Gamma \vdash \alpha} \&-S_{n_1}$$

con una derivazione π' in $\mathbf{DNC}_=$. In tal caso si applica l'ipotesi induttiva alla derivazione π' e si trova una derivazione π'' in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi''}{\Gamma^\circ \vdash (\alpha \& \beta)^\circ}$$

Ora ricordando che

$$(\alpha \& \beta)^\circ \equiv \alpha^\circ \& \beta^\circ$$

ne segue che

$$\frac{\frac{\pi''}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ \& \beta^\circ}}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ} \&-Sn_1$$

è una derivazione in $\mathbf{DNI}_=$ di $\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ ovvero di $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ come richiesto dalla tesi.

In tutti i casi in cui π' si conclude con le altre regole del connettivo congiunzione o con le regole dell'implicazione, della negazione o della quantificazione universale si dimostra la tesi in modo completamente analogo in quanto la traduzione della doppia negazione traduce questi connettivi e quantificatori in se stessi e commuta con la sostituzione come mostrato in lemma 7.8. La dimostrazione della tesi in questi casi è lasciata al lettore come esercizio.

Diversi sono i casi in cui π' si conclude con le regole della disgiunzione o della quantificazione esistenziale o dell'uguaglianza o la regola di *ra* e di questi casi diamo una dimostrazione della tesi in dettaglio qui di seguito.

caso ultima-regola \vee -Sn

In tal caso procediamo supponendo che π sia della forma

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma, \alpha \vdash \mathbf{fr}} \quad \frac{\pi_3}{\Gamma, \beta \vdash \mathbf{fr}}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \vee-Sn$$

Ora applicando l'ipotesi induttiva alle derivazioni π_1 e π_2 e π_3 otteniamo le seguenti derivazioni in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi_1}{\Gamma^\circ \vdash (\alpha \vee \beta)^\circ} \quad \frac{\pi_2'}{\Gamma^\circ, \alpha^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ} \quad \frac{\pi_3'}{\Gamma^\circ, \beta^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ}$$

Poi ricordando che

$$(\alpha \vee \beta)^\circ \equiv \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ)$$

allora π_1 è della forma

$$\frac{\pi_1}{\Gamma^\circ \vdash \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ)}$$

Quindi otteniamo la seguente derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma^\circ \vdash \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ)}}{\Gamma^\circ, \neg\mathbf{fr}^\circ \vdash \neg(\neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ)} \text{ in}_{sx} \quad \frac{\frac{\pi_4}{\Gamma^\circ, \neg\mathbf{fr}^\circ \vdash \neg\alpha^\circ} \quad \frac{\pi_5}{\Gamma^\circ, \neg\mathbf{fr}^\circ \vdash \neg\alpha^\circ}}{\Gamma^\circ, \neg\mathbf{fr}^\circ \vdash \neg\alpha^\circ \& \neg\beta^\circ} \&-D}{\frac{\Gamma^\circ, \neg\mathbf{fr}^\circ \vdash \perp}{\Gamma^\circ \vdash \neg\neg\mathbf{fr}^\circ} \neg-D} \neg-Sn$$

ove le derivazione π_4 e π_5 in $\mathbf{DNI}_=$ possono essere ottenute come segue.

La derivazione π_4 può essere ottenuta in tal modo

$$\frac{\frac{\frac{\pi'_2}{\Gamma^\circ, \alpha^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ}}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ \rightarrow \mathbf{fr}^\circ} \rightarrow -D \quad \frac{\pi_6}{\alpha^\circ \rightarrow \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \alpha^\circ}}{\frac{\Gamma^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \alpha^\circ}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \alpha^\circ} \text{ in}_{sx}} \text{ comp} \rightarrow -Sn$$

e si lascia al lettore di derivare π_6 in $\mathbf{DNI}_=$ da una nota tautologia intuizionista. La derivazione π_5 si ottiene in modo analogo alla π_4 in tal modo

$$\frac{\frac{\frac{\pi'_3}{\Gamma^\circ, \beta^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ}}{\Gamma^\circ \vdash \beta^\circ \rightarrow \mathbf{fr}^\circ} \rightarrow -D \quad \frac{\pi'_6}{\beta^\circ \rightarrow \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \beta^\circ}}{\frac{\Gamma^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \beta^\circ}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \beta^\circ} \text{ in}_{sx}} \text{ comp} \rightarrow -Sn$$

e si lascia al lettore di derivare π'_6 in $\mathbf{DNI}_=$.

Infine, applicando il lemma 3.13 al fatto che vale la legge della doppia negazione per le formule \mathbf{fr}° , come dimostrato nel lemma 7.10, dalla derivabilità in $\mathbf{DNI}_=$ di $\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \mathbf{fr}^\circ$ sopra ottenuta concludiamo che $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ come richiesto dalla tesi.

caso ultima-regola \vee -Dn₁

In tal caso procediamo supponendo che π sia della forma

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \exists\text{-Dn}$$

Applicando l'ipotesi induttiva alla derivazione π_1 otteniamo la seguente derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ}$$

che possiamo usare per ottenere quest'altra derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ} \quad \frac{\pi_2}{\alpha^\circ \vdash \neg(\neg \alpha^\circ \ \& \ \neg \beta^\circ)}}{\Gamma^\circ \vdash \neg(\neg \alpha^\circ \ \& \ \neg \beta^\circ)} \text{ comp}$$

ove π_2 si lascia da derivare in $\mathbf{DNI}_=$ al lettore come esercizio. Infine ricordando che

$$(\alpha \vee \beta)^\circ \equiv \neg(\neg \alpha^\circ \ \& \ \neg \beta^\circ)$$

concludiamo che $\Gamma^\circ \vdash (\alpha \vee \beta)^\circ$ è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ come richiesto dalla tesi.

Nel caso in cui l'ultima regola di π sia \vee -Dn₂ si procede in modo del tutto analogo al caso in cui l'ultima regola sia \vee -Dn₁ e la dimostrazione della tesi in tal caso è lasciata al lettore.

caso ultima-regola \exists -S

In tal caso procediamo supponendo che π sia della forma

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{y} \alpha} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma, \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}] \vdash \mathbf{fr}}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \exists\text{-Sn}$$

con \mathbf{w} variabile NON libera nel sequente di partenza

$$\Gamma \vdash \mathbf{fr}$$

su cui agisce l' applicazione di $\exists\text{-Sn}$ e π_1 e π_2 siano derivazioni in $\mathbf{DNC}_=$. Ora applicando l'ipotesi induttiva alle derivazioni π_1 e π_2 otteniamo le seguenti derivazioni in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi_1}{\Gamma^\circ \vdash (\exists \mathbf{y} \alpha)^\circ} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma^\circ, \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ}$$

Poi si osservi che dalla definizione della traduzione della doppia negazione otteniamo per il lemma 7.8

$$\alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ \equiv (\alpha)^\circ[\mathbf{y}/\mathbf{w}]$$

e ricordando che

$$(\exists \mathbf{y} \alpha)^\circ \equiv \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ$$

allora π_1 è della forma

$$\frac{\pi_1}{\Gamma^\circ \vdash \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ}$$

Quindi otteniamo questa derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma^\circ \vdash \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ}}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ} \text{in}_{sx} \quad \frac{\frac{\pi_3}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ}}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ} \forall\text{-D}}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \perp} \neg\text{-Sn}}{\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \mathbf{fr}^\circ} \neg\text{-D}$$

ove l'applicazione della regola $\forall\text{-D}$ è corretta perchè \mathbf{w} NON compare libera in $\Gamma^\circ \vdash \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ$ perchè per ipotesi non compariva libera in $\Gamma \vdash \exists \mathbf{y} \alpha$ e la *traduzione della doppia negazione NON cambia le occorrenze delle variabili nè libere nè vincolate*.

Invece la derivazione π_3 è ottenuta come segue

$$\frac{\frac{\frac{\pi'_2}{\Gamma^\circ, \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ}}{\Gamma^\circ \vdash \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ \rightarrow \mathbf{fr}^\circ} \rightarrow\text{-D} \quad \frac{\pi_4}{\alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ \rightarrow \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ} \text{comp}}{\Gamma^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ} \text{comp}}{\frac{\frac{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \mathbf{fr}^\circ \rightarrow \neg \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ} \text{in}_{sx}}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \neg \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{w}]^\circ} \rightarrow\text{-Sn}}$$

e si lascia al lettore di derivare in $\mathbf{DNI}_=$ π_4 da una nota tautologia intuizionista.

Infine, applicando il lemma 3.13 al fatto che vale la legge della doppia negazione per le formule \mathbf{fr}° , come dimostrato nel lemma 7.10, dalla derivabilità in $\mathbf{DNI}_=$ di $\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \mathbf{fr}^\circ$ sopra ottenuta concludiamo che $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ come richiesto dalla tesi.

caso ultima-regola $\exists\text{-Dn}$

In tal caso procediamo supponendo che π sia della forma

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{t}]}}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{y} \alpha} \exists\text{-Dn}$$

Applicando l'ipotesi induttiva alla derivazione π_1 otteniamo la seguente derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ \vdash \alpha[\mathbf{y}/\mathbf{t}]^\circ}$$

Ora si osservi che dal lemma 7.8 sappiamo che vale

$$\alpha[\mathbf{y}/\mathbf{t}]^\circ \equiv \alpha^\circ[\mathbf{y}/\mathbf{t}]$$

e quindi otteniamo in $\mathbf{DNI}_=$ la seguente derivazione

$$\frac{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ[\mathbf{y}/\mathbf{t}] \quad \frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ[\mathbf{y}/\mathbf{t}]^\circ} \quad \frac{\pi_2}{\alpha^\circ[\mathbf{y}/\mathbf{t}] \vdash \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ}}{\Gamma^\circ \vdash \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ} \text{ comp}$$

ove π_2 si lascia da derivare in $\mathbf{DNI}_=$ al lettore come esercizio. Infine ricordando che

$$(\exists \mathbf{y} \alpha)^\circ \equiv \neg \forall \mathbf{y} \neg \alpha^\circ$$

concludiamo che $\Gamma^\circ \vdash (\exists \mathbf{y} \alpha)^\circ$ è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ come richiesto dalla tesi.

caso ultima-regola =-Sn

In tal caso procediamo supponendo che $\mathbf{fr} \equiv \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{s}]$ e che π sia della forma

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{s}} \quad \frac{\pi_2}{\Gamma \vdash \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}}{\Gamma \vdash \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{s}]} = -\text{Sn}$$

Ora applicando l'ipotesi induttiva alle derivazioni π_1 e π_2 otteniamo le seguenti derivazioni in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ \vdash (\mathbf{t} = \mathbf{s})^\circ} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma^\circ \vdash \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{t}]^\circ}$$

Poi ricordando che

$$(\mathbf{t} = \mathbf{s})^\circ \equiv \neg \neg \mathbf{t} = \mathbf{s}$$

e che per il lemma 7.8

$$\alpha[\mathbf{x}/\mathbf{t}]^\circ \equiv \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \quad \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{s}]^\circ \equiv \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{s}]$$

le derivazioni π'_1 e π'_2 sopra coincidono con queste derivazioni in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \mathbf{t} = \mathbf{s}} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}$$

Quindi possiamo costruire la seguente derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \mathbf{t} = \mathbf{s}} \quad \frac{\pi'_2}{\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}}{\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \mathbf{t} = \mathbf{s} \ \& \ \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{t}]} \ \&-D \quad \frac{\pi_2}{\neg \neg (\mathbf{t} = \mathbf{s}) \ \& \ \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \neg \neg \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{s}]} \text{ comp}$$

ove π_2 si lascia da derivare in $\mathbf{DNI}_=$ al lettore come esercizio.

Infine applicando il lemma 3.13 al fatto che vale la legge della doppia negazione per le formule \mathbf{fr}° , come dimostrato nel lemma 7.10, dalla derivabilità in $\mathbf{DNI}_=$ di $\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{s}]$ sopra ottenuta concludiamo che $\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ[\mathbf{x}/\mathbf{s}]$ è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ ovvero che è derivabile $\Gamma^\circ \vdash \alpha[\mathbf{x}/\mathbf{s}]^\circ$ come richiesto dalla tesi.

caso *ultima-regola* -ra

In tal caso procediamo supponendo che π sia della forma

$$\frac{\frac{\pi_1}{\Gamma, \neg \mathbf{fr} \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \mathbf{fr}} \text{ra}$$

Applicando l'ipotesi induttiva alla derivazione π_1 otteniamo la seguente derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ, (\neg \mathbf{fr})^\circ \vdash \perp^\circ}$$

e ricordando che

$$\perp^\circ \equiv \perp \quad (\neg \mathbf{fr})^\circ \equiv \neg \mathbf{fr}^\circ$$

otteniamo quindi che la derivazione sopra coincide con la seguente

$$\frac{\pi'_1}{\Gamma^\circ, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \perp}$$

e da questa otteniamo la seguente derivazione in $\mathbf{DNI}_=$

$$\frac{\frac{\pi'_1}{\Gamma, \neg \mathbf{fr}^\circ \vdash \perp}}{\Gamma \vdash \neg \neg \mathbf{fr}^\circ} \neg\text{-D}$$

Ora applicando il lemma 3.13 al fatto che vale la legge della doppia negazione per le formule \mathbf{fr}° , come dimostrato nel lemma 7.10, dalla derivabilità in $\mathbf{DNI}_=$ di $\Gamma^\circ \vdash \neg \neg \mathbf{fr}^\circ$ sopra ottenuta concludiamo che $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ è pure derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ come richiesto dalla tesi.

Concludiamo enunciando il teorema della doppia negazione:

Theorem 7.13 (doppia-negazione di Gödel) *Per ogni formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo \mathcal{L} si ha che*

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNC}_= \\ \text{sse} \\ \Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ \text{ è derivabile in } \mathbf{DNI}_= \end{array}$$

Dim. Il fatto che, se $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ allora $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$, è stato dimostrato in proposizione 7.12.

Invece, se $\Gamma^\circ \vdash \mathbf{fr}^\circ$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ lo è anche in $\mathbf{DNC}_=$ e pure in $\mathbf{LC}_=$ per il teorema 5.57. Inoltre per la proposizione 5.36, sappiamo che $\vdash (\Gamma^\circ)^\& \rightarrow \mathbf{fr}^\circ$ è pure derivabile in $\mathbf{LC}_=$ e quindi per l'equivalenza dei calcoli in $\mathbf{DNC}_=$.

Ora ricordando che

$$(\Gamma^\& \rightarrow \mathbf{fr})^\circ \equiv (\Gamma^\circ)^\& \rightarrow \mathbf{fr}^\circ$$

dal lemma 7.11 ne segue che è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ il seguente

$$\vdash ((\Gamma^\circ)^\& \rightarrow \mathbf{fr}^\circ) \leftrightarrow (\Gamma^\& \rightarrow \mathbf{fr})$$

Poi applicando a questo seguente il lemma 3.13 dalla derivabilità in $\mathbf{DNC}_=$ di

$$\vdash (\Gamma^\circ)^\& \rightarrow \mathbf{fr}^\circ$$

si conclude che $\vdash \Gamma^\& \rightarrow \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ e per l'equivalenza dei calcoli pure in $\mathbf{LC}_=$. Infine per il lemma 5.36 si conclude che $\Gamma \vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ e quindi in $\mathbf{DNC}_=$.

Concludiamo infine con il teorema di Glivenko e un suo corollario.

Theorem 7.14 [Glivenko] Per ogni formula \mathbf{fr} di un linguaggio **proposizionale** \mathcal{L} (ovvero senza quantificatori) si ha che

$$\begin{aligned} & \vdash \mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNC}_= \\ & \quad \text{sse} \\ & \vdash \neg\neg\mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNI}_= \end{aligned}$$

Dim. Dal teorema della doppia negazione 7.13 segue che

$$\begin{aligned} & \vdash \mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNC}_= \\ & \quad \text{sse} \\ & \vdash \mathbf{fr}^\circ \text{ è derivabile in } \mathbf{DNI}_= \end{aligned}$$

Ora dal lemma 7.9 e dal lemma 3.13 otteniamo che

$$\begin{aligned} & \vdash \mathbf{fr}^\circ \text{ è derivabile in } \mathbf{DNI}_= \\ & \quad \text{sse} \\ & \vdash \neg\neg\mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNI}_= \end{aligned}$$

da cui si conclude la tesi.

Corollary 7.15 Per ogni formula \mathbf{fr} di un linguaggio **proposizionale** \mathcal{L} (ovvero senza quantificatori) si ha che

$$\begin{aligned} & \vdash \neg\mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNC}_= \\ & \quad \text{sse} \\ & \vdash \neg\mathbf{fr} \text{ è derivabile in } \mathbf{DNI}_= \end{aligned}$$

Dim. Se $\vdash \neg\mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ allora per il teorema di Glivenko 7.14 $\vdash \neg\neg\neg\mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$, da cui per il lemma 3.13 applicato alla tautologia intuizionista $\vdash \neg\neg\neg\mathbf{fr} \leftrightarrow \neg\mathbf{fr}$ segue che $\vdash \neg\mathbf{fr}$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$. Questo ovviamente basta per concludere la tesi del corollario visto che ogni tautologia intuizionista è pure classica.

Osservazione: Dal corollario 7.15 si conclude che *non esistono contraddizioni (o paradossi) proposizionali classici che non siano pure intuizionisti!*. Invece il teorema di Glivenko non vale per formule in linguaggio predicativo. Un controesempio è dato dalla formula

$$\forall \mathbf{x} \neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\neg\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

che è chiaramente una tautologia classica ma NON è una tautologia intuizionista assieme alla sua doppia negazione. Ovvero la formula

$$\neg(\forall \mathbf{x} \neg\neg\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\neg\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))$$

è una **contraddizione classica ma NON intuizionista!** (lo si dimostri per esercizio).

8 Semantica della logica classica e intuizionista

Scopo di queste sezioni è di introdurre un concetto di *modello* di una formula che useremo per definire *quando una formula di un linguaggio è vera rispetto ad una certa logica*. Il concetto di modello e di verità di una formula in un modello ci permetteranno di introdurre una nozione di *verità semantica di una formula rispetto ad una certa logica in modo indipendente* dalla nozione di *verità sintattica (o formale)* già introdotta sia per la logica classica che per la logica intuizionista in termini di *derivabilità* della formula rispetto ad un calcolo logico che rappresenta la logica in considerazione. L'idea è di usare la nozione di modello per una logica L al fine di introdurre le seguenti definizioni per una qualsiasi formula **fr** del linguaggio formale di L

fr è **TAUTOLOGIA SEMANTICA** della logica L, o **valida semanticamente** se **fr** è vera in OGNI modello di L,

fr è **OPINIONE SEMANTICA** della logica L se esiste un modello di L in cui **fr** NON è vera ed esiste un modello di L in cui pure la sua negazione \neg **fr** NON è vera,

fr è **PARADOSSO (o CONTRADDIZIONE) SEMANTICO** della logica L se la sua negazione \neg **fr** è vera in ogni modello di L (e quindi NON esiste un modello cui **fr** è vera).

In particolare chiameremo

contromodello di fr = un modello in cui **fr** NON è vera.

Quindi avremo i seguenti due tipi di concetti a disposizione:

verità formale di L tramite derivazione	verità semantica di L tramite modello
fr è vera formalmente ossia è tautologia formale sse \vdash fr è derivabile in un calcolo formale	fr è vera semanticamente ossia è tautologia semantica sse fr è vera in OGNI modello

Il nostro scopo sarà poi mostrare che i concetti semantici coincidono con quelli formali già introdotti in relazione ad un calcolo formale di L, ovvero che

TAUTOLOGIA SEMANTICA della logica L	=	TAUTOLOGIA FORMALE del calcolo di della logica L
OPINIONE SEMANTICA della logica L	=	OPINIONE FORMALE del calcolo di della logica L
PARADOSSO SEMANTICO della logica L	=	PARADOSSO FORMALE del calcolo di della logica L

Raggiungeremo il nostro obiettivo mostrando i seguenti teoremi relativamente ad una logica L:

Teorema di validità per L rispetto ai suoi modelli: Se **fr** è derivabile nel calcolo formale di L, ovvero è una tautologia formale di L, allora **fr** è tautologia semantica di L, ovvero è valida semanticamente.

Teorema di completezza per L rispetto ai suoi modelli: Se \mathbf{fr} è una tautologia semantica, ovvero è valida semanticamente, allora è pure derivabile nel calcolo formale di L , ovvero è una tautologia formale di L .

Da cui concluderemo:

Teorema di validità e completezza per L rispetto ai suoi modelli: Per una formula \mathbf{fr} all'interno di un linguaggio L il concetto di validità formale coincide con quello di validità semantica.

Utilità pratica: Per vedere se una formula \mathbf{fr} è opinione per L basta trovare un *contromodello* per \mathbf{fr} e un *contromodello* per $\neg\mathbf{fr}$. La ricerca di una derivazione di \mathbf{fr} nei calcoli alla Gentzen nel caso di *NON* derivabilità di \mathbf{fr} fornirà informazioni importanti per costruire il contromodello di \mathbf{fr} .

In particolare, la ricerca di una derivazione di \mathbf{fr} in $\mathbf{LC}_=$ fornirà una procedura semi-decidibile per costruire un contromodello di \mathbf{fr} che sarà molto utile specie nel caso in cui la non derivabilità di \mathbf{fr} in $\mathbf{LC}_=$ segua da una ripetizione all'infinito di sequenti equivalenti e non derivabili.

Cosa faremo. Nel seguito andiamo prima a definire una nozione di modello per la logica classica proposizionale in termini di valutazioni classiche bivalenti, che si mostrerà equivalente alla nozione di verità semantica delle tabelle di verità.

Successivamente andremo a definire una nozione di modello per la logica intuizionista proposizionale in termini di valutazioni in un'algebra di Heyting e accenneremo anche all'esistenza di una generalizzazione della nozione di modello per la logica classica proposizionale in termini di valutazioni in un'algebra di Boole.

Poi passeremo ad estendere entrambe le nozioni di valutazioni per le logiche proposizionali alle corrispondenti logiche predicative.

8.1 Validità e completezza della logica classica proposizionale rispetto alla semantica classica bivalente

In questa sezione andiamo a mostrare quanto esposto sopra restringendo la nostra attenzione alla logica classica proposizionale di cui abbiamo già introdotto il concetto di tautologia, opinione e paradosso formale riferendoci al calcolo dei sequenti alla Gentzen \mathbf{LC}_p o equivalentemente a quello della deduzione naturale \mathbf{DNC}_p .

Trattiamo dapprima la semantica della logica classica proposizionale anzichè dell'intera logica predicativa, e così faremo anche per la logica intuizionista, perchè è più semplice definire la *semantica delle proposizioni formali della logica classica proposizionale* in termini di modelli che chiameremo *valutazioni classiche bivalenti proposizionali* o semplicemente *valutazioni classiche*.

Nel definire i concetti qui faremo attenzione di dare le definizioni aggiungendo l'aggettivo *proposizionale* per distinguerle dalla loro versione predicativa che daremo in seguito. L'aggettivo *classico* attribuito alle valutazioni e alla semantica serve per indicare che ci riferiamo a nozioni relative alla sola logica classica. L'aggettivo *bivalente* aggiunto alle nozioni di valutazione e quando parliamo di semantica è solo un rafforzativo del tipo di valutazione che daremo.

Vedremo infine come la semantica classica definita tramite le valutazioni classiche bivalenti delle proposizioni formali si collega con la cosiddetta semantica delle tabelle di verità.

Cominciamo con l'introdurre un linguaggio proposizionale a partire da una collezione di sole variabili proposizionali.

Def. 8.1 (proposizioni formali di un linguaggio proposizionale) Sia \mathcal{L} un linguaggio proposizionale definito da una collezione di *variabili proposizionali* $Var_{prop} \equiv \{V_1, \dots, V_n, \dots\}$ anche infinita che indichiamo con lettere maiuscole dell'alfabeto italiano. L'insieme $PROP(\mathcal{L})$ delle formule proposizionali, o meglio dette *proposizioni* \mathbf{pr} di \mathcal{L} , è il più piccolo insieme chiuso sulle seguenti clausole (ovvero induttivamente generato dalle seguenti clausole):

- una qualsiasi variabile proposizionale $V \in Var_{prop}$ è una proposizione di $PROP(\mathcal{L})$;
- la costante falso \perp è una proposizione di $PROP(\mathcal{L})$;

- la costante vero \mathbf{tt} è una proposizione di $PROP(\mathcal{L})$;
- date altre due generiche proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 in $PROP(\mathcal{L})$ allora $(\mathbf{pr}_1)\&(\mathbf{pr}_2)$ è una proposizione in $PROP(\mathcal{L})$;
- date altre due generiche proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 in $PROP(\mathcal{L})$ allora $(\mathbf{pr}_1)\vee(\mathbf{pr}_2)$ è una proposizione in $PROP(\mathcal{L})$;
- date altre due generiche proposizioni \mathbf{pr}_1 e \mathbf{pr}_2 in $PROP(\mathcal{L})$ allora $(\mathbf{pr}_1)\rightarrow(\mathbf{pr}_2)$ è una proposizione in $PROP(\mathcal{L})$;
- data una generica proposizione \mathbf{pr} in $PROP(\mathcal{L})$ allora $\neg(\mathbf{pr})$ è una proposizione in $PROP(\mathcal{L})$.

Ricordiamo che nello scrivere le proposizioni simboliche CONVENIAMO che \neg si lega alla formula più vicina più di ogni altro connettivo senza bisogno di parentesi, seguito a pari merito da $\vee, \&$, che a loro volta sono legate alle formule più di \rightarrow .

Ovvero

$$\neg \quad \text{lega più di} \quad \vee, \& \quad \text{lega più di} \quad \rightarrow$$

Diamo ora il concetto di *modello* di un linguaggio proposizionale in termini di *valutazione classica bivalente proposizionale*:

Def. 8.2 (Valutazione classica bivalente) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} con una classe Var_{prop} di variabili proposizionali una *valutazione classica bivalente proposizionale* o semplicemente *valutazione classica proposizionale* è una funzione

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

ove $\{0, 1\}$ si pensa un insieme ordinato con $0 \leq 1$ tale che

$$\begin{aligned} \nu(\perp) &= 0 \\ \nu(\mathbf{tt}) &= 1 \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2) &= \min\{\nu(\mathbf{pr}_1), \nu(\mathbf{pr}_2)\} \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2) &= \max\{\nu(\mathbf{pr}_1), \nu(\mathbf{pr}_2)\} \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) &= \max\{1 - \nu(\mathbf{pr}_1), \nu(\mathbf{pr}_2)\} \\ \nu(\neg \mathbf{pr}_1) &= 1 - \nu(\mathbf{pr}_1) \end{aligned}$$

Importante: Secondo la valutazione classica proposizionale una formula è *vera* oppure *falsa* nel senso che vale la cosiddetta proprietà della BIVALENZA

in una valutazione classica bivalente proposizionale
 $\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$
 \mathbf{pr} *NON* è vera per ν , ossia $\nu(\mathbf{pr}) \neq 1$
 sse
 \mathbf{pr} è falsa per ν , ossia $\nu(\mathbf{pr}) = 0$

Def. 8.3 (modello classico di una proposizione) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , chiamiamo *modello classico bivalente proposizionale* di una proposizione \mathbf{pr} , o in breve *modello classico*, una valutazione classica bivalente proposizionale

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

che rende vera \mathbf{pr} , ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{pr}) = 1$.

Def. 8.4 (contromodello classico di una proposizione) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , chiamiamo *contromodello classico bivalente proposizionale* di una proposizione \mathbf{pr} , o in breve semplicemente *contromodello classico*, una valutazione classica bivalente proposizionale che rende **falsa** \mathbf{pr} , ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{pr}) = 0$.

Def. 8.5 (modello classico bivalente proposizionale di un sequente) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} diciamo che:

una *valutazione classica bivalente proposizionale*
 $\nu : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \rightarrow \{0, 1\}$
rende *vero* un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ nel linguaggio proposizionale \mathcal{L}
se e solo se
la valutazione ν rende vero il significato di $\Gamma \vdash \Delta$
ovvero risulta che $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}) = 1$.

Def. 8.6 (classificazione della verità semantica di una proposizione) Data una proposizione pr di un linguaggio L

pr è **TAUTOLOGIA SEMANTICA** o **VALIDA** nella semantica classica bivalente proposizionale
se pr è vera in OGNI modello,
ovvero pr è vera in ogni valutazione classica bivalente proposizionale,
(e indichiamo con $\models \text{pr}$ questo fatto);
 pr è **SODDISFACIBILE** nella semantica classica bivalente proposizionale
se pr è vera in almeno un modello classico,
ovvero pr è vera per qualche valutazione classica bivalente proposizionale;

pr è **NON VALIDA** nella semantica classica bivalente proposizionale
se pr NON è vera in qualche modello classico,
ovvero esiste una valutazione classica bivalente proposizionale ν per cui si ha $\nu(\text{pr}) = 0$;

pr è **INSODDISFACIBILE** o **PARADOSSO** nella semantica classica bivalente proposizionale
se pr NON è vera in TUTTI i modelli classici,
ovvero per ogni valutazione classica bivalente proposizionale ν si ha che $\nu(\text{pr}) = 0$.

e poi poniamo che

pr è **TAUTOLOGIA** nella semantica classica bivalente proposizionale
se pr è vera in OGNI modello classico

pr è **OPINIONE** nella semantica classica bivalente proposizionale
se pr è vera in almeno un modello e falsa in almeno un modello classico,

pr è **PARADOSSO** nella semantica classica bivalente proposizionale
se pr è falsa in TUTTI i modelli classici.

Def. 8.7 (classificazione della verità di un sequente rispetto alla semantica classica di un sequente)
UN sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in un linguaggio proposizionale L
si dice **valido/soddisfacibile/NON valido/Insoddisfacibile/opinione/paradosso** rispetto alla *semantica classica bivalente proposizionale* se e solo se lo è la formula $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ che rappresenta il suo significato.

Osservazione Grazie alla bivalenza delle valutazioni le definizioni sopra coincidono con quelle date all'inizio del capitolo in quanto una proposizione pr NON è vera in un modello dato da una valutazione classica bivalente sse pr è falsa nel modello in questione e la sua negazione $\neg \text{pr}$ è vera nel modello.

Si noti che la valutazione di una proposizione dipende solo dalla valutazione delle sue variabili proposizionali:

Lemma 8.8 Date una proposizione pr e date due valutazioni classiche proposizionali

$$\nu_1 : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\} \quad \nu_2 : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

se per ogni variabile proposizionale \mathbf{V}_k che occorre in pr si ha che $\nu_1(\mathbf{V}_k) = \nu_2(\mathbf{V}_k)$ allora $\nu_1(\text{pr}) = \nu_2(\text{pr})$.

Dato che la valutazione classica bivalente di una proposizione dipende solo dalla valutazione delle sue variabili proposizionali OGNI valutazione classica bivalente ESTENDE in modo unico una data valutazione delle sue variabili proposizionali.

Theorem 8.9 (estensione di valutazione di variabili) *Ogni funzione*

$$\xi : \mathbf{Var}_{\text{prop}} \longrightarrow \{0, 1\}$$

si estende in modo unico ad una valutazione

$$\nu_\xi : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

tale che

$$\nu_\xi \cdot \mathbf{i} = \xi$$

ovvero

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Var}_{\text{prop}} & \xrightarrow{\xi} & \{0, 1\} \\ \downarrow \mathbf{i} & \nearrow \exists! \nu_\xi & \\ \mathbf{Prop}(\mathcal{L}) & & \end{array}$$

Dim. La valutazione di una proposizione è per definizione univocamente determinata da quella delle sue variabili proposizionali (vedi anche lemma 8.8).

Osservazione Nel seguito grazie al teorema 8.9 definiremo una valutazione classica bivalente semplicemente definendola sulle variabili proposizionali.

Def. 8.10 (validità classica bivalente proposizionale di regola ad una premessa) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

si dice **valida** rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale se OGNI valutazione classica

$$\nu : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

che rende vero il sequente

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$$

ovvero che soddisfa $\nu(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) = 1$, rende vero pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

ovvero soddisfa $\nu(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) = 1$

Def. 8.11 (validità classica bivalente proposizionale di regola a due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

si dice **valida** rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale

se OGNI valutazione classica

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

che rende veri ENTRAMBI i sequente

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

ovvero che soddisfa $\nu(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) = 1$ e $\nu(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) = 1$, rende vero pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \Delta_3$$

ovvero soddisfa $\nu(\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee}) = 1$.

Nel seguito per mostrare che una valutazione rende vera un'implicazione useremo senza citarlo il seguente lemma:

Lemma 8.12 *Data una valutazione classica bivalente proposizionale ν di una linguaggio proposizionale \mathcal{L} e due proposizioni $\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2$, se nel caso valga $\nu(\mathbf{pr}_1) = 1$ si ha pure che vale $\nu(\mathbf{pr}_2) = 1$ allora $\nu(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) = 1$.*

Dim. La valutazione rende vera o falsa \mathbf{pr}_1 . Nel caso che $\nu(\mathbf{pr}_1) = 0$ allora sicuramente $\nu(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) = 1$. Anche nel caso $\nu(\mathbf{pr}_1) = 1$ allora $\nu(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) = 1$ perchè in tal caso per ipotesi vale $\nu(\mathbf{pr}_2) = 1$.

Innanzitutto dimostriamo che tutte le regole di \mathbf{LC}_p sono valide:

Theorem 8.13 (validità delle regole \mathbf{LC}_p) *Tutti gli assiomi di \mathbf{LC}_p sono tautologie semantiche bivalenti e TUTTE le regole di \mathbf{LC}_p sono valide rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale.*

Dim.

1. L'assioma identità

$$\begin{array}{c} \mathbf{ax-id} \\ \Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A, \Delta_2 \end{array}$$

è valido perchè vale

$$\models (\Gamma_1^{\&} \& A) \& \Gamma_2^{\&} \rightarrow (\Delta_1^{\vee} \vee A) \vee \Delta_2^{\vee}$$

Infatti data una qualsiasi valutazione ν si ha che $\nu((\Gamma_1^{\&} \& A) \& \Gamma_2^{\&}) = 1$ allora $\nu(A) = 1$ e quindi pure $\nu((\Delta_1^{\vee} \vee A) \vee \Delta_2^{\vee}) = 1$ e dunque per il lemma 8.12 la valutazione ν considerata rende vero l'assioma. L'arbitrarietà della valutazione ci permette di concludere che l'assioma è valido nella semantica classica.

2. L'assioma del falso

$$\begin{array}{c} \mathbf{ax-\perp} \\ \Gamma_1, \perp, \Gamma_2 \vdash \nabla \end{array}$$

è valido perchè ogni valutazione di

$$(\Gamma_1^{\&} \& \perp) \& \Gamma_2^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$$

assegna **0** a $(\Gamma_1^{\&} \& \perp) \& \Gamma_2^{\&}$ e quindi **1** alla proposizione implicativa.

3. La regola di *scambio a sinistra*

$$\frac{\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta \vdash \nabla}{\Sigma, \Gamma_2, \Theta, \Gamma_1, \Delta \vdash \nabla} \text{sc}_{\text{sx}}$$

è valida poichè ogni valutazione ν che soddisfa $\nu(((\Sigma^{\&} \& \Gamma_1^{\&}) \& \Theta^{\&}) \& \Gamma_2^{\&}) \& \Delta^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}) = 1$ e che soddisfa pure $\nu((\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta)^{\&}) = 1$ soddisfa pure $\nu((\Sigma, \Gamma_2, \Theta, \Gamma_1, \Delta)^{\&}) = 1$ perchè il suo valore di verità è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\Sigma, \Gamma_1, \Theta, \Gamma_2, \Delta$. Quindi si conclude che $\nu(\nabla^{\vee}) = 1$ e per il lemma 8.12 si ha pure che $\nu((((\Sigma^{\&} \& \Gamma_2^{\&}) \& \Theta^{\&}) \& \Gamma_1^{\&}) \& \Delta^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}) = 1$.

4. La regola di *scambio a destra*

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla} \text{sc}_{dx}$$

è valida perchè ogni valutazione che soddisfa $\nu(\Gamma^{\&}) = 1$ e

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee) = 1$$

soddisfa pure $\nu((\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla)^\vee) = 1$ e pure $\nu((\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla)^\vee) = 1$ perchè la verità rispetto ad una valutazione è **indipendente** dall'ordine delle proposizioni in $\Sigma, \Delta_1, \Theta, \Delta_2, \nabla$. Quindi per il lemma 8.12 concludiamo che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\Sigma, \Delta_2, \Theta, \Delta_1, \nabla)^\vee) = 1$$

5. La regola della *congiunzione a dx*

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \Delta \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \Delta} \&-D$$

è valida per quanto segue.

Data una qualsiasi valutazione ν , supponiamo che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \vee \Delta)^\vee) = 1 \quad \text{e} \quad \nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{B} \vee \Delta)^\vee) = 1$$

Ora supponiamo anche che $\nu(\Gamma^{\&}) = 1$. Per la **verità** della PRIMA **premessa per la valutazione considerata** si conclude che $\nu((\mathbf{A} \vee \Delta)^\vee) = 1$ ed equivalentemente che $\nu(\mathbf{A} \vee \Delta^\vee) = 1$ perchè il valore di verità di una serie di disgiunzioni è indipendente dal loro ordine. Qui si presentano *due casi*: $\nu(\mathbf{A}) = 1$ oppure $\nu(\Delta^\vee) = 1$.

I caso $\nu(\mathbf{A})=1$. In tal caso si consideri che per la **verità** della SECONDA **premessa per la valutazione considerata** si ottiene che $\nu((\mathbf{B} \vee \Delta)^\vee) = 1$ ed equivalentemente che $\nu(\mathbf{B} \vee \Delta^\vee) = 1$ perchè il valore di verità di una serie di disgiunzioni è indipendente dal loro ordine. Qui si presentano altri due casi: $\nu(\mathbf{B}) = 1$ oppure $\nu(\Delta) = 1$. Nel sottocaso $\nu(\mathbf{B}) = 1$, assieme all'ipotesi $\nu(\mathbf{A}) = 1$ si conclude $\nu(\mathbf{A} \& \mathbf{B})=1$ e dunque $\nu((\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee \Delta)^\vee) = 1$.

Nel sottocaso $\nu(\Delta^\vee) = 1$, che coincide anche con il secondo caso sopra, si conclude lo stesso che $\nu((\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee \Delta)^\vee) = 1$.

Quindi in ogni caso per il lemma 8.12 $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow ((\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \vee \Delta)^\vee) = 1$.

6. La regola della *congiunzione a sx*

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \Delta} \&-S$$

è valida per quanto segue. Sia ν una qualsiasi valutazione che rende vera la premessa ovvero che soddisfa

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \Delta^\vee) = 1$$

e che soddisfa $\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \& \mathbf{B})) = 1$. Poi per l'indipendenza del valore di verità di una serie di congiunzioni dal loro ordine si ha che vale pure $\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}) \& \mathbf{B} = 1$ e dunque per la verità della premessa della regola rispetto a ν si conclude $\nu(\Delta^\vee) = 1$ e quindi per il lemma 8.12 pure

$$\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \& \mathbf{B}) \rightarrow \Delta^\vee) = 1$$

7. La regola di *disgiunzione a dx*

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \Delta} \vee-D$$

è valida in quanto i sequenti premessa e conclusioni si interpretano nella stessa proposizione

$$\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \Delta^\vee$$

8. La regola di *disgiunzione a sx*

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee\text{-S}$$

è valida per l'argomentazione che segue. Data una qualsiasi valutazione ν che rende vere le premesse ovvero per cui

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A} \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{B} \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$$

e per cui valga

$$\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) = \mathbf{1}$$

si ha che $\nu(\Gamma^{\&}) = \mathbf{1}$ e pure che $\nu(A \vee B) = \mathbf{1}$.

Qui abbiamo 2 casi: o $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$ oppure $\nu(\mathbf{B}) = \mathbf{1}$.

Nel caso $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$ si ha $\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ per la **verità** della PRIMA **premessa rispetto alla valutazione considerata** si ottiene che $\nu(\Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$ è $\mathbf{1}$ e dunque si conclude che

$$\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$$

Nel caso $\nu(\mathbf{B}) = \mathbf{1}$ si ha $\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e per la **verità** della SECONDA **premessa rispetto alla valutazione considerata** si ottiene che $\nu(\Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$ e dunque per il lemma 8.12 si conclude che

$$\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$$

9. La regola di *negazione a dx*

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg\text{-D}$$

è valida per quanto segue. Sia ν una qualsiasi valutazione che rende vera la premessa ovvero per cui

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A} \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$$

e che soddisfa $\nu(\Gamma^{\&}) = \mathbf{1}$. Allora ν in quanto valutazione rende vera o falsa \mathbf{A} e procediamo distinguendo i seguenti due casi:

I caso $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$. In tal caso per la **verità** dell'unica **premessa della regola rispetto alla valutazione considerata** si ottiene che $\nu(\Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$ e dunque pure $\nu(\neg \mathbf{A} \vee \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$.

II caso $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. In tal caso $\nu(\neg \mathbf{A}) = \mathbf{1}$ e quindi di nuovo $\nu(\neg \mathbf{A} \vee \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$.

Per il lemma 8.12 concludiamo che $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\neg \mathbf{A}) \vee \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$.

10. La regola della *negazione a sx*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg\text{-S}$$

è valida in quanto ogni valutazione ν che rende vera la premessa, ovvero per cui

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \vee \Delta)^{\vee}) = \mathbf{1}$$

e per cui valga $\nu(\Gamma^{\&}) = \mathbf{1}$ si ha che $\nu((\mathbf{A} \vee \Delta)^{\vee}) = \mathbf{1}$ e quindi o $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$ oppure $\nu(\Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$

I caso $\nu(A) = \mathbf{1}$. In tal caso $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ e dunque $\nu(\Gamma^{\&} \& \neg \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ e quindi pure

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \neg \mathbf{A} \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$$

II caso $\nu(\Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$. In tal caso si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \neg \mathbf{A} \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$$

per definizione di valutazione su un'implicazione.

11. La regola di *implicazione a dx*

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} \rightarrow -D$$

è valida per quanto segue. Data una qualsiasi valutazione ν che soddisfa

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta}) = \mathbf{1}$$

e anche $\nu(\Gamma^{\&}) = \mathbf{1}$ allora ν rende vera o falsa \mathbf{A} e quindi distinguiamo due casi.

I caso $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$. In tal caso per la **verità** dell'unica **premessa** della regola **sulla valutazione considerata** si ottiene che $\nu((\mathbf{B} \vee \mathbf{\Delta})^\vee) = \mathbf{1}$ e si hanno due sottocasi:

I sottocaso $\nu(\mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e quindi $\nu(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e di conseguenza si ha $\nu(((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta})^\vee) = \mathbf{1}$ in quanto il valore di verità di una serie di disgiunzioni è indipendente dall'ordine dei disgiunti.

II sottocaso $\nu(\mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$ e quindi $\nu((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$.

II caso $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ quindi $\nu(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e di conseguenza $\nu(((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta})^\vee) = \mathbf{1}$.

Per il lemma 8.12 in ogni caso e sottocaso concludiamo che $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vee \mathbf{\Delta})^\vee) = \mathbf{1}$

12. La regola dell'*implicazione a sx*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow -S$$

è valida per per quanto segue. Data una qualsiasi valutazione ν che rende vere entrambe le premesse, ovvero soddisfa

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta})^\vee) = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$$

se soddisfa pure $\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})) = \mathbf{1}$ allora soddisfa pure $\nu(\Gamma^{\&}) = \mathbf{1}$ e $\nu(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$. Poi dalla verità della prima premessa rispetto alla valutazione si ottiene che di $\nu((\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta})^\vee) = \mathbf{1}$ ed equivalentemente anche ed equivalentemente che $\nu(\mathbf{A} \vee \mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$ perchè il valore di verità di una serie di disgiunzioni è indipendente dal loro ordine. Ora distinguiamo due casi $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$ e $\nu(\mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$.

I caso $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$. Dal fatto che $\nu(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ segue che pure $\nu(\mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e quindi dalle ipotesi otteniamo che $\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e per la **verità** della **PRIMA premessa rispetto alla valutazione considerata** concludiamo che $\nu(\mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$ e per il lemma 8.12 si conclude che $\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$

II caso $\nu(\mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$. Per il lemma 8.12 si conclude che $\nu(\Gamma^{\&} \& (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee) = \mathbf{1}$.

Concludiamo dicendo che in entrambi i casi abbiamo provato che la valutazione rende vero il sequente conclusione della regola come volevasi dimostrare.

Grazie a questo teorema possiamo dimostrare il seguente:

Theorem 8.14 (teorema di validità classica di \mathbf{LC}_p) Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{LC}_p allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee$ è valida rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale, ossia $\models \Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{\Delta}^\vee$.

Dim. Segue dal teorema 8.15 considerando che dagli assiomi di una derivazione la validità in tutti i modelli classici è conservata da tutte le regole fino alla radice.

Theorem 8.15 (validità delle inverse delle regole \mathbf{LC}_p) **TUTTE** le inverse delle regole di \mathbf{LC}_p sono **valide** rispetto alla semantica classica.

Dim. Lasciata al lettore per esercizio.

Theorem 8.16 (completezza classica) Se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è valido rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale, ovvero vero in ogni valutazione, allora $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{LC}_p .

Dim. Applichiamo la procedura di decisione 5.4.2 al sequente $\Gamma \vdash \Delta$. Ora questa deve dare un albero di derivazione per cui il sequente risulta derivabile. Infatti non può dire che il sequente è NON derivabile e quindi NON valido perchè se la procedura dice che il sequente NON è derivabile allora si ferma con una foglia

$$\Gamma' \vdash \nabla'$$

che NON è un assioma. Con ciò noi possiamo trovare UNA valutazione che rende $\Gamma' \vdash \Delta'$ *falso* ponendo:

- $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$ per ogni variabile \mathbf{A} in Γ'
- $\nu(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ per ogni variabile \mathbf{B} in ∇'

e tutte le altre variabili proposizionali di L si definiscano con valori A PIACERE.

In particolare

1. se la foglia NON assioma è del tipo

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \vdash V_{k_1}, \dots, V_{k_m}$$

e quindi

$$\{ A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \} \cap \{ V_{k_1}, \dots, V_{k_m} \} = \emptyset$$

allora

OGNI valutazione con

$$\begin{array}{ll} \nu(A_{i_j}) = 1 & \nu(V_{k_j}) = 0 \\ \text{per } j = 1, \dots, n & \text{per } j = 1, \dots, m \end{array}$$

dà valore $\mathbf{0}$ alla proposizione $\Gamma'^{\&} \rightarrow \nabla'^{\vee}$;

2. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\vdash V_{k_1}, \dots, V_{k_m}$$

allora

OGNI valutazione con

$$\begin{array}{l} \nu(V_{k_j}) = 0 \\ \text{per } j = 1, \dots, m \end{array}$$

dà valore $\mathbf{0}$ al sequente $\Gamma' \vdash \nabla'$ ovvero alla proposizione $\Gamma'^{\&} \rightarrow \nabla'^{\vee}$;

3. se la foglia NON assioma è del tipo

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \vdash$$

allora

OGNI valutazione con

$$\begin{array}{l} \nu(A_{i_j}) = 1 \\ \text{per } j = 1, \dots, n \end{array}$$

dà valore $\mathbf{0}$ alla proposizione $\Gamma'^{\&} \rightarrow \nabla'^{\vee}$.

Dal fatto che esiste una valutazione che rende falso il sequente foglia $\Gamma' \vdash \nabla'$ di un albero costruito a partire dal sequente $\Gamma \vdash \Delta$ segue che questa valutazione rende *falso* pure il sequente radice $\Gamma \vdash \Delta$ contro l'ipotesi di partenza che tale sequente fosse valido.

Osservazione: Si noti che nella dimostrazione della completezza classica di \mathbf{LC}_p non abbiamo fatto uso di prove per contraddizioni che usano il principio del terzo escluso.

Theorem 8.17 (validità e completezza classica) Il concetto di DERIVABILITÀ in \mathbf{LC}_p coincide con quello di VALIDITÀ rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale, ovvero un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{LC}_p se e solo se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è tautologia semantica rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale.

In realtà la semantica classica delle valutazioni bivalenti proposizionali ha una formulazione equivalente in termini di *semantica delle tabelle di verità* che introduciamo nella prossima sezione.

8.1.1 Applicazione del teorema di validità e completezza: il teorema di eliminazione della regola di composizione

Tramite il teorema di validità e completezza possiamo dimostrare che il calcolo \mathbf{LC}_p risulta equivalente al calcolo $\mathbf{LC}_{p,c}$ ottenuto estendendo \mathbf{LC}_p con la regola di composizione che ricordiamo è

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', \text{fr}, \Delta'' \quad \Gamma, \text{fr}, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \nabla, \Delta''} \text{ comp}$$

e in questo modo otteniamo una dimostrazione del *teorema di eliminazione della composizione*, ovvero che la regola di composizione è ammissibile in \mathbf{LC}_p , che è diversa da quella della teoria della dimostrazione menzionata in 5.7.

A tal scopo si osservi che

Lemma 8.18 (validità regola composizione) La regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', \text{fr}, \Delta'' \quad \Gamma, \text{fr}, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \nabla, \Delta''} \text{ comp}$$

è valida rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale ovvero tutte le regole di $\mathbf{LC}_{p,c}$ sono valide rispetto a tale semantica classica.

Corollary 8.19 Se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{LC}_{p,c}$ allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è una tautologia semantica classica, ovvero è valida rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale, ossia $\models \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Dim. Dal lemma 8.18 sappiamo che la regola di composizione è valida rispetto alla semantica classica e lo stesso vale per tutte le regole di \mathbf{LC}_p grazie al teorema 8.14 di validità di \mathbf{LC}_p . Quindi concludiamo che tutte le regole di $\mathbf{LC}_{p,c}$ sono valide rispetto alla semantica classica e perciò una formula derivabile in $\mathbf{LC}_{p,c}$ è una tautologia semantica classica.

Theorem 8.20 Il calcolo \mathbf{LC}_p è equivalente al calcolo $\mathbf{LC}_{p,c}$ ottenuto estendendo \mathbf{LC}_p con la regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', \text{fr}, \Delta'' \quad \Gamma, \text{fr}, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \nabla, \Delta''} \text{ comp}$$

Dim. Si osservi che se $\vdash \text{fr}$ è derivabile in $\mathbf{LC}_{p,c}$ allora è una tautologia semantica classica per il teorema 8.19. Quindi per il teorema 11.130 di completezza di \mathbf{LC}_p concludiamo che $\vdash \text{fr}$ è derivabile in \mathbf{LC}_p .

Theorem 8.21 (eliminazione regola composizione) La regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', \text{fr}, \Delta'' \quad \Gamma, \text{fr}, \Gamma'' \vdash \nabla}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \nabla, \Delta''} \text{ comp}$$

è ammissibile in \mathbf{LC}_p .

Dim. Dato che il calcolo $\mathbf{LC}_{p,c}$ è equivalente al calcolo \mathbf{LC}_p per il teorema 8.20 ne segue che la regola di composizione è ammissibile in \mathbf{LC}_p .

Ricordando che il teorema di eliminazione della composizione è stato cruciale per dimostrare che il calcolo \mathbf{LC}_p è equivalente al calcolo della deduzione naturale \mathbf{DNC}_p , possiamo quindi ottenere tale equivalenza come conseguenza del teorema di validità e completezza di \mathbf{LC}_p rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale.

8.2 Tabelle di verità

Def. 8.22 Una tabella di verità è una funzione

$$f : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

rappresentabile graficamente dalla tabella

0	1	\mathbf{c}_1
0	0	\mathbf{c}_2
1	1	\mathbf{c}_3
1	0
...
...

che associa un valore IN USCITA \mathbf{c}_i che può solo essere **1** (per **vero**) oppure **0** (per **falso**) al variare delle combinazioni di valori **0** e **1**.

Def. 8.23 (Tabelle di verità delle proposizioni formali) Dato un linguaggio proposizionale L, possiamo associare ad ogni **proposizione formale** \mathbf{pr} definita in L una tabella di verità che indichiamo in tal modo

- se \mathbf{pr} non ha variabili proposizionali la tabella di verità \mathbf{pr} coincide con un numero

\mathbf{pr}
\mathbf{c}_1

- se \mathbf{pr} ha variabili proposizionali

$$\mathbf{V}_{n_1} \ \mathbf{V}_{n_2} \ \dots \ \mathbf{V}_{n_m}$$

la tabella di verità di \mathbf{pr} si indica in tal modo

V_{n_1}	V_{n_2}	...	V_{n_m}	\mathbf{pr}
0	1	\mathbf{c}_1
0	0	\mathbf{c}_2
1	1	\mathbf{c}_3
1	0
...
...

con un numero di entrate pari al numero delle variabili proposizionali che occorrono in \mathbf{pr} e che usiamo per indicizzare le colonne della tabella.

Tali tabelle si definiscono per induzione sulla formazione di \mathbf{pr} come segue:

- la tabella della costante \mathbf{tt} è la funzione

$$tab(\mathbf{tt}) : \{0, 1\}^0 \rightarrow \{0, 1\}$$

che è costantemente **1** ove si ricorda che $\{0, 1\}^0 = \text{singoletto}$.

- la tabella della costante \perp è la funzione

$$tab(\perp) : \{0, 1\}^0 \rightarrow \{0, 1\}$$

che è costantemente $\mathbf{0}$ ove si ricorda che $\{0, 1\}^0 = \text{singoletto}$.

- la tabella della variabile proposizionale A è la funzione identica

$$tab(A) : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

rappresentata graficamente con

A	A
0	0
1	1

- data la tabella di verità di una proposizioni pr

V_{n_1}	V_{n_2}	...	V_{n_m}	pr
0	1	$\mathbf{c_1}$
0	0	$\mathbf{c_2}$
1	1	$\mathbf{c_3}$
1	0
...
...

la tabella di verità della proposizione $\neg\text{pr}$ è la seguente

V_{n_1}	V_{n_2}	...	V_{n_m}	$\neg\text{pr}_1$
0	1	$\mathbf{e_1}$
0	0	$\mathbf{e_2}$
1	1	$\mathbf{e_3}$
1	0
...
...

ove poniamo per ogni uscita e_h

$$e_h = 1 - c_h$$

ove c_h è l'uscita della tabella di verità di pr in corrispondenza della stessa riga di entrate.

- date le tabelle di verità di due proposizioni pr_1 e pr_2

V_{n_1}	V_{n_2}	...	V_{n_m}	pr_1
0	1	$\mathbf{c_1}$
0	0	$\mathbf{c_2}$
1	1	$\mathbf{c_3}$
1	0
...
...

V_{k_1}	V_{k_2}	...	V_{k_j}	pr_2
0	1	$\mathbf{d_1}$
0	0	$\mathbf{d_2}$
1	1	$\mathbf{d_3}$
1	0
...
...

allora la tabella di verità di $\text{pr}_1 \& \text{pr}_2$ è

W_{i_1}	W_{i_2}	...	W_{i_n}	$\text{pr}_1 \& \text{pr}_2$
0	1	\mathbf{e}_1
0	0	\mathbf{e}_2
1	1	\mathbf{e}_3
1	0
...
...

ove

$$\{ W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n} \} = \{ \mathbf{V}_{n_1}, \mathbf{V}_{n_2}, \dots, \mathbf{V}_{n_m} \} \cup \{ \mathbf{V}_{k_1}, \mathbf{V}_{k_2}, \dots, \mathbf{V}_{k_j} \}$$

Al fine di definire le uscite e_h della tabella di $\text{pr}_1 \& \text{pr}_2$ in funzione delle tabelle di pr_1 e di pr_2 si osservi che ogni riga di entrate della tabella di $\text{pr}_1 \& \text{pr}_2$ con uscita e_h determina una sottoriga indicata dalle variabili che compaiono in pr_1 con uscita un certo c_{h_1} e una sottoriga indicata dalle variabili che compaiono in pr_2 con uscita un certo c_{h_2} . Usando queste notazioni richiediamo che valga

$$e_h = \min(c_{h_1}, d_{h_2})$$

- date le tabelle di verità di due proposizioni pr_1 e pr_2

V_{n_1}	V_{n_2}	...	V_{n_m}	pr_1
0	1	\mathbf{c}_1
0	0	\mathbf{c}_2
1	1	\mathbf{c}_3
1	0
...
...

V_{k_1}	V_{k_2}	...	V_{k_j}	pr_2
0	1	\mathbf{d}_1
0	0	\mathbf{d}_2
1	1	\mathbf{d}_3
1	0
...
...

allora la tabella di verità di $\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2$ è

W_{i_1}	W_{i_2}	...	W_{i_n}	$\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2$
0	1	\mathbf{e}_1
0	0	\mathbf{e}_2
1	1	\mathbf{e}_3
1	0
...
...

ove

$$\{ W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n} \} = \{ \mathbf{V}_{n_1}, \mathbf{V}_{n_2}, \dots, \mathbf{V}_{n_m} \} \cup \{ \mathbf{V}_{k_1}, \mathbf{V}_{k_2}, \dots, \mathbf{V}_{k_j} \}$$

Al fine di definire le uscite e_h della tabella di $\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2$ in funzione delle tabelle di pr_1 e di pr_2 si osservi che ogni riga di entrate della tabella di $\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2$ con uscita e_h determina una sottoriga indicata dalle variabili che compaiono in pr_1 con uscita un certo c_{h_1} e una sottoriga indicata dalle variabili che compaiono in pr_2 con uscita un certo c_{h_2} . Usando queste notazioni richiediamo che valga

$$e_h = \max(c_{h_1}, d_{h_2})$$

- date le tabelle di verità di due proposizioni pr_1 e pr_2

V_{n_1}	V_{n_2}	...	V_{n_m}	pr_1
0	1	\mathbf{c}_1
0	0	\mathbf{c}_2
1	1	\mathbf{c}_3
1	0
...
...

V_{k_1}	V_{k_2}	...	V_{k_j}	pr_2
0	1	\mathbf{d}_1
0	0	\mathbf{d}_2
1	1	\mathbf{d}_3
1	0
...
...

allora la tabella di verità di $\text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2$ è

W_{i_1}	W_{i_2}	...	W_{i_n}	$\text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2$
0	1	\mathbf{e}_1
0	0	\mathbf{e}_2
1	1	\mathbf{e}_3
1	0
...
...

ove

$$\{ W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n} \} = \{ \mathbf{V}_{n_1}, \mathbf{V}_{n_2}, \dots, \mathbf{V}_{n_m} \} \cup \{ \mathbf{V}_{k_1}, \mathbf{V}_{k_2}, \dots, \mathbf{V}_{k_j} \}$$

Al fine di definire le uscite e_h della tabella di $\text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2$ in funzione delle tabelle di pr_1 e di pr_2 si osservi che ogni riga di entrate della tabella di $\text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2$ con uscita e_h determina una sottoriga indicata dalle variabili che compaiono in pr_1 con uscita un certo c_{h_1} e una sottoriga indicata dalle variabili che compaiono in pr_2 con uscita un certo c_{h_2} . Usando queste notazioni richiediamo che valga

$$e_h = \max(1 - c_{h_1}, c_{h_2})$$

Esempi di tabelle

Tabella di verità di $\neg A$: si ottiene considerando che

$\neg A$ è vero sse A è falso

ed è la funzione unaria

A	$\neg A$
0	1
1	0

Tabella di verità di $A \& B$: si ottiene considerando che

$A \& B$ è vero sse A è vero e B è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$A \& B$
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

Tabella di verità di $A \vee B$: si ottiene considerando che

$A \vee B$ è vero sse A è vero o B è vero
o sono veri entrambi

ed è la funzione binaria

A	B	$A \vee B$
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

Tabella di verità di $A \rightarrow B$: si ottiene considerando che

$A \rightarrow B$ è vero sse $\neg A \vee B$ è vero

ed è la funzione binaria

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$
0	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	0	0

Lemma 8.24 Dato un linguaggio proposizionale L e una proposizione pr in tale linguaggio e una valutazione $\nu : PROP(\mathcal{L}) \rightarrow \{0, 1\}$,

- se pr non ha variabili proposizionali la tabella di verità pr ha in uscita $\nu(pr)$
- se pr ha variabili proposizionali l'uscita della tabella di verità di pr in corrispondenza della riga

$$\nu(\mathbf{V}_{n_1}) \ \nu(\mathbf{V}_{n_2}) \ \dots \ \nu(\mathbf{V}_{n_m})$$

è proprio $\nu(pr)$.

Dim. Per induzione sulla formazione di pr .

Lemma 8.25 Dato un linguaggio proposizionale L e una proposizione pr in tale linguaggio valgono le seguenti affermazioni:

<p>pr è VALIDA nella semantica classica se e solo se la sua tabella di verità è la funzione costante 1</p>
<p>pr è SODDISFACIBILE nella semantica classica se e solo se la sua tabella di verità ha un'uscita di valore 1</p>
<p>pr è NON VALIDA nella semantica classica se e solo se la sua tabella di verità ha un'uscita di valore 0</p>
<p>pr è INSODDISFACIBILE nella semantica classica se e solo se la sua tabella di verità è la funzione costante 0</p>

Dim. Si osservi che se

$$\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2 \ \dots \ \mathbf{V}_n$$

sono tutte le variabili proposizionali in \mathbf{pr} allora il valore di verità su \mathbf{pr} di una qualsiasi valutazione ν è determinato dai valori

$$\nu(\mathbf{V}_1), \nu(\mathbf{V}_2), \dots, \nu(\mathbf{V}_n)$$

come espresso nel lemma 8.8. Questa sequenza di valori determina una riga della tabella di verità di \mathbf{pr} che avrà in uscita esattamente $\nu(\mathbf{pr})$ per il lemma 8.24. Viceversa ad ogni riga della tabella di verità con entrate h_1, \dots, h_n possiamo associare una valutazione ν definita sulle variabili proposizionali occorrenti in \mathbf{pr} come nella riga di partenza ovvero ponendo

$$\nu(V_i) \equiv a_i$$

per $i = 1, \dots, n$ e con valori a piacere sulle rimanenti variabili proposizionali non occorrenti in \mathbf{pr} . In tal modo si ottiene che $\nu(\mathbf{pr}) = e_h$ ove e_h è proprio l'uscita corrispondente all'entrata h_1, \dots, h_n per il lemma 8.24.

In sostanza data una proposizione \mathbf{pr} in un linguaggio proposizionale L , con variabili proposizionali V_i per $i = 1, \dots, n$, possiamo definire una nozione di equivalenza tra valutazioni in tal modo: date due valutazioni ν_1 e ν_2 diciamo che

$$\nu_1 \simeq \nu_2 \text{ sse } \nu_1(V_i) = \nu_2(V_i) \text{ per } i = 1, \dots, n$$

Ora l'insieme delle *righe delle tabelle di verità* di \mathbf{pr} sono in biezioni con le classi di equivalenza delle valutazioni relative a \simeq .

Quindi possiamo dare anche queste definizioni:

Def. 8.26 (validità rispetto alla semantica delle tabelle di verità) Dato un linguaggio proposizionale L , una proposizione \mathbf{pr} in tal linguaggio è **valida rispetto alla semantica delle tabelle di verità** se e solo se la sua tabella di verità è la funzione costante $\mathbf{1}$.

Inoltre un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in tal linguaggio è **valido rispetto alla semantica delle tabelle di verità** se $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è valida rispetto alla semantica delle tabelle di verità.

Concludiamo quindi con il seguente teorema di validità e completezza rispetto alla semantica delle tabelle di verità:

Theorem 8.27 (validità e completezza classica rispetto alle tabelle di verità) Il concetto di DERIVABILITÀ in \mathbf{LC}_p coincide con quello di VALIDITÀ delle tabelle di verità, ovvero un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{LC}_p se e solo se la tabella di verità di $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è la funzione costante $\mathbf{1}$.

In conclusione

Verità semantica classica di fr tabella di verità di fr è funzione costante 1	=	Verità formale di fr esiste una derivazione di fr in \mathbf{LC}_p
--	---	--

8.2.1 Esempio di analisi della validità semantica

$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ è valida semanticamente? Ovvero vale $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$?

Se facciamo la tabella di verità per $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$ otteniamo

A	B	A → B	(A → B) & A
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	1	1
1	0	0	0

e concludiamo che è NON VALIDA semanticamente (per esempio per $A = B = 0$) \Rightarrow NON vale $\models (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \& \mathbf{A}$

Concludiamo però che è soddisfacibile per $A = B = 1$.

8.3 UGUAGLIANZA tra proposizioni

L'identità sintattica NON è il concetto più rilevante di uguaglianza tra proposizioni. L'uguaglianza tra proposizioni che ci interessa è quella che *identifica due proposizioni come uguali se hanno la stessa tabella di verità*. E quindi ci chiediamo:

quando due proposizioni formali pr_1 e pr_2 hanno la STESSA tabella di verità? Innanzitutto notiamo che proposizioni sintatticamente diverse possono avere la stessa tabella di verità: per esempio

A	$\neg A$
0	1
1	0

è anche la tabella di verità per $\neg A \& \neg A$

A	$\neg A \& \neg A$
0	1
1	0

e anche per $(\neg A \& \neg A) \& \neg A$ e per $((\neg A \& \neg A) \& \neg A) \& \neg A$.

Per capire come sono relate tali proposizioni usiamo il connettivo di equivalenza (o equiprovabilità).

8.3.1 Connettivo equivalenza

Ricordiamo che indichiamo con il segno

\leftrightarrow

il connettivo **equivalenza** che è definito in tal modo: date due proposizioni formali pr_1 e pr_2

$$fr_1 \leftrightarrow pr_2 \equiv (pr_1 \rightarrow pr_2) \& (pr_2 \rightarrow pr_1)$$

che si legge " pr_1 è **equivalente** a " pr_2 ".

Il connettivo "equivalenza" ha quindi la seguente tabella di verità

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	1	0
0	0	1
1	1	1
1	0	0

Questo connettivo è importante perchè cattura esattamente l'uguaglianza semantica delle tabelle di verità (ove con "sse" s'intende "se e solo se"):

Theorem 8.28 *Date proposizioni pr_1 e pr_2 , allora*

pr_1 e pr_2 hanno la stessa tabella di verità (contenente tutte le variabili che compaiono in entrambe)

sse

vale $\models pr_1 \leftrightarrow pr_2$

e in tal caso si dice che la proposizione pr_1 è *uguale semanticamente* a pr_2 , ovvero l'**uguaglianza semantica** di proposizioni è l'**equivalenza** di proposizioni.

8.4 Ogni tabella a valori in 0 e 1 è tabella di una proposizione?

Abbiamo visto come ogni proposizione formale possieda una tabella di verità. Ora ci chiediamo: *è anche vero che ogni funzione a valori in $\{0,1\}$ con dominio $\{0,1\}^n$ rappresentata da una tabella ad n entrate, per $n \geq 1$, (ove le righe sono pari a tutte le possibili combinazioni n -arie di 0 e 1) del tipo*

V_1	V_2	...	V_n	???
0	1	\mathbf{c}_1
0	0	\mathbf{c}_2
1	1	\mathbf{c}_3
1	0
...
...

(ove \mathbf{c}_i può essere solo 0 o 1)

*corrisponde ad una **proposizione formale** con (al più) n variabili proposizionali? Se sì dobbiamo forse aggiungere qualche connettivo a quelli già definiti per rappresentarla?*

La risposta è che OGNI TABELLA a n entrate, con $n \geq 1$, CORRISPONDE alla TABELLA di VERITÀ di una PROPOSIZIONE formale con al più n variabili proposizionali e che NON abbiamo bisogno di aggiungere nuove proposizioni per rappresentare tutte le tabelle di verità.

Il motivo è che vale il seguente teorema:

Theorem 8.29 (Completezza delle tabelle rispetto a $\neg, \vee, \&$) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo $\vee, \&$ ed \neg .*

Questo teorema è in verità il corollario di altri due teoremi:

Theorem 8.30 (forma normale disgiuntiva) *Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere in forma normale **disgiuntiva***

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}}$$

ove

$$\mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv (((\mathbf{C}_{i,1} \& \mathbf{C}_{i,2}) \dots \& \mathbf{C}_{i,n})$$

è congiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv ((\mathbf{riga}_{i_1} \vee \mathbf{riga}_{i_2}) \vee \mathbf{riga}_{i_3} \dots) \vee \mathbf{riga}_{i_n}$$

La procedura per scrivere la forma normale disgiuntiva di una tabella di verità a n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità di $\mathbf{conn}(V_1, \dots, V_n)$
- se **NON ESISTE** almeno una riga con risultato 1 poni

$$V_1 \& \neg V_1$$

- se **ESISTE** almeno una riga con risultato 1 faccio la disgiunzione

$$\bigvee_{\mathbf{i} \text{ indice riga con risultato } 1} \mathbf{riga}_{\mathbf{i}}$$

ove

$$\mathbf{riga}_{\mathbf{i}} \equiv (((\mathbf{C}_{i,1} \& \mathbf{C}_{i,2}) \dots \& \mathbf{C}_{i,n})$$

è multipla congiunzione di $C_{i,k}$ definiti come segue

$$C_{i,k} \equiv \begin{cases} V_k & \text{se } 1 \text{ è il valore di } V_k \text{ nella riga } i\text{-esima} \\ \neg V_k & \text{se } 0 \text{ è il valore di } V_k \text{ nella riga } i\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \text{conn}(V_1, \dots, V_n) \leftrightarrow \bigvee_{i \text{ indice riga con risultato } 1} \text{riga}_i$$

8.4.1 Esempio di uso di forma normale disgiuntiva

Data la tabella di verità

A	B	conn(A, B)
0	1	0
0	0	1
1	1	0
1	0	0

per scoprire che proposizione è $\text{conn}(A, B)$ usiamo il teorema **forma normale disgiuntiva** e scriviamo dunque le righe uscenti con 1

$$\neg A \& \neg B$$

e dal teorema deduciamo che possiamo definire

$$\text{conn}(A, B) \equiv \neg A \& \neg B$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Se prendiamo invece questa tabella di verità

A	B	conn(A, B)
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

chi è $\text{conn}(A, B)$? Per stabilirlo di nuovo usiamo il teorema di forma normale disgiuntiva e scriviamo dunque le righe uscenti con 1:

$$((\neg A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)) \vee (A \& \neg B)$$

dal teorema sappiamo che possiamo definire

$$\text{conn}(A, B) \equiv ((\neg A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)) \vee (A \& \neg B)$$

Però la scrittura del connettivo è molto complessa... Vediamo allora un'altro modo di scrivere il connettivo corrispondente ad una tabella di verità nel caso ci siano pochi 0 in uscita. A tal fine enunciamo il seguente teorema:

Theorem 8.31 (forma normale congiuntiva) Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere in forma normale **congiuntiva**

$$\&_i \text{ indice riga con risultato } 0 \overline{\text{riga}}_i$$

ove

$$\overline{\text{riga}}_i \equiv (((C_{i,1} \vee C_{i,2}) \dots \vee C_{i,n})$$

è disgiunzione di variabili o loro negazioni e

$$\&_i \text{ riga con risultato } 0 \overline{\text{riga}}_i \equiv ((\overline{\text{riga}}_{i_1} \& \overline{\text{riga}}_{i_2}) \& \overline{\text{riga}}_{i_3} \dots) \& \overline{\text{riga}}_{i_n}$$

La procedura per scrivere la forma normale congiuntiva di una tabella di verità ad n entrate è la seguente:

- considero la tabella di verità del connettivo **n-ario conn**(V_1, \dots, V_n)
- se **NON ESISTE almeno una riga con risultato 0** poni

$$V_1 \vee \neg V_1$$

- se **ESISTE almeno una riga con risultato 0** faccio la congiunzione

$$\&_{i \text{ indice riga con risultato } 0} \overline{\text{riga}_i}$$

ove

$$\overline{\text{riga}_i} \equiv (((C_{i,1} \vee C_{i,2}) \dots \vee C_{i,n})$$

è multipla disgiunzione di C_i definiti come segue

$$C_{i,k} \equiv \begin{cases} V_k & \text{se } 0 \text{ è il valore di } V_k \text{ nella riga } i\text{-esima} \\ \neg V_k & \text{se } 1 \text{ è il valore di } V_k \text{ nella riga } i\text{-esima} \end{cases}$$

- si dimostra che

$$\models \text{conn}(V_1, \dots, V_n) \leftrightarrow \&_{i \text{ indice riga con risultato } 0} \overline{\text{riga}_i}$$

8.4.2 Esempio di uso di forma normale congiuntiva: il connettivo NAND

Quindi ora data la tabella

A	B	$\text{conn}(A, B)$
0	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1

usiamo il teorema di forma normale congiuntiva e scriviamo le righe uscenti con 0: $\neg A \vee \neg B$ e deduciamo dal teorema che possiamo definire

$$\text{conn}(A, B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

perchè connettivi equivalenti hanno la stessa tabella di verità.

Inoltre per simmetria dell'equivalenza e per la legge di de Morgan in sezione 3.7 otteniamo che

$$\models \text{conn}(A, B) \leftrightarrow \neg(A \& B)$$

e quindi la tabella di verità rappresenta il connettivo NAND.

8.4.3 Raffinamento del teorema di completezza delle tabelle di verità

Theorem 8.32 ($\& + \neg$) *Ogni tabella con n-entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n-ario che si può scrivere con solo $\&$ e \neg .*

Dim. Segue per il teorema di forma normale congiuntiva, dopo aver notato che la disgiunzione tramite la legge di De Morgan e quella della doppia negazione in sezione 3.7 si può definire come segue

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$$

In particolare, si noti che l'implicazione tramite la sua essenza in sezione 3.7 si può definire in tal modo

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Theorem 8.33 ($\vee + \neg$) Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo \vee e \neg .

Dim: Segue per il teorema di forma normale disgiuntiva dopo aver notato che la congiunzione tramite le leggi di De Morgan e quella della doppia negazione si può definire come segue

$$\mathbf{A \& B} \equiv \neg(\neg \mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B})$$

Theorem 8.34 ($\rightarrow + \neg$) Ogni tabella con n -entrate, con $n \geq 1$, denota un connettivo n -ario che si può scrivere con solo \rightarrow e \neg .

Dim: Basta notare che si può definire la disgiunzione in tal modo

$$\mathbf{A \vee B} \equiv \neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$

grazie alla legge della doppia negazione in sezione 3.7 e poi si applica il teorema 8.33.

Theorem 8.35 (solo NAND) Ogni connettivo n -ario si può scrivere con solo **NAND**.

Dim: Basta notare che tramite **NAND** si può definire sia la negazione che la disgiunzione come segue

$$\neg \mathbf{A} \equiv \mathbf{NAND}(\mathbf{A}, \mathbf{A}) \quad \mathbf{A \vee B} \equiv \mathbf{NAND}(\neg \mathbf{A}, \neg \mathbf{B})$$

ove nel secondo si usa ovviamente la definizione di negazione data nella definizione di sinistra. Poi si conclude per il teorema 8.33.

8.4.4 Quante sono le tabelle di verità ad n entrate?

Le possibili tabelle di verità con n entrate, con $n \geq 1$, sono

$$2^{2^n}$$

ovvero tante quante le funzioni da $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ e quindi i connettivi n -ari **a meno di equivalenza proposizionale** sono 2^{2^n}

Per esempio le tabelle di verità **unarie** sono $4 = 2^{2^1}$ e sono:

identità <table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">A</td><td style="padding: 2px 5px;">A</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	A	A	0	0	1	1	negazione <table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">A</td><td style="padding: 2px 5px;">$\neg A$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table>	A	$\neg A$	0	1	1	0
A	A												
0	0												
1	1												
A	$\neg A$												
0	1												
1	0												
costante falso <table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">\perp</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table>	\perp	0	costante vero <table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">\mathbf{tt}</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	\mathbf{tt}	1								
\perp													
0													
\mathbf{tt}													
1													

ove \perp è il nome alla costante “falso” che è da aggiungere alle proposizioni, \mathbf{tt} è il nome alla costante “vero” che è da aggiungere alle proposizioni.

Si noti che per i teoremi di completezza delle tabelle con i vari linguaggi si deduce che:

$$\models \perp \leftrightarrow \mathbf{A \& \neg A} \quad \models \mathbf{tt} \leftrightarrow \mathbf{A \vee \neg A}$$

8.5 Come trovare contromodelli classici proposizionali tramite il calcolo \mathbf{LC}_p

Una caratteristica importante delle regole del calcolo \mathbf{LC}_p che abbiamo provato nelle sezioni precedenti è che il concetto di derivabilità di un sequente $\Gamma \vdash \nabla$ nel calcolo COINCIDE con quello della sua validità grazie al teorema 11.130.

Combinando questo fatto con l'esistenza della PROCEDURA di decisione 5.4.2 in grado di **decidere** se un sequente è **derivabile** o meno otteniamo una procedura in grado di **decidere** se un sequente è **tautologia semantica** o meno rispetto alla logica classica proposizionale.

Aggiungiamo ora che nel caso il sequente sia *opinione* o un *paradosso* (formale o semantico non importa perchè sappiamo essere concetti equivalenti!) siamo in realtà in grado di esibire contromodello in modo costruttivo, come descritto nella dimostrazione del teorema di completezza 8.16 ovvero di dimostrare che

Theorem 8.36 (teorema del contromodello di \mathbf{LC}_p) Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in un linguaggio \mathcal{L} NON è derivabile in \mathbf{LC}_p allora ESISTE una valutazione

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

tale che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}) = 0$$

Qui di seguito ripetiamo tale procedura di costruzione di contromodello per sequenti non derivabili in \mathbf{LC}_p per comodità del lettore.

8.5.1 Costruzione di un CONTROMODELLO di un sequente proposizionale NON derivabile

Se la procedura di decisione 5.4.2 applicata al sequente $\Gamma \vdash \nabla$ termina dicendo che il sequente NON è derivabile perchè si ferma con una foglia

$$\Gamma' \vdash \nabla'$$

che NON è un assioma allora costruiamo UNA valutazione che rende falso il sequente di partenza $\Gamma \vdash \nabla$, ovvero costruiamo un **contromodello di $\Gamma \vdash \nabla$ rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale**

ponendo

- $\nu(\mathbf{A}) = 1$ per ogni variabile \mathbf{A} in Γ'
- $\nu(\mathbf{B}) = 0$ per ogni variabile \mathbf{B} in ∇'

e tutte le altre variabili proposizionali con valori A PIACERE.

In particolare

1. se la foglia NON assioma è del tipo

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \vdash V_{k_1}, \dots, V_{k_m}$$

e quindi

$$\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\} \cap \{V_{k_1}, \dots, V_{k_m}\} = \emptyset$$

allora

OGNI riga della tabella di $\Gamma \vdash \nabla$ con

$$\begin{array}{ll} \nu(A_{i_j}) = 1 & \nu(V_{k_j}) = 0 \\ \text{per } j = 1, \dots, n & \text{per } j = 1, \dots, m \end{array}$$

dà valore 0 alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$.

2. se la foglia NON assioma è del tipo

$$\vdash V_{k_1}, \dots, V_{k_m}$$

allora

OGNI riga della tabella di $\Gamma \vdash \nabla$ con

$$\begin{aligned} \nu(V_{k_j}) &= 0 \\ \text{per } j &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

dà valore 0 al sequente $\Gamma \vdash \nabla$ ovvero alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$.

3. se la foglia NON assioma è del tipo

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \vdash$$

allora

OGNI riga della tabella di $\Gamma \vdash \nabla$ con

$$\begin{aligned} \nu(A_{i_j}) &= 1 \\ \text{per } j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

dà valore 0 alla proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \nabla^{\vee}$.

Chiaramente la valutazione trovata dice in modo costruttivo che il sequente di partenza NON è valido, ed è un suo *contromodello* rispetto alla semantica classica bivalente proposizionale.

8.5.2 Esempio di contromodello classico proposizionale

Il sequente

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$$

è valido?

NO, non è valido in quanto applicando la procedura di decisione ?? al sequente possiamo costruire un albero del tipo

$$\frac{\frac{\frac{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}} \&-S \quad \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}}{\mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}} \rightarrow-S}{\frac{\frac{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B}, \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{R}}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}} \text{sc}_{sx} \quad \rightarrow-D}{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})} \&-D} \&-D$$

che ha una foglia $\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{P}, \mathbf{R}$ senza proposizioni composte che NON è un assioma e che ci dice che su ogni valutazione del sequente radice in cui si pone $\nu(\mathbf{A}) = \mathbf{1}$, $\nu(\mathbf{B}) = \mathbf{1}$ e poi $\nu(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$ e $\nu(\mathbf{R}) = \mathbf{0}$ e un *valore a piacere* su \mathbf{D} e su \mathbf{M} e sulle altre variabili proposizionali il sequente $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B} \vdash (\mathbf{A} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{R}) \& (\mathbf{D} \vee \mathbf{M})$ risulta falso.

8.6 Validità e completezza della logica classica predicativa con uguaglianza rispetto semantica classica bivalente predicativa

Diamo di seguito una variazione dei modelli di Tarski per la logica classica predicativa con uguaglianza. A tal scopo nel seguito faremo uso di metavariables per variabili oltre che per termini che andiamo qui a precisare per evitare ambiguità:

Def. 8.37 (metavariabili per variabili) Come metavariables per variabili usiamo i seguenti simboli

$$MetaVar(Var) = \{ u \} \cup \{ u_i \mid i \in Nat^+ \} \cup \{ v \} \cup \{ v_i \mid i \in Nat^+ \}$$

Def. 8.38 (metavariabili per termini generici) Come metavariables per termini usiamo i seguenti simboli

$$MetaVar(Termini) = \{ t \} \cup \{ t_i \mid i \in Nat^+ \} \cup \{ s \} \cup \{ s_i \mid i \in Nat^+ \}$$

Def. 8.39 Dato un insieme numerabile di variabili

$$Var \equiv \{ x_j \mid j \in Nat \}$$

definiamo

$$listord(Var)$$

l'insieme delle liste di variabili DISTINTE ordinate secondo gli indici in modo crescente

$$\sigma \equiv [x_{j_1}, \dots, x_{j_n}]$$

ove $j_1 < j_2 < \dots < j_n$. e della lista vuota $[\]$.

Inoltre indichiamo una lista generica con le seguenti metavariables

$$\sigma \equiv [v_1, \dots, v_n]$$

e introduciamo la seguente notazione

$$V(\sigma) \equiv \{v_1, \dots, v_n\}$$

se $\sigma \equiv [v_1, \dots, v_n]$

Def. 8.40 (termini e formule con contesto) Definiamo l'insieme dei termini di \mathcal{L} INDICIATI con contesto σ che include le sue variabili libere

$$Term(\mathcal{L}_{cont}) \equiv \{t_\sigma \mid t \in Term(\mathcal{L}), \sigma \in listord(Var), VL(t) \subseteq V(\sigma)\}$$

In particolare denotiamo con

$$\overline{v(t)}$$

la lista ordinata di variabili libere di t .

Allo stesso modo definiamo l'insieme delle formule di \mathcal{L} INDICIATE con contesto σ che include le sue variabili libere

$$Form(\mathcal{L}_{cont}) \equiv \{\mathbf{fr}_\sigma \mid \mathbf{fr} \in Term(\mathcal{L}), \sigma \in listord(Var), VL(\mathbf{fr}) \subseteq V(\sigma)\}$$

In particolare denotiamo con

$$\overline{v(\mathbf{fr})}$$

la lista ordinata di variabili libere di \mathbf{fr} .

Esempio Si noti che $x_{2[x_1, x_2, x_3]} \in Term(\mathcal{L}_{cont})$ come pure $c_{j[x_2, x_3]} \in Term(\mathcal{L}_{cont})$.

Def. 8.41 Dati due insiemi A, B useremo la notazione

$$\mathbf{Fun}(A, B)$$

per indicare l'insieme delle funzioni da A a B e con la notazione

$$f : A \longrightarrow B$$

intendiamo che $f \in \mathbf{Fun}(A, B)$.

Def. 8.42 Dato un insieme D denotiamo con

$$D^n \equiv \underbrace{D \times D \times \dots \times D}_{n\text{-volte}}$$

e $D^0 \equiv \{*\}$ è un singoletto.

Inoltre denotiamo con

$$\pi_j : D^n \longrightarrow D$$

la proiezione j -sima per $j \geq n$ e $n \geq 1$ ove se $n = 1$ allora $\pi_1 : D \rightarrow D$ è l'identità.

Indichiamo inoltre con

$$\tilde{\pi}_j : D^{n+1} \longrightarrow D^n$$

la coppia n -aria SENZA la j -esima componente se $n \geq 0$. Nel caso che $n = 0$ allora

$$\tilde{\pi}_1 : D \rightarrow D^0$$

è la proiezione 0-aria che è la funzione costante nel singoletto D^0 .

Def. 8.43 (modello classico bivalente predicativo) Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$
- variabili

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

un *modello classico bivalente predicativo per \mathcal{L}* è dato da

- un dominio (=insieme NON VUOTO) \mathbf{D}
- un'interpretazione dei termini sotto contesto come funzioni n -arie in D

$$\nu : Term(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{Fun}(D^n, D)$$

- un'interpretazione, detta *valutazione classica bivalente predicativa*, delle formule sotto contesto come funzioni n -arie in $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

$$\nu : Form(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{Fun}(D^n, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$$

tale che

- le costanti sono interpretate come elementi del dominio $\nu(\mathbf{c}_{j[\]}) \in \mathbf{Fun}(D^0, D)$

- le variabili sono interpretate come *proiezioni*

$$\nu(\mathbf{v}_k[v_1, \dots, v_n]) = \pi_k : \mathbf{D}^n \longrightarrow \mathbf{D}$$

- le funzioni n_k -arie come funzioni n_k -arie sul dominio

$$\nu(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[v_1, \dots, v_{n_k}]}) : \mathbf{D}^{n_k} \longrightarrow \mathbf{D}$$

in modo tale che

$$\nu(\mathbf{f}_k(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_k})_\sigma) = \mathbf{D}^m \longrightarrow \mathbf{D}$$

ove \mathbf{m} è la lunghezza di σ è definito in tal modo

$$\nu(\mathbf{f}_k(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_k})_\sigma) = \nu(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[v_1, \dots, v_{n_k}]}) \cdot \langle \nu(\mathbf{t}_{1\sigma}), \dots, \nu(\mathbf{t}_{n_k\sigma}) \rangle$$

-

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[v_1, \dots, v_{n_i}]}) : \mathbf{D}^i \longrightarrow \{0, 1\}$$

in modo tale che

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_i})_\sigma) = \mathbf{D}^m \longrightarrow \{0, 1\}$$

ove \mathbf{m} è la lunghezza di σ è definito in tal modo

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_i})_\sigma) = \nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[v_1, \dots, v_{n_i}]}) \cdot \langle \nu(\mathbf{t}_{1\sigma}), \dots, \nu(\mathbf{t}_{n_i\sigma}) \rangle$$

-

$$\nu(\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2[v_1, v_2]) = \mathbf{D}^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

tale che

$$\nu(\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2[v_1, v_2])(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2 \end{cases}$$

e inoltre

$$\nu((\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2)_\sigma) = \mathbf{D}^k \longrightarrow \{0, 1\}$$

ove \mathbf{k} è la lunghezza di σ e vale pure

$$\nu((\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2)_{[v_1, v_2]}) \cdot \langle \nu(\mathbf{t}_{1\sigma}), \nu(\mathbf{t}_{2\sigma}) \rangle$$

- La costante falso sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento minimo dell'algebra di boole $Fun(D^k, \{0, 1\})$

$$\nu(\perp_\sigma) = \mathbf{0} : \mathbf{D}^k \longrightarrow \{0, 1\}$$

ovvero la funzione costante 0.

- La costante vero sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento massimo dell'algebra di boole $Fun(D^k, \{0, 1\})$

$$\nu(\mathbf{tt}_\sigma) = \mathbf{1} : \mathbf{D}^k \longrightarrow \{0, 1\}$$

ovvero la funzione costante 1.

- per formule $\mathbf{fr}_{1\sigma}, \mathbf{fr}_{2\sigma}, \mathbf{fr}_\sigma$ di \mathcal{L} con contesto in $Form_{cont}(\mathcal{L})$ e k la lunghezza di σ valgono le seguenti:

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \wedge \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \wedge è l'estremo inferiore dell'algebra di Boole $Fun(D^k, \{0, 1\})$

ovvero per ogni k -upla $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k)$ in \mathbf{D}^k

$\nu((\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$		
sse		
$\nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$	E	$\nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \vee \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \vee è l'estremo superiore dell'algebra di Boole $Fun(D^k, \{0, 1\})$

ovvero per ogni k -upla $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k)$ in \mathbf{D}^k

$\nu((\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$		
sse		
$\nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$	OPPURE	$\nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\neg \mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ovvero per ogni k -upla $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k)$ in \mathbf{D}^k

$\nu((\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$		
sse		
$\nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{0}$	OPPURE	$\nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$

—

$$\nu((\neg \mathbf{fr})_\sigma) = \nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$$

ove $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$ è il complementare di $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)$ dell'algebra di Boole $Fun(D^k, \{0, 1\})$

ovvero per ogni k -upla $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k)$ in \mathbf{D}^k

$\nu((\neg \mathbf{fr}_1)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{1}$	
sse	
$\nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \mathbf{0}$	

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \mathbf{fr})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \rightarrow \{0, 1\}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista σ senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1} \dots \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n, \mathbf{d}_{n+2}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigwedge_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k))$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

ovvero

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)) = 1$$

sse

PER OGNI \mathbf{d} $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) = 1$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{fr})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \rightarrow \{0, 1\}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista σ senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1} \dots \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigvee_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

ovvero

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)) = 1$$

sse

ESISTE UN \mathbf{d} $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) = 1$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

Lemma 8.44 Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$

- variabili

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

e un dominio \mathbf{D} la funzione interpretazione dei termini e formule di L sotto contesto è *univocamente* determinata dalle interpretazioni dei simboli di costante, funzione e predicati atomici diversi dall'uguaglianza. In altre termini date due valutazioni relative ν_1 e ν_2 allo stesso dominio \mathbf{D} se valgono le seguenti condizioni

-

$$\nu_1(\mathbf{c}_{j|j}) = \nu_2(\mathbf{c}_{j|j}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^0, \mathbf{D})$$

per ogni costante c_j al variare di $j \in J$

-

$$\nu_1(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) = \nu_2(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathbf{D})$$

per ogni funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$

-

$$\nu_1(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) = \nu_2(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^i, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$$

per ogni predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$.

allora per termini in contesto t_σ qualsiasi e formule in contesto qualsiasi \mathbf{fr}_σ

$$\nu_1(t_\sigma) = \nu_2(t_\sigma) \quad \nu_1(\mathbf{fr}_\sigma) = \nu_2(\mathbf{fr}_\sigma)$$

Lemma 8.45 (sostituzione) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e una valutazione classica bivalente predicativa ν su un dominio D per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L e un'altro termine in contesto s_{σ_3}

$$\nu((t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[v_j/s])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \nu(s_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{n_1+n_2}, \dots, \pi_{n_1+n_2+n_3} \rangle$$

$$\nu((\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[v_j/s])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \nu(s_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{n_1+n_2}, \dots, \pi_{n_1+n_2+n_3} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i

e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_2 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte, e allo stesso modo con $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con σ_2 e poi con σ_3 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte.

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Lemma 8.46 (indebolimento) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e una valutazione classica bivalente predicativa ν su un dominio D , per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L se $v_j \notin VL(t)$ e $v_j \notin VL(\mathbf{fr})$ allora

$$\nu(t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(t_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \pi_{n_1+1}, \dots, \pi_{n_1+n_2} \rangle$$

$$\nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \pi_{n_1+1}, \dots, \pi_{n_1+n_2} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i

e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_2 .

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Def. 8.47 (modello classico bivalente predicativo di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *modello classico bivalente* di una formula \mathbf{fr} una valutazione classica bivalente predicativa ν su un dominio D per cui vale

$$\nu(\overline{(\mathbf{fr})_{\mathbf{v}(\mathbf{fr})}}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$$

ove k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente il valore di verità della sua chiusura universale rispetto a ν è 1

$$\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) = \mathbf{1} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

In tal caso diciamo che ν rende vera \mathbf{fr} .

Def. 8.48 (contromodello classico di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *CONTROModello classico* di una formula \mathbf{fr} una valutazione classica bivalente predicativa ν su un dominio D che NON rende vera \mathbf{fr} , ovvero per cui

$$\nu(\overline{(\mathbf{fr})_{\mathbf{v}(\mathbf{fr})}}) \neq \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$$

se k è il numero delle sue variabili libere.

Def. 8.49 (modello classico predicativo di un sequente) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , una valutazione classica bivalente predicativa ν su un dominio D rende vero un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ nello stesso linguaggio se e solo se

$$\nu(\overline{(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})_{\mathbf{v}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})}}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$$

se k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente se e solo se la valutazione rende vera la chiusura universale del suo significato ovvero risulta che

$$\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})) = \mathbf{1} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$$

Def. 8.50 (classificazione della verità di una formula rispetto alla semantica classica bivalente)

Data una formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo L

\mathbf{fr} è **VALIDA** nella semantica classica bivalente predicativa

se è vera in OGNI modello classico bivalente predicativo

\mathbf{fr} è **SODDISFACIBILE** nella semantica classica bivalente predicativa

se è vera in almeno un modello classico bivalente predicativo

\mathbf{fr} è **NON VALIDA** nella semantica classica bivalente predicativa

se NON è vera in qualche modello classico bivalente predicativo,

ovvero esiste una valutazione classica bivalente ν su un certo dominio tale che $\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) = \mathbf{0}$;

\mathbf{pr} è **INSODDISFACIBILE** nella semantica classica bivalente predicativa

se NON è vera in NESSUN modello classico bivalente predicativo,

ovvero per ogni valutazione classica bivalente ν su un certo dominio si ha che $\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) = \mathbf{0}$.

e poi poniamo che

fr è **TAUTOLOGIA** nella semantica classica bivalente predicativa
se è vera in OGNI modello classico predicativo,

fr è **OPINIONE** nella semantica classica bivalente predicativa
se è vera in un modello classica predicativo e falsa in un altro,

fr è **PARADOSSO** o **CONTRADDIZIONE** nella semantica classica bivalente predicativa
se è falsa n ogni modello classico bivalente predicativo,
ovvero se la sua negazione $\neg fr$ è vera in ogni modello classico bivalente predicativo.

Def. 8.51 (classificazione della verità rispetto alla semantica classica predicativa di un sequente)

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in un linguaggio predicativo L

un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **valido/soddisfacibile/NON valido/Insoddisfacibile/opinione/paradosso** nella semantica classica bivalente predicativa se e solo se lo è la formula $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ che rappresenta il suo significato.

Memo: Dalla definizione di verità di una formula in un modello si osservi che:

una **formula**

fr(y_1, \dots, y_n) è **VERA** in un modello \mathcal{D}

se e solo se

$$\text{PER OGNI } (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n \quad \nu(\text{fr}(y_1, \dots, y_n))(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{1}$$

se e solo se

$$\nu(\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \text{fr}(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \mathbf{1}$$

da cui segue che

una **formula**

fr(y_1, \dots, y_n) è **FALSA** in un modello \mathcal{D} con una valutazione ν

se e solo se

$$\text{ESISTONO } (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n \text{ detti "FALSARI" tale che } \nu(\text{fr}(y_1, \dots, y_n))(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = \mathbf{0}$$

Esempio La formula $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ è **NON valida** perchè falsa in tal modello considerato il linguaggio predicativo con il solo predicato atomico $A(x)$:

$\mathbf{D} = \{\text{Topolino, Minni}\}$

$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{x}))(\mathbf{d}) = 1$ sse $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ è maschio

In tal modello \mathcal{D} con una valutazione ν si ha che $\nu(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ perchè $\nu(\mathbf{A}(\mathbf{x}))(\text{Minni}) = \mathbf{0}$, ovvero Minni è un falsario della proposizione $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Inoltre

$$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))(\text{Topolino}) = \mathbf{0}$$

perchè $\nu(\mathbf{A}(\mathbf{x}))(\text{Topolino}) = \mathbf{1}$ mentre $\nu(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, ovvero Topolino è un falsario della proposizione $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x})$ nel modello.

Memo

per **falsificare** una formula con una variabile libera $\text{pr}(\mathbf{x})$
in un modello con dominio D con una valutazione ν
che diventerà quindi un suo CONTROmodello

BASTA TROVARE un elemento \mathbf{d} che è un falsario della formula $\text{pr}(\mathbf{x})$
ovvero un elemento su cui **la funzione interpretante la formula $\text{pr}(\mathbf{x})$ risulti falsa su \mathbf{d}**
ovvero vale $\nu(\text{pr}(\mathbf{x}))(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$
e **NON** c'è bisogno di trovare un modello in cui
 $\text{pr}(\mathbf{x})$ falsa su **TUTTI** i valori del dominio del modello \mathcal{D} ,
ovvero **NON** c'è bisogno che **TUTTI** gli elementi \mathbf{d} del dominio D
risultino falsari della funzione che interpreta $\text{pr}(\mathbf{x})$!!!.

Def. 8.52 (validità di regola ad una premessa in un modello classico bivalente) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

si dice **valida in un modello \mathcal{D} con valutazione ν**
se il sequente premessa è vero nel modello

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$$

ovvero vale $\nu(\text{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee})) = \mathbf{1}$, allora pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

è vero nel modello ovvero $\nu(\text{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})) = \mathbf{1}$

Def. 8.53 (validità di regola a due premesse in modello classico bivalente) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

si dice **vera in un modello classico bivalente predicativo \mathcal{D} con valutazione ν**
se nel modello sono veri ENTRAMBI i sequenti

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

ovvero valgono $\nu(\text{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee})) = \mathbf{1}$ e $\nu(\text{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})) = \mathbf{1}$, allora pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \Delta_3$$

è vero nel modello ovvero si ha che $\nu(\text{Cu}(\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})) = \mathbf{1}$.

Def. 8.54 (validità di una regola rispetto alla semantica classica bivalente predicativa) Una regola è valida rispetto alla semantica classica bivalente se e solo se è vera in OGNI modello classico bivalente predicativo.

Ora mostriamo che le regole di $\mathbf{LC}_=$ sono valide rispetto alla semantica classica bivalente predicativa. A tal scopo si noti la validità del seguente lemma in cui la **verità di una regola in un modello** è fatta corrispondere **validità della formula ottenuta interpretando come implicazione il segno di inferenza** di un sequente premessa o due sequenti premessa ad un sequente conclusione dopo aver interpretato i sequenti stessi come implicazioni quantificate universalmente.

Prima di far ciò introduciamo le seguenti abbreviazioni per indicare una lista finita di variabili:

$$\bar{y} \equiv y_1, y_2, \dots, y_n$$

$$\forall \bar{y} \text{ fr}(\bar{y}) \equiv \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n \text{ fr}(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Inoltre utilizziamo la scrittura

$$\Gamma(\bar{y})$$

per indicare che *le variabili libere occorrenti in $\Gamma(\bar{y})$ sono incluse nella lista $\bar{y} \equiv y_1, y_2, \dots, y_n$* (e quindi nella lista potrebbero esserci variabili che non compaiono nella lista di formule $\Gamma(\bar{y})$).

Ora utilizziamo le abbreviazioni sopra nel seguente lemma:

Lemma 8.55 *Valgono le seguenti proprietà:*

Una regola ad una premessa

$$\frac{\Gamma_1(\bar{y}) \vdash \Delta_1(\bar{y})}{\Gamma_2(\bar{y}) \vdash \Delta_2(\bar{y})}$$

è **vera in un modello \mathcal{D}**

se e solo se

$$\forall \bar{y} (\Gamma_1^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{y})) \rightarrow \forall \bar{y} (\Gamma_2^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{y}))$$

è **vera nel modello \mathcal{D} .**

Una regola a due premesse

$$\frac{\Gamma_1(\bar{y}) \vdash \Delta_1(\bar{y}) \quad \Gamma_2(\bar{y}) \vdash \Delta_2(\bar{y})}{\Gamma_3(\bar{y}) \vdash \Delta_3(\bar{y})}$$

è **vera in un dato modello \mathcal{D}**

se e solo se

$$\forall \bar{y} (\Gamma_1^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{y})) \& \forall \bar{y} (\Gamma_2^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_2^{\vee}(\bar{y})) \rightarrow \forall \bar{y} (\Gamma_3^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_3^{\vee}(\bar{y}))$$

è **vera nel modello \mathcal{D} .**

Dim. Segue dal significato di validità di una regola e dal lemma 8.12.

Ora diamo un'ulteriore caratterizzazione di validità di una regola in un modello molto utile al fine di dimostrare la validità di una regola:

Lemma 8.56 Sono valide le seguenti proprietà:

Def. Verità in un modello di una regola ad una premessa

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \text{è vera in un modello } \mathcal{D}$$

sse

vale la seguente condizione:

se per ogni $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{D}^n$

$$\nu(\Gamma_1^{\&}(\bar{y}) \rightarrow \Delta_1^{\vee}(\bar{y})) (d_1, \dots, d_n) = 1 \text{ nel modello } \mathcal{D}$$

↓

nel modello \mathcal{D}

$$\text{per ogni } (d_1, \dots, d_n) \in \mathbf{D}^n \quad \text{se} \quad \nu(\Gamma_2^{\&}(\bar{y})) (d_1, \dots, d_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu(\Delta_2^{\vee}(\bar{y})) (d_1, \dots, d_n) = 1.$$

Def. Verità in un modello di regola a due premesse

Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3} \quad \text{è vera in un modello } \mathcal{D}$$

sse

vale la seguente condizione:

se nel modello \mathcal{D}

per ogni $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$$\nu(\Gamma_1^{\&}\bar{\mathbf{y}} \rightarrow \Delta_1^{\vee}\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

e

per ogni $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n$

$$\nu(\Gamma_2^{\&}\bar{\mathbf{y}} \rightarrow \Delta_2^{\vee}\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

↓

nel modello \mathcal{D}

$$\text{per ogni } (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbf{D}^n \quad \text{se} \quad \nu(\Gamma_3^{\&}\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu(\Delta_3^{\vee}\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) = 1$$

Dim. Segue dalla definizione di interpretazione della quantificazione universale ed implicazione.

Theorem 8.57 (validità delle regole $\mathbf{LC}_=$) Tutti gli assiomi di $\mathbf{LC}_=$ sono tautologie semantiche e TUTTE le regole di $\mathbf{LC}_=$ sono valide rispetto alla semantica classica bivalente predicativa.

Dim. Grazie al teorema 8.14 basta controllare la validità delle regole dei quantificatori.

Nel seguito quando la lista di variabili su cui definiamo la valutazione di una formula \mathbf{fr} o di un termine t_{ter} sono esattamente la lista delle loro variabili libere ordinate secondo l'alfabeto inglese o sono note dal contesto ci permettiamo di scrivere semplicemente

$$\nu(\mathbf{fr}) \quad \nu(t_{ter})$$

al posto di

$$\nu(\mathbf{fr}_\sigma) \quad \nu((t_{ter})_\sigma)$$

Validità regola \forall -D (caso semplice).

Mostriamo la validità della regola

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{w}), \nabla}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \quad \forall\text{-D} \quad (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

supponendo che sia Γ che ∇ siano liste di proposizioni senza variabili libere per semplicità.

Si lascia al lettore mostrare il caso generale.

Per il lemma 8.55 per mostrare la validità della regola nei casi menzionati basta mostrare che in un qualsiasi modello con valutazione ν in \mathbf{D} vale

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Per provare l'implicazione più esterna usiamo il lemma 8.12. Ora supponiamo che

$$\nu((\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}))_{[\]}) = \mathbf{1}$$

Ne segue che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha che

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee})_{[\mathbf{w}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Mostriamo ora che vale pure

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})_{[\]}) = \mathbf{1}$$

usando di nuovo il lemma 8.12. A tal scopo supponiamo $\nu(\Gamma^{\&}) = \mathbf{1}$. Allora per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha per ipotesi $\nu((\mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee})_{[\mathbf{w}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ ovvero che $\nu(\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ oppure $\nu(\nabla^{\vee}_{[\mathbf{w}]}) = \mathbf{1}$ e per il lemma 8.46 pure che

$$\nu(\nabla^{\vee}_{[\]}) = \mathbf{1}$$

perchè \mathbf{w} non compare in ∇^{\vee} .

Ora sia hanno 2 casi:

caso 1: $\nu(\nabla^{\vee}_{[\]}) = \mathbf{1}$ da cui si conclude $\nu((\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})_{[\]}) = \mathbf{1}$

caso 2: $\nu(\nabla^{\vee}_{[\]}) = \mathbf{0}$ e quindi *per ogni* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ $\nu(\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{x}]})(\mathbf{d}) = \nu(\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e quella $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ sono le stesse in presenza di una sola variabile) da cui

$$\nu((\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))_{[\]}) = \mathbf{1}$$

e quindi $\nu(\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee}_{[\]}) = \mathbf{1}$.

Dunque il seguente conclusione è valido nel modello dato da ν .

Validità della regola \forall -D (caso generale).

La regola \forall -D è **VALIDA** anche se supponiamo $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ supponiamo $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Questo è il caso più generale perchè in presenza nel sequente di due o più variabili libere si procede come se ce ne fosse una.

Per mostrare la validità della regola per il lemma 8.55 basta mostrare che in un qualsiasi modello dato da una valutazione ν in \mathbf{D} vale

$$\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

Dunque se

$$\nu((\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})))_{[\]}) = \mathbf{1}$$

allora per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ si ha che

$$\nu((\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{w}, \mathbf{y}]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

ma dato che \mathbf{w} non compare nè in $\mathbf{B}(\mathbf{y})$ e nè in $\mathbf{C}(\mathbf{y})$ per il lemma 8.46 si ha che

$$\nu(\mathbf{B}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}_2) \rightarrow_{\text{Boole}} \nu(\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})_{[\mathbf{w}, \mathbf{y}]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \vee \nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

ove i segni $\rightarrow_{\text{Boole}}$ e \vee sono le corrispondenti operazione algebriche in $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ ovvero $\mathbf{b} \rightarrow_{\text{Boole}} \mathbf{b}' = \sup(\mathbf{1} - \mathbf{b}, \mathbf{b}')$ e $\mathbf{b} \vee \mathbf{b}' = \inf(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$ per $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ vale

$$\nu((\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

tramite il lemma 8.12.

Dunque a tal scopo supponiamo che $\nu(\mathbf{B}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$. Allora per ogni $\mathbf{d}_1 \in \mathbf{D}$ si ha per ipotesi $\nu(\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})_{[\mathbf{w}, \mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \vee \nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$

ovvero che $\nu(\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})_{[\mathbf{w}, \mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ oppure $\nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$.

Ora si hanno 2 casi:

caso 1: $\nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ da cui si conclude $\nu((\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y})))(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$

caso 2: $\nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_2) = \mathbf{0}$ e quindi per ogni $\mathbf{d}_1 \in \mathbf{D}$ $\nu(\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \nu(\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})_{[\mathbf{w}, \mathbf{y}]}) (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})_{[\mathbf{w}, \mathbf{y}]}$ e quella $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]}$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) da cui

$$\nu((\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{[\]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

e quindi $\nu((\forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni* \mathbf{d}_2 vale

$$\nu((\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

e dunque vale in D

$$\nu((\forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]}) = \mathbf{1}$$

Validità della regola dell'esiste a dx (veloce!)

Se mostriamo che la regola $\exists-Dv$ è valida allora ne segue banalmente che è pure valida la regola $\exists-D$ (lo si dimostri per esercizio).

In particolare mostriamo che la regola $\exists-Dv$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t}), \nabla}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla} \exists-Dv$$

è **VALIDA** assumendo per semplicità che $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e assumiamo pure che $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ sia una costante. I casi in cui nei sequenti compaiano più variabili o non compaia la variabile \mathbf{y} si trattano in modo analogo.

Per mostrare la validità della regola per il lemma 8.55 basta mostrare che in un modello qualsiasi dato da una valutazione ν in \mathbf{D} vale

$$\forall y (\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}) \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall y (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

applicando il lemma 8.12.

Supponiamo dunque che se $\forall y (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))$ sia **vera nel modello**, e quindi per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $\nu((\mathbf{B}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

Ora mostriamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

usando il lemma 8.12.

A tal scopo assumiamo dunque che $\nu(\Gamma^{\&}) = \nu(\mathbf{B}(\mathbf{y}))(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Allora per l'ipotesi di validità nel modello del sequente premessa otteniamo che $\nu((\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

Ora analizziamo due casi:

caso 1. $\nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $\nu((\exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$.

caso 2. $\nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ da cui per ipotesi otteniamo che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ abbiamo che $\nu(\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, da cui $\nu(\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\nu(\mathbf{t}_{[\]}), \mathbf{d}) = \nu(\mathbf{A}'(\mathbf{t}, \mathbf{y})_{[\mathbf{y}]}) (\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Quindi $\nu((\exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ da cui concludiamo $\nu((\exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$. Abbiamo quindi mostrato che nel modello D per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ vale

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

e dunque nel modello è vera la formula

$$\forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \nabla^{\vee})$$

che era quanto volevamo dimostrare.

Sapendo che valgono le regole di De Morgan per le quantificazioni e che le regole della negazione sono valide assieme alle loro inverse come mostrato nel caso della logica proposizionale si deduce che sono valide pure le regole a sinistra sia della quantificazione universale che esistenziale (si veda l'allegato sulla spiegazione delle regole della quantificazione universale).

In ogni caso di seguito dimostriamo in dettaglio la loro validità.

Validità della regola \forall -S e \forall -Sv.

Consideriamo questa versione veloce della regola del “per ogni” a sx

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-Sv}$$

Dimostriamo che è **valida** da cui segue facilmente che anche la regola \forall -S lo è. Lo dimostriamo supponendo Γ , ∇ e $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). A tal scopo per il lemma 8.55 basta mostrare che per una valutazione ν in \mathbf{D} qualsiasi fissato vale

$$(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

Quindi supponiamo che valga

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{t}) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[\]}) = \mathbf{1}$$

e per mostrare che pure il sequente conclusione è vero usiamo il lemma 8.12. Quindi supponiamo che $\nu((\Gamma^{\&} \& \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))_{[\]}) = \mathbf{1}$. Dunque $\nu(\Gamma^{\&}) = \mathbf{1}$ e pure $\nu((\forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))_{[\]}) = \mathbf{1}$. Da ciò segue che in particolare per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha $\nu((\mathbf{A}(\mathbf{x}))_{[\mathbf{x}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ e quindi anche che

$$\nu(A(t)_{[\]}) = \nu(A(x)_{[\mathbf{x}]})(\nu(t)_{[\]}) = \mathbf{1}$$

Dunque otteniamo che $\nu((\Gamma^{\&} \& A(t))_{[\]}) = \mathbf{1}$ e per la validità nel modello del sequente premessa concludiamo che $\nu(\nabla^{\vee}_{[\]}) = \mathbf{1}$. Dunque per il lemma scorciatoia abbiamo provato che

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \forall x A(x) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[\]}) = \mathbf{1}$$

e quindi la regola è valida.

Chiaramente anche la regola

$$\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(t) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-S}$$

è valida (lo si dimostri per esercizio).

Validità della regola \exists -S (caso semplice).

La regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \nabla))$$

è **valida**. Trattiamo dapprima il caso semplice in cui Γ e ∇ siano proposizioni senza variabili libere.

Per il lemma 8.55 per mostrare la validità della regola basta mostrare che per ogni valutazione ν in \mathbf{D} vale

$$\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

Dunque supponiamo che valga

$$\nu((\forall \mathbf{w} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}))_{[\]}) = \mathbf{1}$$

ovvero che per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ si ha

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[\mathbf{y}]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

Ora mostriamo pure che vale

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[\]}) = \mathbf{1}$$

usando il lemma 8.12.

A tal scopo assumiamo anche che $\nu((\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}))_{[\]}) = \mathbf{1}$ da cui segue che $\nu(\Gamma^{\&}_{[\]}) = \mathbf{1}$ e che esiste $\bar{\mathbf{d}} \in \mathbf{D}$ tale che $\nu(\mathbf{A}(\mathbf{w})_{[\mathbf{w}]})(\bar{\mathbf{d}}) = \nu(\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[\mathbf{w}]})_{[\bar{\mathbf{d}}]} = \mathbf{1}$ (si ricorda che l'interpretazione di un predicato con una sola variabile libera è indipendente dal nome della variabile). Ora dal lemma 8.46 applicato a $\nu(\Gamma^{\&}_{[\]}) = \mathbf{1}$ si ha

$$\nu((\Gamma^{\&}_{[w]}) = \mathbf{1}$$

e quindi pure

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}))_{[w]})(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$$

Poi per la validità nel modello del sequente premessa su $\bar{\mathbf{d}}$ vale

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[w]})(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{1}$$

e dalla validità nel modello delle premesse di questa implicazione si conclude $\nu(\nabla^{\vee}_{[w]}) = \mathbf{1}$ e da ciò grazie al lemma 8.46 e al fatto che \mathbf{w} non compare in ∇ si ottiene che

$$\nu(\nabla^{\vee}_{[\]}) = \mathbf{1}$$

il che comporta per il lemma 8.12 che il sequente conclusione è **vero** nel modello ossia

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[\]}) = \mathbf{1}$$

e ciò basta per concludere che la regola è valida.

Validità della regola \exists -S (caso più generale).

La regola

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{w}) \vdash \nabla}{\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla} \exists\text{-S } (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\Gamma, \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \Delta))$$

è **valida**.

Ci limitiamo a dimostrare la validità della regola nei casi in cui $\Gamma \equiv \mathbf{B}(\mathbf{y})$ e $\nabla \equiv \mathbf{C}(\mathbf{y})$ e al posto di $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ poniamo $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ in quanto gli altri casi si dimostrano in modo analogo.

A tal scopo per il lemma 8.55 basta mostrare che in una valutazione ν in \mathbf{D} qualsiasi vale

$$\forall \mathbf{w} \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{w}) \rightarrow \nabla^{\vee}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})$$

Ora supponiamo che $\forall \mathbf{y} (\mathbf{B}(\mathbf{y}) \& \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y}))$ sia **vero** nel modello, il che significa che per ogni $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ si ha $\nu((\mathbf{B}(\mathbf{y}) \& \mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{y}))_{[w, y]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$.

Ora fissato un arbitrario $\mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$, mostriamo che

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[y]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

con il lemma 8.12. A tal scopo, assumiamo quindi che $\nu((\mathbf{B}(\mathbf{y}) \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})))_{[y]}(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ da cui segue che $\nu(\mathbf{B}(\mathbf{y})_{[y]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ e che esiste $\mathbf{d}_1 \in \mathbf{D}$ tale che $\nu(\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})_{[w,y]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \nu(\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{[x,y]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ (perchè l'interpretazione di $\mathbf{A}'(\mathbf{w}, \mathbf{y})_{[w,y]}$ e quella $\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{[x,y]}$ sono le stesse in presenza di due sole variabili) e dunque $\nu(\mathbf{B}(\mathbf{y})_{[y]})(\mathbf{d}_2) \wedge \nu(\mathbf{A}'(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{[x,y]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ (si ricordi che il segno \wedge indica l'estremo inferiore nell'algebra $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$) da cui si conclude per la validità del sequente premessa che $\nu(\mathbf{C}(\mathbf{y})_{[y]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$. Dunque abbiamo mostrato che *per ogni* $\mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$

$$\nu((\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee})_{[y]})(\mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$$

e dunque pure che vale

$$\nu((\forall \mathbf{y} (\Gamma^{\&} \& \exists \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \nabla^{\vee}))_{[]}) = \mathbf{1}$$

Quindi per il lemma 8.12 la regola è valida.

Validità delle regole dell'uguaglianza Verifichiamo ora che le regole dei sequenti relative al predicato dell'uguaglianza da aggiungere al calcolo della logica predicativa LC sono valide.

L'assioma

$$\begin{aligned} &= -ax \\ \Gamma \vdash \mathbf{t} = \mathbf{t}, \Delta \end{aligned}$$

è **valido** perchè è vero in OGNI modello:

supponiamo Γ un solo predicato e fissiamo un modello qualsiasi dato da una valutazione ν in \mathbf{D} .

Nel seguito usiamo pure l'abbreviazione

$$(t_{ter})^{\mathbf{D}} = \nu((t_{ter})_{[]}) \quad (\mathbf{fr})^{\mathbf{D}} = \nu(\mathbf{fr}_{[]})$$

Distinguiamo 2 casi:

1. \mathbf{t} è una costante, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ con $\nu(\mathbf{c}) \in \mathbf{D}$, e quindi si ha chiaramente

$$\nu((\mathbf{c} = \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{x} = \mathbf{y})^{\mathbf{D}}(\mathbf{c}^{\mathbf{D}}, \mathbf{c}^{\mathbf{D}}) \equiv \mathbf{1}$$

da cui si ha $(\Gamma \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$ perchè il conseguente è vero nel modello.

2. \mathbf{t} è una variabile, ovvero $\mathbf{t} \equiv \mathbf{x}$, da cui la validità di $\Gamma \vdash \mathbf{x} = \mathbf{x}$ supposto che in Γ ci siano solo proposizioni con \mathbf{x} variabile libera segue in quanto per ogni \mathbf{d} nel modello $(\Gamma \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$, poichè $(\mathbf{x} = \mathbf{x})^{\mathbf{D}}(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ visto che $\mathbf{d} = \mathbf{d}$.

La regola

$$\frac{\Sigma, \mathbf{t} = \mathbf{s}, \Gamma(\mathbf{t}) \vdash \Delta(\mathbf{t}), \nabla}{\Sigma, \Gamma(\mathbf{s}), \mathbf{t} = \mathbf{s} \vdash \Delta(\mathbf{s}), \nabla} = -S_1$$

è **valida** e allo stesso modo si dimostra che lo è $= -S_2$.

Ora mostriamo che la regola $= -S_1$ è valida supponendo tutte le formule nella regola senza variabili libere per semplicità (il caso generale segue analogamente). Dunque supponiamo in particolare $\mathbf{t} \equiv \mathbf{c}_1$ e $\mathbf{s} \equiv \mathbf{c}_2$ ovvero che siano costanti.

Per il lemma 8.55 per dimostrare la validità della regola nei casi menzionati basta mostrare che in un modello qualsiasi dato da una valutazione ν in \mathbf{D} sia vera

$$(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee}) \rightarrow (\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \rightarrow \Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})$$

A tal scopo applichiamo il lemma 8.12 e supponiamo che nel modello valga

$$(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&} \rightarrow \Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

Dobbiamo mostrare che vale pure

$$(\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \rightarrow \Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathbf{D}} = \mathbf{1}$$

Applichiamo di nuovo il lemma 8.12 e supponiamo anche che $(\Sigma^{\&} \& \Gamma(\mathbf{s})^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$.
 Quindi dall'ipotesi otteniamo che $(\Sigma^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ con $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e $(\mathbf{t}=\mathbf{s})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ ovvero $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$.
 Ma $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}})$ e da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{s}^{\mathcal{D}}) = \Gamma(\mathbf{x})^{\&\mathcal{D}}(\mathbf{t}^{\mathcal{D}}) = \Gamma(\mathbf{t})^{\mathcal{D}}$$

e quindi da $\Gamma(\mathbf{s})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ otteniamo $\Gamma(\mathbf{t})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, e mettendo insieme le altre assunzioni si trova che $(\Sigma^{\&} \& \mathbf{t} = \mathbf{s} \& \Gamma(\mathbf{t})^{\&})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Da cui per l'ipotesi di validità del sequente premessa in \mathcal{D} concludiamo che

$$(\Delta(\mathbf{t})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$$

Ora nel caso $\Delta(\mathbf{t})^{\&\mathcal{D}} = \mathbf{1}$, ragionando come sopra da $\mathbf{t}^{\mathcal{D}} = \mathbf{s}^{\mathcal{D}}$ concludiamo

$$\Delta(\mathbf{s})^{\vee\mathcal{D}} = \Delta(\mathbf{t})^{\vee\mathcal{D}}$$

e da $\Delta(\mathbf{t})^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ si conclude pure che $\Delta(\mathbf{s})^{\vee\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dunque $(\Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$. Invece nel caso $(\nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ si conclude subito $(\Delta(\mathbf{s})^{\vee} \vee \nabla^{\vee})^{\mathcal{D}} = \mathbf{1}$ e dunque che il sequente conclusione è vero nel modello considerato. Quindi la regola è valida.

Grazie a questo teorema si dimostra immediatamente il teorema di validità seguente:

Theorem 8.58 (teorema di validità di $\mathbf{LC}_=$ per la semantica classica bivalente predicativa)

Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è valida rispetto alla semantica classica bivalente predicativa, ovvero ogni valutazione classica bivalente rende vera $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Dim. Segue dal teorema 11.83 considerando che dagli assiomi di una derivazione la validità in tutti i modelli classici bivalenti è conservata da tutte le regole fino alla radice.

Analogamente si può dimostrare

Theorem 8.59 (validità delle regole $\mathbf{DNC}_=$) Tutti gli assiomi di $\mathbf{DNC}_=$ sono tautologie semantiche e TUTTE le regole di $\mathbf{DNC}_=$ sono valide rispetto alla semantica classica bivalente predicativa.

Da questo teorema chiaramente segue il seguente:

Theorem 8.60 (teorema di validità di $\mathbf{DNC}_=$ per la semantica classica bivalente predicativa)

Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è valida rispetto alla semantica classica bivalente predicativa, ovvero ogni valutazione classica bivalente rende vera $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Lemma 8.61 (validità regola composizione) La regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \alpha}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \alpha} \text{ comp}$$

è valida rispetto alla semantica classica bivalente predicativa ovvero tutte le regole del calcolo $\mathbf{LC}_{=,c}$ ottenuto estendendo $\mathbf{LC}_=$ con la regola di composizione sono valide rispetto alla semantica classica bivalente predicativa.

Corollary 8.62 Ogni regola derivata in $\mathbf{LC}_{=,c}$ è valida rispetto alla semantica classica bivalente predicativa.

Dim. Una regola derivata in $\mathbf{LC}_{=,c}$ è abbreviazione di una sequenza di regole del calcolo ed essendo queste valide rendono pure valida la regola derivata stessa.

Theorem 8.63 Tutte le inverse delle regole di $\mathbf{LC}_=$ sono valide rispetto alla semantica classica bivalente predicativa.

Theorem 8.64 (completezza della semantica classica predicativa) Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ di formule in un linguaggio predicativo L è valido rispetto alla semantica classica bivalente predicativa, ovvero vero in ogni valutazione classica bivalente predicativa, allora $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$.

Dim. Si procede dimostrando che se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ non è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ allora si può costruire un insieme

$$Maxcons(\Gamma^{\&}, \neg\Delta^{\vee})$$

massimale che è consistente (ovvero $\Gamma \vdash \perp$ non è derivabile per ogni sottoinsieme finito Γ di formule in $Maxcons(\Gamma^{\&}, \Delta^{\vee})$) in un'estensione del linguaggio \mathcal{L} con costanti nuove per ogni formula esistenziale. Poi si prende come dominio l'insieme quoziente dei termini rispetto alla relazione di equivalenza $t \simeq t'$ sse $t = t'$ è in $Maxcons(\Gamma^{\&}, \neg\Delta^{\vee})$ e una valutazione tale che ν rende vera \mathbf{fr} sse e solo se $\mathbf{fr} \in Maxcons(\Gamma^{\&}, \neg\Delta^{\vee})$ e quindi si vede che esiste una valutazione che non rende valido $\Gamma \vdash \Delta$. Per i dettagli si veda il testo

Dirk van Dalen, **Logic and structure**. London, Springer, 2012. 5th revised, extended edition

Quindi concludiamo che

TAUTOLOGIA semantica bivalente predicativa	=	TAUTOLOGIA FORMALE in $\mathbf{DNC}_=/\mathbf{LC}_=$
OPINIONE semantica bivalente predicativa	=	OPINIONE FORMALE in $\mathbf{DNC}_=/\mathbf{LC}_=$
PARADOSSO semantica bivalente predicativa	=	PARADOSSO FORMALE in $\mathbf{DNC}_=/\mathbf{LC}_=$

8.7 Come classificare un sequente in logica classica predicativa con l'uso dei contromodelli

Abbiamo già notato che mentre si può classificare in modo automatico la validità di una formula (ovvero il suo essere tautologia, opinione o paradosso) in logica classica proposizionale, invece **per la logica classica predicativa NON esiste una procedura AUTOMATICA per decidere la validità di arbitrarie formule o sequenti.**

Esiste però una **procedura SEMI-automatica** che si avvale del calcolo dei sequenti $\mathbf{LC}_=$ e richiede la costruzione di contro-modelli nel caso di non validità e la descriviamo qui di seguito.

8.7.1 Procedura per stabilire validità, insoddisfacibilità, soddisfacibilità di sequenti in LC

Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$

passo 1: si provi a derivarlo in $\mathbf{LC}_=$

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se si deriva} & \Rightarrow \text{è valido ovvero è tautologia} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{vai al passo 2} \end{array} \right.$

passo 2: si costruisca un contromodello con foglia di albero che NON si chiude

se esiste contromodello \Rightarrow il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è **NON valido**

e vai al passo 3

passo 3: si provi a derivare la negazione di $\Gamma \vdash \Delta$ in $\mathbf{LC}_=$

che è $\vdash \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ se non ci sono variabili libere

oppure è $\vdash \neg\forall\bar{y}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})$ se \bar{y} è la lista che contiene tutte le variabili libere del sequente $\Gamma \vdash \Delta$

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{se si deriva} & \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ è insoddisfacibile ovvero è paradosso o meglio antinomia} \\ \text{se NON si riesce a derivare} & \text{applica il passo 2 alla negazione di } \Gamma \vdash \Delta \\ & \text{se trovi contromodello di } \neg(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}) \text{ (oppure di } \vdash \neg\forall\bar{y}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}) \text{)} \\ & \text{questo è modello di } \Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee} \\ & \text{che è quindi anche modello di } \Gamma \vdash \Delta \\ & \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \text{ è soddisfacibile} \\ & \text{e siccome è pure non valido allora } \Gamma \vdash \Delta \text{ risulta OPINIONE} \end{array} \right.$

Consigli su come applicare la procedura 8.7.1

Nell'intento di cercare una derivazione di un sequente seguendo la procedura 8.7.1 è meglio:

applicare PRIMA le regole dei connettivi proposizionali e \forall -D e \exists -S con VARIABILI NUOVE
applicare le regole \forall -S e \exists -D con TERMINI presenti nelle formule del sequente
se non si riesce a derivare il sequente a causa di una foglia non assioma che non si riesce a chiudere (ovvero non si riesce a farla diventare nodo di un ramo con assiomi come foglie), conviene costruire il contromodello falsificando il sequente che si trova lungo il ramo che finisce nella foglia non assioma PRIMA di una seconda applicazione di \forall -S o \exists -D

Esempio: si provi a determinare la validità e soddisfacibilità o meno del sequente che formalizza

Se uno è mite e gentile allora è amabile.

Se uno non è gentile allora non è amabile e neppure mite.

L'asserzione si formalizza nel sequente

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \forall \mathbf{x} (\neg \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \mathbf{A}(\mathbf{x}) \& \neg \mathbf{M}(\mathbf{x}))$$

usando:

$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è mite

$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è gentile

$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ è amabile

che proviamo a vedere se si deriva seguendo lo schema in sezione 8.7.1.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), A(x) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg A(x), G(x)} \neg\text{-D}}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg A(x) \& \neg M(x), G(x)} \&\text{-D}}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash G(x), \neg A(x) \& \neg M(x)} \text{sc}_{dx}}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), \neg G(x) \vdash \neg A(x) \& \neg M(x)} \neg\text{-S}}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x)} \rightarrow\text{-D}}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \forall x (\neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x))} \forall\text{-D}$$

ove il primo $\forall\text{-D}$ si applica perchè \mathbf{x} NON compare libera nel resto del sequente. E poi ci accorgiamo che non ha senso continuare... Infatti continuando a derivare la seconda foglia dell'albero precedente otteniamo

$$\frac{\frac{\frac{\text{ax-id}}{M(x), \forall x (\dots) \vdash M(x)} \quad M(x), \forall x (\dots) \vdash G(x), G(x)}{M(x), \forall x (\dots) \vdash M(x) \& G(x), G(x)} \&\text{-D}}{\frac{M(x), \forall x (\dots), A(x) \vdash G(x)}{M(x), \forall x (\dots), M(x) \& G(x) \rightarrow A(x) \vdash G(x)} \forall\text{-S}}{\frac{M(x), \forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash G(x)}{\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)} \text{sc}_{dx}} \rightarrow\text{-S}$$

e ci accorgiamo che la foglia

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\dots) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

in alto a dx risulta equivalente al sequente dell'albero prima di $\forall\text{-S}$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

a meno di una ripetizione di $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ nelle conclusioni. E analogamente continuando a derivare l'albero sopra con $\forall\text{-S}$ dopo uno scambio non otteniamo nulla di nuovo... e quindi ci conviene falsificare il sequente dell'albero prima di applicare $\forall\text{-S}$, ovvero

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} (\mathbf{M}(\mathbf{x}) \& \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x})) \vdash \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

A tal scopo prendiamo un dominio \mathbf{D} non vuoto qualsiasi e poniamo:

$\nu(\mathbf{G}(\mathbf{x})_{[x]})(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ per ogni \mathbf{d} in \mathbf{D} ,

$\nu(\mathbf{M}(\mathbf{x})_{[x]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ per ogni \mathbf{d} in \mathbf{D}

e $\nu(\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[x]})$ è una funzione definita a piacere.

La valutazione ν è a questo punto univocamente definita per il lemma 8.44 nel linguaggio predicativo con i soli simboli atomici che compaiono nel sequente di partenza e quindi pure il modello è individuato.

Poi si noti che

$$\nu((\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)))_{[1]}) = 1$$

poichè per ogni d in D si ha $\nu((M(x) \& G(x))_{[x]})(d) = 0$ e quindi tale modello risulta un *contromodello* del sequente

$$\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)$$

(ovvero lo falsifica) perchè su un elemento del dominio (in realtà su ogni elemento del dominio) le **premesse** sono **vere** mentre le **conclusioni** sono **false**, da cui il sequente di partenza

$$\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)) \vdash \forall x (\neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x))$$

risulta **non valido** perchè abbiamo adottato solo regole la cui inversa è valida per arrivare alla foglia

$$\forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)), M(x) \vdash G(x)$$

MORALE= abbiamo costruito un contromodello pensando ad un dominio in cui **TUTTI gli individui d NON sono gentili** ma **tutti sono miti** senza considerare se sono amabili o meno.

In questo modo NON è vero che **se uno non è gentile NON è neppure mite** senza per questo contraddire il fatto che **se uno è gentile e mite allora è amabile** che vale perchè l'antecedente di questa implicazione non si verifica mai nel modello (non ci sono infatti nel nostro dominio individui gentili!!).

Poi procediamo a studiare la soddisfacibilità del sequente di partenza che per comodità abbreviamo come segue

$$\vdash pr_1 \rightarrow pr_2$$

ove $pr_1 \equiv \forall x (M(x) \& G(x) \rightarrow A(x))$

$pr_2 \equiv \forall x (\neg G(x) \rightarrow \neg A(x) \& \neg M(x))$.

A tal scopo proviamo a derivare la negazione della formula che rappresenta il sequente ovvero

$$\vdash \neg (pr_1 \rightarrow pr_2)$$

e si ottiene (sviluppando l'albero nel modo ottimale, ovvero senza applicare \forall -S inutilmente..)

$$\frac{\frac{\frac{M(x), G(x) \vdash A(x)}{M(x) \& G(x) \vdash A(x)} \&-D}{M(x) \& G(x) \rightarrow A(x)} \rightarrow -D}{\vdash pr_1} \forall -D \quad \frac{pr_2 \vdash}{\vdash \neg (pr_1 \rightarrow pr_2)} \rightarrow -D$$

ove l'applicazione di \forall -D è lecita perchè la variabile x non appare libera nel sequente conclusione. Ora per ottenere un contromodello della negazione del sequente di partenza, e quindi un modello del sequente di partenza basta falsificare la foglia

$$M(x), G(x) \vdash A(x)$$

mandando sempre a **1** l'interpretazione di $M(x)$ e $G(x)$ e a **0** quella di $A(x)$: ovvero dato un dominio D non vuoto si definisce

$$\begin{aligned} \nu(M(x)_{[x]})(d) &= 1 \text{ per ogni } d \in D \\ \nu(G(x)_{[x]})(d) &= 1 \text{ per ogni } d \in D \\ \nu(A(x)_{[x]})(d) &= 0 \text{ per ogni } d \in D \end{aligned}$$

La valutazione ν è a questo punto univocamente definita per il lemma 8.44 nel linguaggio predicativo con i soli simboli atomici che compaiono nel sequente di partenza e quindi pure il modello è individuato. E in tal modello si verifica che **per ogni** $d \in D$

$$\nu((M(x) \& G(x) \rightarrow A(x))_{[x]})(d) = (\nu(M(x)_{[x]})(d) \wedge \nu(G(x)_{[x]})(d)) \rightarrow \nu(A(x)_{[x]})(d) = 1 \& 1 \rightarrow 0 = 0$$

ovvero si è trovato un *contromodello per la negazione del sequente di partenza*

$$\vdash \neg(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2)$$

e dunque un *modello per il sequente di partenza*.

In conclusione, il sequente di partenza $\vdash \mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2$ sopra risulta **non valido** ma **soddisfacibile** e quindi è un **opinione** in $\mathbf{LC}_=$.

8.7.2 NON validità dell'inversa della regola \exists -Dv per la semantica classica predicativa

La **regola** \exists -Dv è valida per la semantica classica predicativa (lo si dimostri per esercizio) ma NON conserva la **validità in un modello classico predicativo** all'insù \uparrow .

Un *controesempio* è dato dal seguente esempio.

L'asserzione

È arrivato in stazione il treno per Venezia \vdash Marco sale sul treno per Venezia.

È arrivato in stazione il treno per Venezia \vdash Qualcuno sale sul treno per Venezia.

si può formalizzare in

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}$$

usando

$A(x)$ ="x è arrivato in stazione"

$S(x, y)$ ="x sale su y.

m ="Marco"

v ="treno per Venezia"

Ora

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}$$

è un'applicazione della regola \exists -Dv che sappiamo essere valida. Però la sua inversa non è vera nel modello classico predicativo seguente:

$\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{Marco}, \mathbf{trenoVE}, \mathbf{Piero}\}$

$\nu(\mathbf{v}_{[1]}) \equiv \mathbf{trenoVE}$

$\nu(\mathbf{m}_{[1]}) \equiv \mathbf{Marco}$

$\nu(\mathbf{p}_{[1]}) \equiv \mathbf{Piero}$

$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[x]})(\mathbf{d}) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d} = \mathbf{trenoVE}$

$\nu(\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{[x,y]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \mathbf{1}$ sse $\mathbf{d}_1 = \mathbf{Piero}$ e $\mathbf{d}_2 = \mathbf{trenoVE}$.

La valutazione ν è a questo punto univocamente definita per il lemma 8.44 nel linguaggio predicativo con i soli simboli atomici che compaiono nei sequenti coinvolti nella regola e quindi il modello classico predicativo è individuato.

E in tal modello $\nu((\exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v}))_{[1]}) = \mathbf{1}$ e così pure $\nu(\mathbf{A}(\mathbf{v})_{[1]}) = \nu(\mathbf{A}(\mathbf{x})_{[x]})(\mathbf{trenoVE}) = \mathbf{1}$ ma $\nu(\mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})_{[1]}) = \mathbf{0}$ (ovvero nel modello, il treno per Venezia è arrivato in stazione, **Piero** sale sul treno per Venezia, e quindi qualcuno ci sale, mentre invece **Marco** non ci sale). In pratica abbiamo trovato un modello in cui vale $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ma NON vale $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})$, ovvero

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\mathbf{A}(\mathbf{v}) \vdash \mathbf{S}(\mathbf{m}, \mathbf{v})}$$

NON è valida, ed essendo un'istanza della regola inversa dell'esiste veloce \exists -Dv, rende tale inversa \exists -Dv - **inv** NON valida.

Analogamente si dimostra la non validità della regola inversa della regola veloce

$$\frac{\Gamma, A(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vdash \nabla}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \nabla} \forall\text{-Sv}$$

con \mathbf{t}_{ter} termine qualsiasi, ovvero che la regola

$$\frac{\Gamma, \forall \mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vdash \nabla}{\Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{t}_{\text{ter}}) \vdash \nabla} \text{inv} - \forall\text{-Sv}$$

NON è valida. Si lascia come esercizio per il lettore di dimostrare questo fatto.

Mappa concettuale

<p>validità di LC_p tautologie formali \subseteq tautologie semantiche</p> <p>grazie a validità regole</p>	<p>completezza di LC_p tautologie semantiche \subseteq tautologie formali</p> <p>grazie a validità inverse + procedura decisione di derivabilità di sequenti in LC_p</p>
--	---

Per ogni logica

regole valide \subseteq regole ammissibili

Per logica classica proposizionale LC_p e predicativa $LC_=$

regole valida		tautologia semantica
$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$	\Leftrightarrow	$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})$
$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$	\Leftrightarrow	$(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) \& (\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) \rightarrow (\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})$

per **REGOLE** chiuse su **SOSTITUZIONI** variabili proposizionali con formule qualsiasi in logica classica proposizionale LC_p

regole valide = regole ammissibili

Motivo: perchè

contromodello della regola

\Downarrow

esempio di **NON** ammissibilità istanza della regola
 sostituendo nella regola **variabili proposizionali vere** nel contromodello con **tt**
 sostituendo nella regola **variabili proposizionali false** nel contromodello con **\perp**

Esempio: La regola

$$\frac{\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{B}} *$$

chiusa su TUTTE le sostituzioni delle sue variabili libere, altrimenti indicata con la scrittura

$$\frac{\text{pr}_1 \vdash \text{pr}_2}{\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2 \vdash \text{pr}_2} *$$

NON è valida in quanto NON è valida proprio la sua istanza

$$\frac{\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}} *$$

nel linguaggio \mathcal{L} con variabili proposizionali \mathbf{A} e \mathbf{B} perchè non valida per la valutazione

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

definita in tal modo

$$\nu(\mathbf{A}) = 0 \quad \nu(\mathbf{B}) = 1$$

in quanto

$$\nu(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = 1 \quad \nu(\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) = 0$$

Ma dall'altra parte la stessa regola diventa NON ammissibile nella sua istanza

$$\frac{\perp \vdash \mathbf{tt}}{\perp \vee \mathbf{tt} \vdash \perp} *$$

ponendo \perp al posto di \mathbf{A} e \mathbf{tt} al posto di \mathbf{B} come indicato dal contromodello.

Attenzione: regole proposizionali NON chiuse su sostituzioni di variabili proposizionali, ad esempio la SOLA istanza

$$\frac{\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vdash \mathbf{B}} *$$

possono essere banalmente ammissibile (perchè il sequente premessa NON è derivabile) ma NON valide. Ma in letteratura con il termine **regola** di una logica si intendono scritte

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2} \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

chiusa su TUTTE le sostituzioni delle variabili proposizionali con proposizioni qualsiasi, all'interno di logiche proposizionali, oppure chiuse su TUTTE le sostituzioni delle variabili predicative che compaiono (=gli atomi), eccetto il predicato atomico di uguaglianza (che NON varia in quanto ha regole specifiche nella logica) con formule qualsiasi all'interno di logiche predicative.

Per **REGOLE** chiuse su **SOSTITUZIONI** di predicati atomici (diversi dall'uguaglianza!) con **formule** qualsiasi in logica classica predicativa con uguaglianza $LC_=$

regole valide \subsetneq regole ammissibili

Controesempio: la regola (chiusa banalmente su sostituzioni di predicati atomici in quanto NON ve ne sono!)

$$\frac{\vdash \exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}{\vdash \perp} **$$

è banalmente *ammissibile* in $\mathbf{LC}_=$ ma *NON* è *valida* in quanto il sequente

$$\vdash \exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \rightarrow \perp$$

NON è una tautologia (lo si dimostri per esercizio).

9 Teorie dell'aritmetica di Peano e di Heyting

Diamo qui di seguito la definizione di teoria classica e di teoria intuizionista che corrispondono al concetto di estendere la logica classica o intuizionista con assiomi a patto di aggiungere **in modo primitivo la regola di composizione**. Il motivo è che *in una teoria NON è detto che la regola di composizione sia eliminabile, ovvero NON è detto che tale regola sia ammissibile nel calcolo senza questa regola*. Controesempi famosi di ciò sono proprio le teorie dell'aritmetica sia in versione classica che intuizionista.

Def. 9.1 Con il termine **teoria classica** si intende un'estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza **DNC₌** formulata in un linguaggio predicativo L con l'aggiunta di **assiomi extralogici** e della **regola di composizione**

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma_1, \mathbf{fr}, \Gamma_3 \vdash \beta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \beta} \text{comp}_{sx}$$

ovvero in breve

TEORIA CLASSICA = logica CLASSICA + regola composizione + assiomi EXTRALOGICI

Def. 9.2 Con il termine **teoria intuizionista** si intende un'estensione del calcolo della logica classica con uguaglianza **DNI₌** formulata in un linguaggio predicativo L con l'aggiunta di **assiomi extralogici** e della **regola di composizione**

$$\frac{\Gamma_2 \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma_1, \mathbf{fr}, \Gamma_3 \vdash \beta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \beta} \text{comp}_{sx}$$

ovvero in breve

TEORIA INTUZIONISTA = logica INTUZIONISTA + regola composizione + assiomi EXTRALOGICI

Grazie ai teoremi di equivalenza dei calcoli alla Gentzen classico e intuizionista con le rispettive versioni in deduzione naturale in 5.57 e 5.67, e al fatto che una prova usa *un numero finito di assiomi* si può dimostrare che

Proposition 9.3 Una teoria classica \mathcal{T} ottenuta aggiungendo a **DNC₌** uno schema di finito di assiomi Ax_1, \dots, Ax_n è equivalente all'estensione del calcolo **LC₌** con la regola di composizione in forma generale e gli assiomi Ax_1, \dots, Ax_n .

Proposition 9.4 Una teoria intuizionista \mathcal{T}' ottenuta aggiungendo a **DNI₌** uno schema di finito di assiomi Ax_1, \dots, Ax_n è equivalente all'estensione del calcolo **LI₌** con la regola di composizione in forma generale e lo schema di assiomi Ax_1, \dots, Ax_n .

In sostanza, una teoria classica (intuizionista) può essere definita come l'estensione di un qualsiasi calcolo formale per la logica classica (intuizionista) con l'aggiunta di assiomi e corrispondenti regole di composizione a patto che il concetto di derivazione in tali calcoli sia un albero finito ovvero faccia uso di un numero finito di assiomi.

Def. 9.5 (sequente derivabile in una teoria \mathcal{T}) Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **derivabile** nella **teoria predicativa** classica (intuizionista) \mathcal{T} se esiste un albero avente

- $\Gamma \vdash \Delta$ come radice;
- ogni foglia è istanza di un assioma di \mathcal{T} ossia o di un assioma logico di $\mathbf{DNC}_=$ ($\mathbf{DNI}_=$) o di un **assioma extralogico specifico** di \mathcal{T} ;
- l'albero è costruito applicando istanze delle regole del calcolo di T ovvero delle regole di $\mathbf{DNC}_=$ ($\mathbf{DNI}_=$) e della regola di composizione.

Def. 9.6 Una formula \mathbf{fr} si dice **teorema** di una specifica teoria \mathcal{T} se è *derivabile nella teoria \mathcal{T}* (ovvero è una “*tautologia di \mathcal{T}* ”).

Osservazione: Tutte le tautologie classiche sono teoremi di ogni teoria predicativa!!!

9.0.1 Come derivare in una teoria

Come nel caso delle teorie proposizionali anche per le teorie predicative la regola di composizione si può usare in due modi che qui ripetiamo per comodità del lettore supponendo che \mathcal{T} sia una teoria predicativa determinata dagli assiomi extralogici

- Ax.1
- ...
- Ax.k

1. Uso della regola di composizione su assiomi:

Le formule \mathbf{fr} che si ottengono da una derivazione in $\mathbf{LC}_=$ di \mathbf{fr} con l'uso di assiomi extralogici $\mathbf{Ax.i_1}, \mathbf{Ax.i_2} \dots$ come premesse diventano *teoremi della teoria \mathcal{T}* componendo con gli assiomi.

Infatti, per esempio se si è costruita una *derivazione π con due assiomi extralogici come premesse*

$$\frac{\pi}{\mathbf{Ax.i_1}, \mathbf{Ax.i_2} \vdash \mathbf{fr}}$$

si può comporre questa derivazione con la regola di composizione fino a trovare una derivazione di $\vdash \mathbf{fr}$ nella teoria \mathcal{T} in tal modo

$$\frac{\vdash \mathbf{Ax.i_1} \quad \frac{\vdash \mathbf{Ax.i_2} \quad \frac{\pi}{\mathbf{Ax.i_1}, \mathbf{Ax.i_2} \vdash \mathbf{fr}}}{\mathbf{Ax.i_1} \vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}}{\vdash \mathbf{fr}} \text{ comp}$$

\Rightarrow e quindi la derivazione finale mostra che \mathbf{fr} è un **teorema della teoria T**.

2. Uso della regola di composizione su teoremi già noti:

IN UNA TEORIA LA CONOSCENZA SI ACCUMULA con la regola comp:

Se in una teoria si è *già dimostrato il teorema* $\vdash T_1$ ovvero si è già trovata una derivazione π_1

$$\frac{\pi_1}{\vdash T_1}$$

allora *si può usare la formula* T_1 *come premessa per derivare un'altra formula* T_2 .

Infatti costruita una derivazione π_2 nella teoria del tipo

$$\frac{\pi_2}{T_1 \vdash T_2}$$

allora **si possono comporre le derivazioni** π_1 e π_2 **con comp** per ottenere una derivazione di $\vdash T_2$ (senza premesse)!! nella teoria in tal modo

$$\frac{\frac{\pi_1}{\vdash T_1} \quad \frac{\pi_2}{T_1 \vdash T_2}}{\vdash T_2} \text{ comp}$$

ovvero

in una teoria si possono derivare nuovi teoremi componendo con derivazioni di teoremi già noti

Si noti che le regole di composizioni NON sono invertibili nè valide in quanto non conservano la derivabilità di un sequente o la sua validità in un modello dal basso verso l'alto come si vede da questo controesempio

$$\frac{\vdash A \quad \text{NON Valido} \quad A \vdash C \rightarrow C \quad \text{Valido}}{\vdash C \rightarrow C \quad \text{Valido}} \text{ comp}$$

che funziona per provare entrambe le inverse della regola di composizione NON sono nè invertibili nè valide in un modello.

Chiaramente una teoria classica o intuizionista è determinata dai SOLI assiomi extralogici.

9.0.2 Attenzione alla consistenza di una teoria

L'aggiunta delle regole di **composizione** e di assiomi extralogici ad un calcolo per formare una teoria fa sì che NON sia più evidente che la teoria è consistente ovvero NON contraddittoria ovvero che $\vdash \perp$ NON sia derivabile nella teoria.

9.1 La teoria classica dell'Aritmetica di Peano PA

Il linguaggio per l' **aritmetica di Peano** è il linguaggio predicativo a cui aggiungiamo la costante

$$0$$

e i seguenti 3 simboli di funzione:

$$s(x) \quad x+y \quad x \cdot y$$

quello del successore di x , quello della somma e quello del prodotto.

La **teoria dell'aritmetica di Peano**, in breve **PA** è una teoria ottenuta aggiungendo a **DNC₌** (o equivalentemente a **LC₌**) la regola di composizione

$$\frac{\Gamma_2 \vdash fr_1 \quad \Gamma_1, fr_1, \Gamma_3 \vdash fr_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash fr_2} \text{ comp}$$

e i seguenti assiomi *extra-logici*:

$$\mathbf{Ax1.} \vdash \forall x \, s(x) \neq 0$$

$$\mathbf{Ax2.} \vdash \forall x \, \forall y \, (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

$$\mathbf{Ax3.} \vdash \forall x \, x + 0 = x$$

$$\mathbf{Ax4.} \vdash \forall x \, \forall y \, x + s(y) = s(x + y)$$

$$\mathbf{Ax5.} \vdash \forall x \, x \cdot 0 = 0$$

$$\mathbf{Ax6.} \vdash \forall x \, \forall y \, x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$\mathbf{Ax7.} \vdash fr(0) \ \& \ \forall x \, (fr(x) \rightarrow fr(s(x))) \rightarrow \forall x \, fr(x)$$

In tale teoria il numerale n si rappresenta in tal modo

$$n \equiv \underbrace{s(s \dots (0))}_{n\text{-volte}}$$

e quindi per esempio

$$1 \equiv s(0)$$

$$2 \equiv s(s(0))$$

esempio di derivazione in PA usando LC₌

$$\frac{\frac{\frac{0+0=0 \vdash 0+0=0+0}{\forall x (x+0=x), 0+0=0 \vdash 0=0+0} =-S}{\vdash Ax\ 3. \quad Ax\ 3. \vdash 0=0+0} \text{ comp}_{sx}}{\vdash 0=0+0} \text{ comp}_{sx}$$

altro esempio di derivazione in PA usando LC₌

$$\frac{\frac{\frac{0+0=0 \vdash 0+0=0}{\forall x (x+0=x) \vdash 0+0=0} \forall-S_v}{\vdash Ax\ 3. \quad Ax\ 3. \vdash 0=0+0} \text{ comp}_{sx}}{\vdash 0=0+0} \text{ comp}_{sx}$$

Theorem 9.9 (Rappresentazione delle funzioni calcolabili in PA) In aritmetica di Peano **PA** si possono rappresentare tutte le funzioni dai naturali ai naturali *calcolabili da una macchina di Turing* indicate nel metalinguaggio con

$$f : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$$

mediante predicati $\mathbf{R}_f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{k})$ tali per cui

$$f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) = \mathbf{k} \text{ sse } \vdash \mathbf{R}_f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{k}) \text{ è derivabile in PA}$$

$$f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) \neq \mathbf{k} \text{ sse } \vdash \neg \mathbf{R}_f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{k}) \text{ è derivabile in PA}$$

e inoltre

$$\vdash \forall \mathbf{x}_1 \dots \forall \mathbf{x}_m \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{z} (\mathbf{R}_f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}) \ \& \ \mathbf{R}_f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}) \text{ è derivabile in PA}$$

Theorem 9.10 (Rappresentazione delle funzioni calcolabili in HA) In aritmetica di Heyting **HA** si possono rappresentare tutte le funzioni *calcolabili* dai naturali ai naturali nel metalinguaggio indicate con

$$f : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$$

mediante predicati $\mathbf{R}(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{k})$ tali per cui

$$f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) = \mathbf{k} \text{ sse } \vdash \mathbf{R}_f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{k}) \text{ è derivabile in HA}$$

$$f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) \neq \mathbf{k} \text{ sse } \vdash \neg \mathbf{R}_f(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{k}) \text{ è derivabile in HA}$$

e inoltre

$$\vdash \forall \mathbf{x}_1 \dots \forall \mathbf{x}_m \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{z} (\mathbf{R}_f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}) \ \& \ \mathbf{R}_f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}) \text{ è derivabile in HA}$$

In verità si dimostra che *le funzioni tra naturali rappresentabili in aritmetica classica o intuizionista COINCIDONO* con le *funzioni Turing-calcolabili* che a loro volta coincidono con le *funzioni ricorsive*. (si veda “Classical Recursion Theory”, P. Odifreddi, 1989).

Considerato queste proprietà di **HA** e di **PA** nel seguito in entrambe le teorie usiamo queste abbreviazioni: per ogni predicato $\alpha(x)$ e per ogni funzione calcolabile $f : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$ poniamo

$$\alpha(f(x_1, \dots, x_n)) \equiv \exists y (\alpha(y) \ \& \ R_f(x_1, \dots, x_n, y))$$

(si ricordi che \mathbf{R}_f è una relazione funzionale nell’ultima variabile!)

e date due funzioni calcolabili $f : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$ e $g : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \equiv \forall y (R_f(x_1, \dots, x_n, y) \leftrightarrow R_g(x_1, \dots, x_n, y))$$

In sostanza ci permettiamo di utilizzare i nomi per funzioni in aritmetica così’ come li usiamo nel linguaggio della pratica matematica comune.

Lemma 9.11 Usando le abbreviazioni sopra, date due funzioni calcolabili $f : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$ e $g : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$ e un predicato $\alpha(x)$ nel linguaggio dell’aritmetica di **HA** (di **PA**) se $\vdash f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ è derivabile in **HA** (in **PA**), allora pure

$$\vdash \alpha(f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)) \leftrightarrow \alpha(g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))$$

è derivabile in **HA**.

Ricordiamo anche un famoso risultato

Def. 9.12 La classe delle funzioni *primitive ricorsive* PRIM è la più piccola classe di funzioni $f : \mathbf{Nat}^n \rightarrow \mathbf{Nat}$ a valori nei numeri naturali *Nat* e dipendenti da un numero finito di argomenti che variano sempre sui numeri naturali che è chiusa sulle seguenti regole:

- la funzione $f : Nat^n \rightarrow Nat$ che dà come valore costantemente zero è in PRIM;
- la funzione successore $succ : Nat \rightarrow Nat$ tale che $succ(n) = n + 1$ per ogni numero naturale n è in PRIM;
- la funzione proiezione i –esima con $i \leq m$ che associa ad un m-upla (n_1, \dots, n_m) la componente n_i e denotata in tal modo

$$\pi_i : Nat^m \rightarrow Nat$$

è in PRIM;

- data una funzione $f : Nat^k \rightarrow Nat$ in PRIM e date delle funzioni

$$g_i : Nat^m \rightarrow Nat$$

per $j \in \{1, \dots, k\}$ tutte in PRIM, allora la funzione che associa ad un m-plua (n_1, \dots, n_m) il valore $f(g_1(n_1, \dots, n_m), \dots, g_k(n_1, \dots, n_m))$ denotata in tal modo

$$f \cdot \langle g_1, \dots, g_k \rangle : Nat^m \rightarrow Nat$$

è in PRIM;

- date $g : Nat^m \rightarrow Nat$ e $h : Nat \times Nat \times Nat^m \rightarrow Nat$ funzioni in PRIM la funzione $f : Nat \times Nat^m \rightarrow Nat$ definita in tal modo

$$\begin{aligned} f(0, n_1, \dots, n_m) &\equiv g(n_1, \dots, n_m) \\ f(k+1, n_1, \dots, n_m) &\equiv h(k, f(k, n_1, \dots, n_m), n_1, \dots, n_m) \end{aligned}$$

è in PRIM.

Def. 9.13 Una relazione $R(x, y) [x \in Nat, y \in Nat]$ è in PRIM se e solo se la sua funzione caratteristica

$$\chi_R(n_1, n_2) \begin{cases} 1 & \text{se } R(n_1, n_2) \text{ vale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ricordiamo che una relazione $n + 1$ -aria $R(x_1, \dots, x_m, k)$ con $x_i \in Nat$ per $i \in \{1, \dots, m\}$ e $k \in Nat$ si dice una *funzione parziale* se per ogni x_1, \dots, x_m esiste al più un unico k tale che $R(x_1, \dots, x_m, k)$ vale. Si dice che la funzione parziale *converge* su la m-pla n_1, \dots, n_m se esiste k tale che $R(n_1, \dots, n_m, k)$ vale.

Def. 9.14 La classe delle funzioni parziali *ricorsive* REC è la più piccola classe di funzioni PARZIALI $f : Nat^n \rightarrow Nat$ a valori nei numeri naturali Nat e dipendenti da un numero finito di argomenti che variano sempre sui numeri naturali che è chiusa sulle seguenti regole:

- la funzione $f : Nat^n \rightarrow Nat$ che dà come valore costantemente zero è in REC;
- la funzione successore $succ : Nat \rightarrow Nat$ tale che $succ(n) = n + 1$ per ogni numero naturale n è in REC;
- la funzione proiezione i –esima con $i \leq m$ che associa ad un m-upla (n_1, \dots, n_m) la componente n_i e denotata in tal modo

$$\pi_i : Nat^m \rightarrow Nat$$

è in REC;

- data una funzione $f : Nat^k \rightarrow Nat$ in REC e date delle funzioni

$$g_i : Nat^m \rightarrow Nat$$

per $j \in \{1, \dots, k\}$ tutte in REC, allora la funzione che associa ad un m-plua (n_1, \dots, n_m) il valore $f(g_1(n_1, \dots, n_m), \dots, g_k(n_1, \dots, n_m))$ denotata

$$f \cdot \langle g_1, \dots, g_k \rangle : Nat^m \rightarrow Nat$$

è in REC;

- date $g : Nat^m \rightarrow Nat$ e $h : Nat \times Nat \times Nat^m \rightarrow Nat$ funzioni in REC la funzione $f : Nat \times Nat^m \rightarrow Nat$ definita in tal modo

$$\begin{aligned} f(0, n_1, \dots, n_m) &\equiv g(n_1, \dots, n_m) \\ f(k+1, N-1, \dots, n_m) &\equiv h(k, f(k, n_1, \dots, n_m), n_1, \dots, n_m) \end{aligned}$$

è in REC;

- data una funzione parziale $g : Nat \times Nat^m \rightarrow Nat$ in REC allora la funzione parziale

$$f(k, n_1, \dots, n_m) \equiv \min\{y \in Nat \mid g(y, n_1, \dots, n_m) = 0\}$$

è in REC.

Theorem 9.15 La classe delle funzioni parziali computabili da una macchina di Turing coincide con la classe delle funzioni ricorsive.

Si noti che esiste una *biezione calcolabile* il prodotto di copie finite dei numeri naturali Nat^m e i numeri naturali stessi Nat . Quindi possiamo pensare che tutte le funzioni calcolabili si rappresentino come funzioni parziali da Nat a Nat .

Lemma 9.16 La classe delle funzioni parziali ricorsive è numerabile con una codifica

$$\phi_- : Nat \rightarrow \{ \text{funzioni parziali ricorsive da } Nat \text{ a } Nat \}$$

che è biettiva.

Ora andiamo a dimostrare un famoso risultato il cui significato è equivalente al famoso problema della FERMATA (Halting problem) ovvero che *NON esiste un programma che riesce a dire se un dato altro programma termina o diverge su un dato input* che usa il trucco della *diagonalizzazione*.

Theorem 9.17 (Halting problem) La funzione

$$Halt(n, k) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_n(k) \text{ converge} \\ 0 & \text{se } \phi_n(k) \text{ non converge} \end{cases}$$

NON è calcolabile, e quindi neppure ricorsiva.

Dim. Se la funzione $Halt(-, -)$ fosse calcolabile, allora potremmo definire la seguente funzione parziale calcolabile (o ricorsiva)

$$diag(n) \equiv \begin{cases} \phi_n(n) + 1 & \text{se } Halt(n, n) = 1 \\ 0 & \text{se } Halt(n, n) = 0 \end{cases}$$

Ora sia k il codice della funzione calcolabile $diag(-)$. Dato che $Halt(-, -)$ è una funzione abbiamo solo due casi: o $Halt(k, k) = 1$ oppure $Halt(k, k) = 0$.

Analizziamo questi due casi:

1. se $Halt(k, k) = 1$ ovvero $diag(k)$ converge si ha

$$\phi_k(k) = diag(k) \equiv \phi_k(k) + 1$$

il che è assurdo.

2. se $Halt(k, k) = 0$ ovvero $diag(k) = \phi_k(k)$ NON converge si ha

$$\phi_k(k) = diag(k) \equiv 0$$

ovvero in realtà $\phi_k(k)$ converge, il che è assurdo.

Dunque la funzione $Halt(-, -)$ NON è calcolabile, ovvero ricorsiva.

Infine concludiamo con questa definizione

Def. 9.18 Una teoria \mathcal{T} classica o intuizionista in un linguaggio predicativo \mathcal{L} è *completa* se per ogni formula \mathbf{fr} di \mathcal{L} , allora $\vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathcal{T} oppure $\vdash \neg \mathbf{fr}$ è derivabile in \mathcal{T} .

Esempi di teorie complete: la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica fissata, la teoria degli ordini densi senza estremi.

10 Teorema I e II di incompletezza di Gödel in aritmetica intuizionista HA e in PA

Diamo per scontato che

- esiste una funzione computabile che codifica in modo iniettivo con numeri naturali le formule di **HA**:

$$\ulcorner (-) \urcorner : \text{FrmHA} \longrightarrow \text{Nat}$$

ove con $\ulcorner \text{fr} \urcorner$ si denota il codice di una formula **fr** di **HA** e si suppone che **0** non sia il codice di alcuna formula.

Siccome le formule di **PA** coincidono con quelle di **HA**, ovvero $\text{FrmHA} = \text{FrmPA}$ allora abbiamo pure:

$$\ulcorner (-) \urcorner : \text{FrmPA} \longrightarrow \text{Nat}$$

- possiamo rappresentare in **HA**, ed anche allo stesso modo in **PA**, il *Gödel provability predicate*

$$\text{pr}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

che afferma che per due naturali $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Nat}$, il numero **x** codifica una derivazione della formula codificata da **y**. Il codice di una formula **fr** è denotato con il simbolo $\ulcorner \text{fr} \urcorner$.

Poi introduciamo il predicato

$$\mathbf{Teor}(\mathbf{y}) \equiv \exists \mathbf{x} \text{pr}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

1. Se $\vdash \text{fr}$ è derivabile in **HA** allora $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr} \urcorner)$ è derivabile in **HA**.
Lo stesso vale per **PA**, ovvero se $\vdash \text{fr}$ è derivabile in **PA**, allora $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr} \urcorner)$ è derivabile in **PA**.
2. $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr} \urcorner) \urcorner)$ è derivabile in **HA** e quindi in **PA**.
3. $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2 \urcorner) \longrightarrow (\mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_1 \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_2 \urcorner))$ è derivabile in **HA** e quindi in **PA**.

Poi dalle condizioni sopra deduciamo le seguenti proprietà:

Lemma 10.1 *Se $\vdash \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2$ è derivabile in **HA** allora pure $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_1 \urcorner) \rightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_2 \urcorner)$ lo è in **HA**.*

*Lo stesso vale per **PA**: se $\vdash \text{fr}_1 \rightarrow \text{fr}_2$ è derivabile in **PA** allora pure $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_1 \urcorner) \rightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_2 \urcorner)$ lo è in **PA**.*

Dim. Segue dalle condizioni 1) e 3) e dalle proprietà logiche dell'equiprovabilità.

Lemma 10.2 *È derivabile in **HA**, e quindi in **PA**,*

$$\vdash_{\text{HA}} \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_1 \urcorner) \wedge \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_2 \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \text{fr}_1 \wedge \text{fr}_2 \urcorner)$$

Dim. Ricorda che $\vdash \text{fr}_1 \rightarrow (\text{fr}_2 \rightarrow \text{fr}_1 \wedge \text{fr}_2)$ è derivabile in **HA** e poi usa il lemma 10.1.

In **HA** e anche in **PA**, possiamo dimostrare il seguente lemma di diagonalizzazione:

Lemma 10.3 (diagonalization) *Per ogni formula $\alpha(\mathbf{x})$ di **HA** con $VL(\alpha(x)) = \{x\}$ c'è un enunciato **G** tale che*

$$\vdash \mathbf{G} \longleftrightarrow \alpha(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$$

*è derivabile in **HA**.*

*Lo stesso vale in **PA**: per ogni formula $\alpha(\mathbf{x})$ di **PA** con $VL(\alpha(x)) = \{x\}$ c'è un enunciato **G** tale che*

$$\vdash \mathbf{G} \longleftrightarrow \alpha(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$$

*è derivabile in **HA**.*

Dim.

Si consideri la seguente funzione calcolabile

$$\text{sub}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \equiv \begin{cases} \ulcorner \beta(\mathbf{m}) \urcorner & \text{se } \mathbf{n} = \ulcorner \beta(\mathbf{x}) \urcorner \text{ per } \beta(\mathbf{x}) \text{ formula con } \mathbf{VL}(\beta(\mathbf{x})) = \{\mathbf{x}\} \\ \mathbf{0} & \text{se } \mathbf{n} \neq \ulcorner \beta(\mathbf{x}) \urcorner \end{cases}$$

E poi si pone

$$\mathbf{k} = \ulcorner \alpha(\text{sub}(\mathbf{x}, \mathbf{x})) \urcorner \quad \text{e poi} \quad \mathbf{G} \equiv \alpha(\text{sub}(\mathbf{k}, \mathbf{k}))$$

Infatti si noti che in **HA** per definizione di $\text{sub}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ si deriva

$$\vdash \alpha(\text{sub}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) \leftrightarrow \alpha(\text{sub}(\ulcorner \alpha(\text{sub}(\mathbf{x}, \mathbf{x})) \urcorner, \mathbf{k}))$$

ed anche

$$\vdash \alpha(\text{sub}(\ulcorner \alpha(\text{sub}(\mathbf{x}, \mathbf{x})) \urcorner, \mathbf{k})) \leftrightarrow \alpha(\ulcorner \alpha(\text{sub}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) \urcorner)$$

da cui si conclude che

$$\vdash \alpha(\text{sub}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) \leftrightarrow \alpha(\ulcorner \alpha(\text{sub}(\mathbf{k}, \mathbf{k})) \urcorner)$$

è derivabile in **HA** ed anche in **PA**.

Ora possiamo applicare il lemma di diagonalizzazione 10.3 al predicato $\neg \mathbf{Teor}(\mathbf{x})$ con \mathbf{x} che varia sui naturali e trovare la famosa *la formula di Gödel*:

Def. 10.4 La formula **G** ottenuta dalla dimostrazione del lemma di diagonalizzazione 10.3 al predicato $\neg \mathbf{Teor}(\mathbf{x})$ tale che

$$\vdash \mathbf{G} \leftrightarrow \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$$

è derivabile in **HA**, ed anche in **PA**, è detta *la formula di Gödel*.

Ora siamo pronti a dimostrare che:

Corollary 10.5 (inderivabilità intuizionista ed aritmetica della formula di Gödel) Se **HA** è consistente allora la formula di Gödel NON è derivabile in **HA**, ovvero

$$\vdash \mathbf{G}$$

NON è derivabile in **HA**.

Dim. Supponiamo che $\vdash \mathbf{G}$ sia derivabile in **HA**. Allora dalla derivabilità di $\vdash \mathbf{G} \leftrightarrow \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ in **HA**, otteniamo che pure $\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ è derivabile in **HA**. Ma dall'assunzione che $\vdash \mathbf{G}$ sia derivabile in **HA** assieme alla condizione 1) di **Teor** segue che pure $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ è derivabile in **HA** e con ciò concludiamo che **HA** è inconsistente contro l'ipotesi. Perciò $\vdash \mathbf{G}$ NON è derivabile in **HA**.

Con la stessa dimostrazione si conclude anche che:

Corollary 10.6 (inderivabilità classica ed aritmetica della formula di Gödel) Se **PA** è consistente allora la formula di Gödel NON è derivabile in **PA**, ovvero

$$\vdash \mathbf{G}$$

NON è derivabile in **PA**.

Lemma 10.7 In **HA** e quindi in **PA** esiste una derivazione di

$$\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{G}$$

Proof. Dalla derivabilità di $\vdash \mathbf{G} \longleftrightarrow \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ in **HA**, per contrapposizione dell'implicazione intuizionista, ovvero grazie alla tautologia intuizionista

$$\vdash (\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2) \longrightarrow (\neg \mathbf{fr}_2 \rightarrow \neg \mathbf{fr}_1)$$

concludiamo che è derivabile in **HA** pure

$$\vdash \neg \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \neg \mathbf{G}$$

e dalla derivabilità di $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \neg \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ otteniamo che $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \neg \mathbf{G}$ è pure derivabile in **HA**. Ora, dal lemma 10.1, otteniamo la derivabilità in **HA** di

$$\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \neg \mathbf{G} \urcorner)$$

Ora da questo assieme alla condizione 2) di **Teor** otteniamo che è derivabile

$$\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \neg \mathbf{G} \urcorner)$$

e ovviamente che è derivabile pure a $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \neg \mathbf{G} \urcorner) \wedge \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$. Ora questo fatto unito alla derivabilità di $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \neg \mathbf{G} \urcorner) \wedge \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \wedge \neg \mathbf{G} \urcorner)$ grazie al lemma 10.2 ci permette di ottenere la derivabilità in **HA** di

$$\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \wedge \neg \mathbf{G} \urcorner).$$

Poi, quest'ultimo fatto unito all'applicazione del lemma 10.1 al sequente $\vdash \mathbf{G} \wedge \neg \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1}$ che è derivabile in **HA**, otteniamo che è derivabile in **HA** $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner)$. Per contrapposizione dell'implicazione intuizionista concludiamo la derivabilità in **HA** di

$$\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner) \longrightarrow \neg \mathbf{Teor}(\mathbf{G}).$$

che unita alla derivabilità in **HA** di $\vdash \mathbf{G} \longleftrightarrow \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$ ci permette di concludere la tesi.

Remark 10.8 Nota che possiamo derivare $\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner) \leftrightarrow \mathbf{G}$ in **HA**. Per vederlo, applica il lemma 10.1 al sequente $\vdash \mathbf{0} = \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{G}$.

Come in logica intuizionista con uguaglianza vale la proprietà di esistenza per *enunciati* grazie al sistema **LI₌** anche in **HA** vale tale proprietà:

Theorem 10.9 (proprietà di esistenza) Per ogni formula $\mathbf{fr}(\mathbf{x})$ con soltanto \mathbf{x} come variabile libera, se $\vdash \exists \mathbf{x} \mathbf{fr}(\mathbf{x})$ è derivabile in **HA**, allora esiste *un numerale* $\mathbf{n} \in \mathbf{Nat}$ tale che $\vdash \mathbf{fr}(\mathbf{n})$ è derivabile in **HA**.

Dal teorema sopra deduciamo il seguente corollario:

Corollary 10.10 Per ogni enunciato \mathbf{fr} , se $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{fr} \urcorner)$ è derivabile in **HA** allora pure $\vdash \mathbf{fr}$ è derivabile in **HA**.

Ora siamo pronti per dimostrare il secondo teorema di incompletezza:

Theorem 10.11 (II teorema di incompletezza di Gödel) *Se **HA** è consistente allora i seguenti fatti valgono:*

1. $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner)$ NON è derivabile in **HA**;
2. $\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner)$ NON è derivabile in **HA**.

Dim.

1. Supponiamo che $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ sia derivabile in **HA**. Allora dal corollario 10.10 concludiamo che $\vdash \mathbf{0} = \mathbf{1}$ è derivabile in **HAMa** pure $\vdash \neg(\mathbf{0} = \mathbf{1})$ è derivabile in **HA** per gli assiomi di Peano e quindi **HA** risulta inconsistente contro l'ipotesi che lo sia. Dunque $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ NON è derivabile in **HA**.

2. Supponiamo che $\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner)$ sia derivabile in **HA**. Allora per il lemma 10.7 sappiamo che

$$\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner) \longrightarrow \mathbf{G}$$

è derivabile in **HA**, da cui assieme all'ipotesi per la regola $\rightarrow -Sn$ della deduzione naturale otteniamo che $\vdash \mathbf{G}$ è derivabile in **HA** contrariamente al corollario 10.6. Dunque $\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner)$ NON è derivabile in **HA**.

Remark 10.12 Si noti che la dimostrazione qui descritta si può adattare a *tutte le teorie T che dimostrano TUTTI i teoremi dell'aritmetica di Heyting e che soddisfano la proprietà di esistenza per enunciati* ovvero che soddisfano la seguente proprietà per enunciati $\mathbf{fr}(x)$ con variabile che varia sui numeri naturali: se $\vdash \exists_{x \in \mathbf{Nat}} \mathbf{fr}(x)$ è derivabile in T allora esiste un numerale \mathbf{n} tale che $\vdash \mathbf{fr}(\mathbf{n})$ è derivabile in T.

In particolare la prova qui mostrata è quella sostanzialmente data da Gödel per l'aritmetica di Peano **assumendo** un'ipotesi extra per **PA** che è equivalente classicamente alla proprietà di esistenza, che NON è soddisfatta da **PA**. Successivamente Rosser sostituendo il predicato

$$\mathbf{pr}(x, y)$$

con il predicato

$$\mathbf{pr}^{\mathbf{Rosser}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{pr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \& \ \forall \mathbf{z} \ \forall \mathbf{w} \ ((\mathbf{z} \leq \mathbf{x} \ \& \ \mathbf{w} \leq \mathbf{x}) \ \& \ \mathbf{pr}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \ \rightarrow \ \mathbf{y} \neq \mathbf{neg}(\mathbf{w}) \ \& \ \mathbf{w} \neq \mathbf{neg}(\mathbf{y}))$$

$$\text{ove} \quad \mathbf{neg}(\mathbf{m}) \equiv \begin{cases} \ulcorner \neg \mathbf{fr} \urcorner & \text{se } \mathbf{m} = \ulcorner \mathbf{fr} \urcorner \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e il predicato $\mathbf{pr}^{\mathbf{Rosser}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dice che *il numero x codifica una derivazione della formula codificata da y e NON c'è prova più corta della sua negazione.*

Rosser con tal predicato usando essenzialmente la stessa tecnica di dimostrazione di Gödel ma senza assunzioni di proprietà di esistenza ha dimostrato che

Theorem 10.13 (I teorema di incompletezza di Gödel per PA) *Se PA è consistente allora esiste un enunciato G:*

1. $\vdash \mathbf{G}$ NON è derivabile in **PA**;

2. $\vdash \neg \mathbf{G}$ NON è derivabile in **PA**.

Theorem 10.14 (II teorema di incompletezza di Gödel per PA) *Se PA è consistente allora $\vdash \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{0} = \mathbf{1} \urcorner)$ NON è derivabile in PA.*

Esercizio: Si mostri che in **PA** NON è derivabile la negazione della formula di Gödel

$$\vdash \neg G$$

direttamente dalla proprietà di essere un punto fisso di $\neg \mathbf{Teor}(x)$ a meno di equiprovabilità, ovvero dal fatto che si deriva in **PA**

$$\vdash \mathbf{G} \longleftrightarrow \neg \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{G} \urcorner)$$

assumendo sia che **PA** è consistente e sia che in **PA** valga la proprietà che per ogni enunciato \mathbf{fr} , se $\vdash \mathbf{Teor}(\ulcorner \mathbf{fr} \urcorner)$ è derivabile in **PA** allora pure $\vdash \mathbf{fr}$ lo è.

Con la stessa tecnica dimostrativa tramite il lemma di diagonalizzazione si può dimostrare che

Theorem 10.15 Ogni teoria classica \mathcal{T} (intuizionista) che deriva tutti i teoremi dell'aritmetica di Peano (di Heyting) è *indecidibile*, ovvero non esiste funzione computabile

$$f(n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{n} = \ulcorner \mathbf{fr} \urcorner \\ & \text{e } \vdash \mathbf{fr} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{è derivabile in } \mathbf{T}$$

Questo teorema dice che

Corollary 10.16 Sia l'aritmetica di Heyting che di Peano sono indecidibili.

Dall'altra parte questo è confermato da un'altro teorema

Theorem 10.17 Ogni teoria classica \mathcal{T} (intuizionista) con uno schema calcolabile di assiomi (ovvero una macchina di Turing è in grado di elencare i suoi assiomi) e *completa* è decidibile ovvero esiste una funzione computabile

$$f(n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{n} = \ulcorner \mathbf{fr} \urcorner \\ & \text{e } \vdash \mathbf{fr} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{è derivabile in } \mathbf{T}$$

Commento a lato su cui riflettere

Secondo Lucas J.R. in "Mind, Machines and Gödel":

- Ogni calcolatore è un'istanza di un sistema formale i cui assiomi sono da lui elencabili;
- Ogni calcolatore in grado di produrre tutti i teoremi dell'aritmetica di Peano (o di Heyting) in modo consistente non riesce a derivare la formula di Gödel corrispondente al suo sistema formale;
- Gli esseri umani possono esprimere la loro opinione sulla verità o meno della formula di Gödel relativa al suo sistema formale contrariamente al calcolatore.

Quindi gli esseri umani sono superiori ai calcolatori.

11 Algebre di Boole e di Heyting

Iniziamo questa sezione ricordando alcune nozioni di algebra che ci serviranno nel seguito per dare gli esempi di connessioni di Galois che ci interessano.

11.1 Preliminari algebrici e definizioni di algebra di Heyting e di Boole

Ricordiamo che

Def. 11.1 (preordine) Una collezione *preordinata* (P, \leq) o *preordine* è una collezione P con una relazione \leq che soddisfa

- proprietà riflessiva: per ogni $a \in P$

$$a \leq a$$

- la proprietà transitiva: per elementi $a, b, c \in P$

$$\text{se valgono } a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq c \quad \text{allora vale } a \leq c$$

Def. 11.2 (ordine) Una collezione *ordinata* (P, \leq) o *ordine* è una collezione preordinata che soddisfa anche la seguente proprietà

- antisimmetrica: per elementi $a, b \in P$

$$\text{se valgono } a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq a \quad \text{allora vale } a = b$$

Def. 11.3 Una collezione ordinata (P, \leq) è un *inf-semireticolato* se P è chiuso sugli estremi inferiori binari, ovvero esiste un'operazione

$$(- \wedge -) : P \times P \rightarrow P$$

tale che dati $a, b \in P$ si ha che $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$ e per ogni $c \in P$ tale che $c \leq a$ e $c \leq b$ allora $c \leq a \wedge b$.

Def. 11.4 Una collezione ordinata (P, \leq) è un *sup-semireticolato* se P è chiuso sugli estremi superiori binari, ovvero esiste un'operazione

$$(- \vee -) : P \times P \rightarrow P$$

tale che dati $a, b \in P$ si ha che $\mathbf{a} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ e per ogni $c \in P$ tale che $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$ allora $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \leq \mathbf{c}$.

Def. 11.5 Una collezione ordinata (P, \leq) è un *reticolato distributivo* se è sia un inf-semireticolato che un sup-semireticolato e le operazioni di estremo inferiore ed estremo superiore sono legate dall'uguaglianza chiamata *distributività* dell'estremo superiore seguente: per ogni $a, b, c \in P$ vale

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee \mathbf{c} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \quad \text{dis}_\vee$$

Def. 11.6 Una collezione ordinata (P, \leq) è un *reticolato distributivo limitato* se ha un minimo $\mathbf{0} \in P$ e un massimo $\mathbf{1} \in P$.

Lemma 11.7 In un reticolato distributivo (\mathbf{P}, \leq) valgono le seguenti proprietà per \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c} elementi qualsiasi di \mathbf{P} :

1. se $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ allora

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{c} \leq \mathbf{b} \vee \mathbf{c} \quad \mathbf{a} \vee \mathbf{c} \leq \mathbf{b} \vee \mathbf{c}$$

2. (leggi assorbimento)

$$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

3. distributività dell'estremo inferiore

$$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \quad \text{dis}_\wedge$$

Dim. Si lascia al lettore da dimostrare i primi due punti per esercizio. Mostriamo ora che vale la distributività dell'estremo inferiore sull'estremo superiore.

Dalla distributività dis_\vee e commutatività dell'estremo superiore segue che

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \wedge (\mathbf{c} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}))$$

e per l'assorbimento al punto 2) pure che

$$(\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \wedge (\mathbf{c} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) = (\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \wedge \mathbf{c}$$

Ora di nuovo per dis_\vee segue che

$$\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c})$$

e quindi da questo e dall'associatività dell'estremo inferiore

$$(\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) \wedge \mathbf{c} = ((\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{c})) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge ((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \wedge \mathbf{c})$$

Infine per l'assorbimento

$$(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge ((\mathbf{a} \vee \mathbf{c}) \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$$

Dunque per la serie di uguaglianze sopra esposte concludiamo che

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$$

e quindi vale la distributività del punto 3).

Osservazione: Visto che in un reticolo distributivo valgono sia la distributività dell'estremo superiore che quella dell'estremo inferiore ci si riferisce ad entrambe queste proprietà semplicemente con il nome *distributività*.

Def. 11.8 Una collezione ordinata (P, \leq) è un *reticolo distributivo complementato* se è un reticolo distributivo con la proprietà che per ogni elemento $a \in P$ esiste un elemento a^c , detto *elemento complementare* o *complemento* di a , tale che

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{a}^c = \mathbf{1} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}^c = \mathbf{0}$$

Lemma 11.9 In un reticolo *reticolo distributivo complementato* (P, \leq) l'elemento complemento di un elemento dato è unico.

Dim. Supponiamo che dato $\mathbf{a} \in \mathbf{P}$ esistano due complementi \mathbf{a}^c e $\mathbf{a}^{c'}$ di \mathbf{a} . Allora si ha $\mathbf{a}^c = \mathbf{a}^c \wedge \mathbf{1} = \mathbf{a}^c \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}^{c'})$ e per la distributività $\mathbf{a}^c \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{a}^{c'}) = (\mathbf{a}^c \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{a}^c \vee \mathbf{a}^{c'}) = \mathbf{1} \wedge (\mathbf{a}^c \vee \mathbf{a}^{c'}) = \mathbf{a}^c \vee \mathbf{a}^{c'}$ da cui segue che $\mathbf{a}^c = \mathbf{a}^c \vee \mathbf{a}^{c'}$ e dunque $\mathbf{a}^{c'} \leq \mathbf{a}^c$. Scambiando il ruolo di \mathbf{a}^c con $\mathbf{a}^{c'}$ nell'argomentazione sopra si ottiene che pure $\mathbf{a}^c \leq \mathbf{a}^{c'}$ e dunque per l'antisimmetria dell'ordine $\mathbf{a}^c = \mathbf{a}^{c'}$.

Def. 11.10 (algebra di Boole) Un ordine (\mathbf{P}, \leq) è un *algebra di Boole* se è un reticolo distributivo complementato e limitato.

Def. 11.11 (algebra di Boole completa) Un ordine (\mathcal{B}, \leq) è un *algebra di Boole completa* se è un'algebra di Boole chiusa su tutti gli estremi inferiori e gli estremi superiori di famiglie indiciate su insiemi $a_i \in P$ per $i \in I$

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \in \mathcal{B} \quad \bigvee_{i \in I} a_i \in \mathcal{B}$$

Def. 11.12 (algebra di Heyting) Un ordine (\mathbf{P}, \leq) è un *algebra di Heyting* se è un reticolo con estremi inferiori e superiori binari, un massimo e un minimo e con la proprietà di avere un *pseudocomplemento relativo a due elementi*, ovvero per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{P}$ esiste un *pseudocomplemento relativo* o meglio *implicazione* $\mathbf{b}^{\mathbf{a}} \in \mathbf{P}$, indicato anche con la notazione logica $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{P}$, tale che vale la seguente proprietà: per ogni $\mathbf{c} \in \mathbf{P}$

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad \text{sse} \quad \mathbf{c} \leq \mathbf{b}^{\mathbf{a}}$$

Lemma 11.13 Un'algebra di Heyting (\mathcal{H}, \leq) è un reticolo distributivo.

Dim. Dati $a, b, c \in \mathcal{H}$ si ha che

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \leq (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \quad \text{e} \quad \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \leq (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

sse valgono per le proprietà di implicazione

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{a} \rightarrow (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \quad \text{e} \quad \mathbf{c} \leq \mathbf{a} \rightarrow (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

sse vale per le proprietà di estremo inferiore

$$\mathbf{b} \vee \mathbf{c} \leq \mathbf{a} \rightarrow (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

sse vale per le proprietà dell'implicazione

$$(\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} \leq (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

Il fatto che

$$(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \leq (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}$$

segue senza bisogno dell'implicazione dalle proprietà di estremo superiore in quanto

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \leq (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \leq (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}$$

che seguono dalle proprietà di estremo inferiore e superiore visto che $-\wedge a$ è una funzione monotona per il lemma 11.7, ovvero se $h_1 \leq h_2$ allora $\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{h}_2 \wedge \mathbf{a}$, e dal fatto che $\mathbf{b} \leq \mathbf{b} \vee \mathbf{c}$ e $\mathbf{c} \leq \mathbf{b} \vee \mathbf{c}$.

Def. 11.14 (algebra di Heyting completa) Un ordine (\mathcal{H}, \leq) è un *algebra di Heyting completa* se è un'algebra di Heyting chiusa su tutti gli estremi inferiori e gli estremi superiori di famiglie indicate su insiemi $\mathbf{a}_i \in \mathbf{P}$ per $i \in I$

$$\bigwedge_{i \in I} \mathbf{a}_i \in \mathcal{H} \quad \bigvee_{i \in I} \mathbf{a}_i \in \mathcal{H}$$

Lemma 11.15 Un'algebra di Boole (\mathbf{P}, \leq) è pure un'algebra di Heyting.

Dim. Basta osservare che per $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{P}$ il pseudocomplemento relativo ad \mathbf{a}, \mathbf{b} è

$$\mathbf{b}^{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{a}^c \vee \mathbf{b}$$

e quindi

$$\mathbf{0}^{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^c$$

ovvero il **pseudocomplemento relativo al minimo** è il **complemento di a**.

Osservazione: Il lemma 11.15 suggerisce che il nome di **pseudocomplemento relativo ad a, b** dato all'oggetto $\mathbf{b}^{\mathbf{a}}$ in un'algebra di Heyting deriva dal fatto che $\mathbf{b}^{\mathbf{a}}$ in un'algebra di Boole coincide con una generalizzazione del complemento di \mathbf{a} .

Def. 11.16 Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e un elemento $a \in \mathcal{H}$ chiamiamo negazione di a l'elemento

$$\neg a \equiv \mathbf{0}^a \in \mathcal{H}$$

Lemma 11.17 In un'algebra di Heyting \mathcal{H} per elementi $a, b \in \mathcal{H}$ valgono le seguenti si ha che

1.

$$\mathbf{b}^a \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad (\text{modus ponens algebrico})$$

e quindi pure

$$\neg \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

2.

$$\mathbf{1} = \mathbf{b}^a \quad \text{sse} \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$$

3. se $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ allora $\mathbf{0}^b \leq \mathbf{0}^a$

4. se $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ allora $\neg \mathbf{b} \leq \neg \mathbf{a}$.

5. se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ allora $\neg \mathbf{a} = \mathbf{1}$.

6. se $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ allora $\neg \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Dim. Il fatto che $\mathbf{b}^a \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ segue per definizione di pseudocomplemento dal fatto che vale $\mathbf{b}^a \leq \mathbf{b}^a$.

Poi il fatto che vale $\neg \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$ è un caso particolare di $\mathbf{b}^a \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ponendo $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$.

Infine si noti che $\mathbf{1} \leq \mathbf{b}^a$ vale se e solo se $\mathbf{1} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ e sapendo che $\mathbf{a} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{a}$ ne segue che $\mathbf{1} \leq \mathbf{b}^a$ vale se e solo se $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$.

Inoltre da $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ segue $\neg \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \leq \neg \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}$ per la monotonia di $\mathbf{c} \wedge (-) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ per ogni $\mathbf{c} \in \mathcal{H}$ e dal fatto che vale $\neg \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ (per la condizione 2)) ne segue che $\neg \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \leq \neg \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ e dunque $\neg \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{0}$ e quindi per le proprietà del pseudocomplemento concludiamo che $\neg \mathbf{b} \leq \neg \mathbf{a}$.

Le ultime due proprietà sono lasciate come esercizio al lettore.

Ora osserviamo che il pseudocomplemento è di fatto un estremo superiore:

Lemma 11.18 In un'algebra di Heyting (\mathbf{P}, \leq) per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{P}$ il pseudocomplemento \mathbf{b}^a relativo ad \mathbf{a}, \mathbf{b} soddisfa le seguenti proprietà:

1. \mathbf{b}^a è unico.

2. esiste nell'algebra l'estremo superiore di tutti gli elementi \mathbf{c} che soddisfano la proprietà

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$$

e coincide con \mathbf{b}^a ovvero

$$\mathbf{b}^a = \bigvee_{\mathbf{c} \in \{ \mathbf{x} \in \mathbf{P} \mid \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \}} \mathbf{c}$$

Dim. L'unicità segue dal fatto che \leq è un ordine parziale e dalla proprietà di modus ponens algebrico del pseudocomplemento nel lemma 11.17 e si lascia come esercizio al lettore.

Per dimostrare che \mathbf{b}^a coincide con l'estremo superiore basta osservare che

- \mathbf{b}^a è un maggiorante dell'insieme

$$\{ \mathbf{x} \in \mathbf{P} \mid \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \}$$

per definizione di pseudocomplemento, in quanto per ogni \mathbf{c} che soddisfa $\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ vale $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}^a$.

- \mathbf{b}^a è anche il minimo tra i maggioranti per il modus ponens algebrico $\mathbf{b}^a \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ nel lemma 11.17: ovvero se per un certo \mathbf{d} nell'algebra si ha che per ogni \mathbf{c} che soddisfa $\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ vale

$$\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$$

allora prendendo come \mathbf{c} proprio \mathbf{b}^a si conclude

$$\mathbf{b}^a \leq \mathbf{d}$$

Osservazione: Per controllare se un reticolo distributivo con massimo e minimo ha un pseudocomplemento ed è quindi un'algebra di Heyting basta controllare l'esistenza dell'estremo superiore che caratterizza il pseudocomplemento (e lo si osservi con negli esempi in sezione 11.1.2).

Lemma 11.19 In un reticolo distributivo \mathcal{H} con estremi superiori e inferiori su insiemi arbitrari le seguenti condizioni sono equivalenti:

- \mathcal{H} gode della distributività degli estremi superiori arbitrari sull'estremo inferiore binario: ovvero per ogni famiglia $h_i \in \mathcal{H}$ per $i \in I$ e per ogni elemento $a \in \mathcal{H}$

$$\bigvee_{i \in I} h_i \wedge a = \bigvee_{i \in I} (h_i \wedge a)$$

- \mathcal{H} è un'algebra di Heyting ovvero ha un pseudocomplemento $b^a \in \mathcal{H}$ per generici elementi $a, b \in \mathcal{H}$.

Lemma 11.20 Un'algebra di Heyting \mathcal{H} che soddisfa la proprietà che per ogni $a \in \mathcal{H}$ si abbia

$$a \vee (a \rightarrow 0) = 1$$

è un'algebra di Boole.

Dim. Dal lemma 11.17 sappiamo che $\neg a \equiv a \rightarrow 0$ è il complemento di a .

11.1.1 Esempi di algebra di Boole

Un esempio importante di algebra di Boole è la collezione delle parti di un'insieme

Lemma 11.21 La collezione

$$\mathcal{P}(x) \equiv \{ A \text{ set } A \subseteq X \}$$

(che è un insieme in nella teoria degli insiemi classica ZFC!) è un'algebra di Boole completa con la relazione

$$A \leq B \equiv A \subseteq B$$

per $A, B \subseteq X$.

In particolare per sottoinsiemi A, B si dimostra che

$$\begin{aligned} 1 &\equiv X \\ 0 &\equiv \emptyset \\ A \wedge B &\equiv A \cap B \\ A \vee B &\equiv A \cup B \\ A^c &\equiv X \setminus A \\ \bigwedge_{i \in I} A_i &\equiv \bigcap_{i \in I} A_i \\ \bigvee_{i \in I} A_i &\equiv \bigcup_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

Lemma 11.22 L'insieme $\{0, 1\}$ è un'algebra di Boole completa ove per $a, b \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \\ 0 &\equiv 0 \\ a \wedge b &\equiv \min\{a, b\} \\ a \vee b &\equiv \max\{a, b\} \\ a^c &\equiv 1 - a \end{aligned}$$

Poi abbiamo anche l'esempio dell'algebra delle proposizioni della logica classica proposizionale:

Def. 11.23 (algebra di Lindenbaum di LC_p) Per ogni linguaggio proposizionale \mathcal{L} l'insieme

$$\mathcal{A}_c(\mathcal{L}) \equiv \{ [\mathbf{pr}] \mid \mathbf{pr} \in PROP(\mathcal{L}) \}$$

ove

$$[\mathbf{pr}] \equiv \{ \alpha \in PROP(\mathcal{L}) \mid \vdash \mathbf{pr} \leftrightarrow \alpha \text{ è derivabile in } \mathbf{LC}_p \}$$

con la relazione

$$[\mathbf{pr}_1] \leq [\mathbf{pr}_2] \equiv \mathbf{pr}_1 \vdash \mathbf{pr}_2 \text{ è derivabile in } \mathbf{LC}_p$$

è detto *algebra di Lindenbaum della logica classica proposizionale*.

Lemma 11.24 Per ogni linguaggio proposizionale \mathcal{L} l'algebra di Lindenbaum $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ è un'algebra di Boole rispetto alla relazione

$$[\mathbf{pr}_1] \leq [\mathbf{pr}_2] \equiv \mathbf{pr}_1 \vdash \mathbf{pr}_2 \text{ è derivabile in } \mathbf{LC}_p$$

In particolare per proposizioni $\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2 \in PROP(\mathcal{L})$ si dimostra che

$$\begin{aligned} 1 &\equiv [\mathbf{tt}] \\ 0 &\equiv [\perp] \\ [\mathbf{pr}_1] \wedge [\mathbf{pr}_2] &\equiv [\mathbf{pr}_1 \& \mathbf{pr}_2] \\ [\mathbf{pr}_1] \vee [\mathbf{pr}_2] &\equiv [\mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2] \\ [\mathbf{pr}_1]^c &\equiv [\neg \mathbf{pr}_1] \end{aligned}$$

Dim. per esercizio.

Def. 11.25 (algebra booleana di funzioni) Data un'algebra di Boole \mathcal{B} e un'insieme non vuoto D definiamo

$$Fun(D, \mathcal{B})$$

come l'insieme delle funzioni da D a \mathcal{B} .

Lemma 11.26 L'insieme $Fun(D, \mathcal{B})$ dotato dell'ordine puntuale ovvero per $f, g \in Fun(D, \mathcal{B})$

$$f \leq g \equiv \forall d \in D \ f(d) \leq g(d)$$

è un'algebra di Boole ove

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \text{funzione costante } 1 \\ 0 &\equiv \text{funzione costante } 0 \\ f \wedge g &\equiv \text{è la funzione } (f \wedge g)(d) \equiv f(d) \wedge g(d) \text{ per } d \in D \\ f \vee g &\equiv \text{è la funzione } (f \vee g)(d) \equiv f(d) \vee g(d) \text{ per } d \in D \\ f^c &\equiv \text{è la funzione } (f^c)(d) \equiv f(d)^c \text{ per } d \in D \end{aligned}$$

per $f, g \in Fun(D, \mathcal{B})$.

Inoltre se \mathcal{B} è un'algebra di Boole completa pure $Fun(D, \mathcal{B})$ è un'algebra di Boole completa ponendo

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} f_i &\equiv \text{è la funzione } (\bigwedge_{i \in I} f_i)(d) \equiv \bigwedge_{i \in I} (f_i(d)) \in \mathcal{B} \text{ per } d \in D \\ \bigvee_{i \in I} f_i &\equiv \text{è la funzione } (\bigvee_{i \in I} f_i)(d) \equiv \bigvee_{i \in I} (f_i(d)) \in \mathcal{B} \text{ per } d \in D \end{aligned}$$

Def. 11.27 Dato un preordine (P, \leq) e un sottoinsieme $V \subseteq P$ definiamo l'insieme dei maggioranti di V

$$V^\uparrow \equiv \{ p \in P \mid \forall v \in V \ v \leq p \}$$

e poi l'insieme dei minoranti di V

$$V^\downarrow \equiv \{ p \in P \mid \forall v \in V \ v \geq p \}$$

11.1.2 Esempi di algebra di Heyting

Esempi di algebre di Heyting sono innanzitutto *tutte le algebre di Boole* e anche gli aperti di uno spazio topologico (che include le topologie discrete e quindi anche la collezione delle parti di un insieme!) e tra quest'ultimi si trovano esempi di algebre di Heyting che non sono di Boole!

Lemma 11.28 Dato uno spazio topologico (X, τ) l'insieme degli aperti τ di X è un'algebra di Heyting completa ponendo

$$A \leq B \equiv A \subseteq B$$

e in particolare per sottoinsiemi aperti A, B si dimostra che

$$\begin{aligned} 1 &\equiv X \\ 0 &\equiv \emptyset \\ A \wedge B &\equiv A \cap B \\ A \vee B &\equiv A \cup B \\ B^A &\equiv \bigcup \{ C \in \tau \mid C \cap A \subseteq B \} \end{aligned}$$

Inoltre vale per ogni aperto A

$$0^A = \text{Int}X \setminus A$$

ove dato Y sottoinsieme di X con $\text{Int}(Y)$ indichiamo il suo *interno*.

In particolare τ è chiusa di per sè con gli estremi superiori di famiglie indiciate su insiemi qualsiasi definito come in $\mathcal{P}(X)$. Invece gli estremi inferiori di famiglie arbitrarie di aperti $(U_i \in \tau)(i \in I)$ si ottiene prendendo l'interno dell'intersezione arbitraria ovvero

$$\bigwedge_{i \in I} U_i \equiv \text{Int}(\bigcap_{i \in I} U_i)$$

Def. 11.29 Chiamiamo Σ la *topologia di Sierpinski* su $\{0, 1\}$, ovvero

$$\Sigma \equiv \{ \emptyset, \{1\}, \{0, 1\} \}$$

Lemma 11.30 La topologia di Sierpinski non è un'algebra di Boole.

Dim. Si noti che $0^{\{1\}} = \emptyset$ e quindi non tale topologia NON è complementata in quanto non vale

$$\{1\} \cup 0^{\{1\}} = \{0, 1\}$$

visto che vale $\{1\} \cup 0^{\{1\}} = \{1\}$.

Poi abbiamo anche l'esempio dell'algebra delle proposizioni della logica intuizionista proposizionale:

Def. 11.31 (algebra di Lindenbaum di \mathbf{LI}_p) Per ogni linguaggio proposizionale \mathcal{L} l'insieme

$$\mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \equiv \{ [\text{pr}] \mid \text{pr} \in \text{PROP}(\mathcal{L}) \}$$

ove

$$[\text{pr}] \equiv \{ \alpha \in \text{PROP}(\mathcal{L}) \mid \vdash \text{pr} \leftrightarrow \alpha \text{ è derivabile in } \mathbf{LI}_p \}$$

con la relazione

$$[\text{pr}_1] \leq [\text{pr}_2] \equiv \text{pr}_1 \vdash \text{pr}_2 \text{ è derivabile in } \mathbf{LI}_p$$

è detto *algebra di Lindenbaum della logica intuizionista proposizionale*.

Lemma 11.32 Per ogni linguaggio proposizionale \mathcal{L} l'algebra di Lindenbaum $\mathcal{A}_i(\mathcal{L})$ per la logica intuizionista proposizionale è un'algebra di Heyting rispetto alla relazione

$$[\text{pr}_1] \leq [\text{pr}_2] \equiv \text{pr}_1 \vdash \text{pr}_2 \text{ è derivabile in } \mathbf{LI}_p$$

In particolare per proposizioni $\text{pr}_1, \text{pr}_2 \in \text{PROP}(\mathcal{L})$ si dimostra che

$$\begin{aligned} 1 &\equiv [\text{tt}] \\ 0 &\equiv [\perp] \\ [\text{pr}_1] \wedge [\text{pr}_2] &\equiv [\text{pr}_1 \& \text{pr}_2] \\ [\text{pr}_1] \vee [\text{pr}_2] &\equiv [\text{pr}_1 \vee \text{pr}_2] \\ [\text{pr}_2][\text{pr}_1] &\equiv [\text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2] \end{aligned}$$

Dim. per esercizio.

Def. 11.33 (algebra di Heyting di funzioni) Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e un'insieme non vuoto D definiamo

$$\text{Fun}(D, \mathcal{H})$$

come l'insieme delle funzioni da D a \mathcal{H} .

Lemma 11.34 Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} , l'insieme $\text{Fun}(D, \mathcal{H})$ dotato dell'ordine puntuale ovvero per $f, g \in \text{Fun}(D, \mathcal{H})$

$$f \leq g \equiv \forall d \in D \ f(d) \leq g(d)$$

è un'algebra di Heyting ove

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \text{funzione costante } 1 \\ 0 &\equiv \text{funzione costante } 0 \\ f \wedge g &\equiv \text{è la funzione } (f \wedge g)(d) \equiv f(d) \wedge g(d) \text{ per } d \in D \\ f \vee g &\equiv \text{è la funzione } (f \vee g)(d) \equiv f(d) \vee g(d) \text{ per } d \in D \\ g^f &\equiv \text{è la funzione } (g^f)(d) \equiv g(d)^{f(d)} \text{ per } d \in D \end{aligned}$$

per $f, g \in \text{Fun}(D, \mathcal{H})$.

E se \mathcal{H} è completa pure $\text{Fun}(D, \mathcal{H})$ è completa.

Inoltre se \mathcal{H} è un'algebra di Boole pure $\text{Fun}(D, \mathcal{H})$ è un'algebra di Boole.

11.1.3 Completamento di Dedekind-MacNeille per algebre di Heyting e di Boole

Def. 11.35 Date due algebre di Boole \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 un omomorfismo di algebre di Boole

$$f : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$$

è una funzione che conserva la struttura di minimo, massimo, estremo inferiore ed estremo superiore dell'algebra ovvero soddisfa

$$\begin{aligned} f(0) = 0 & \qquad f(1) = 1 \\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) & \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \end{aligned}$$

per elementi $a, b \in \mathcal{B}_1$.

Lemma 11.36 Un omomorfismo $f : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ di algebre di Boole, conserva il complemento ovvero

$$f(a^c) = f(a)^c$$

e anche il pseudocomplemento b^a ovvero

$$f(b^a) = f(b)^{f(a)}$$

per elementi $a, b \in \mathcal{B}_1$.

Dim. Dato per un qualsiasi $a \in \mathcal{B}_1$ per la conservazione del minimo e dell'estremo inferiore abbiamo che

$$0 = f(0) = f(a \wedge a^c) = f(a) \wedge f(a^c)$$

e per la conservazione del massimo e dell'estremo superiore abbiamo che

$$1 = f(1) = f(a \vee a^c) = f(a) \vee f(a^c)$$

per l'unicità del complementare di $f(a)$ concludiamo che $f(a^c) = f(a)^c$. Inoltre ricordando che $b^a = a^c \vee b$ segue da ciò pure che $f(b^a) = f(b)^{f(a)}$.

Def. 11.37 Date due algebre di Heyting \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 un omomorfismo di algebre di Heyting

$$f : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$$

è una funzione che conserva la struttura di minimo, massimo, estremo inferiore ed estremo superiore

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f(1) &= 1 \\ f(a \wedge b) &= f(a) \wedge f(b) & f(a \vee b) &= f(a) \vee f(b) \\ f(b^a) &= f(b)^{f(a)} \end{aligned}$$

per elementi $a, b \in \mathcal{H}_1$.

Lemma 11.38 Un omomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di algebre di Heyting.

Dim. segue dal lemma 11.36.

Def. 11.39 (completamento di Dedekind-MacNeille) Dato un preordine (P, \leq) , il suo completamento di Dedekind-MacNeille è l'algebra definita come segue:

$$DM(\mathcal{B}) \equiv \{ V \mid V = (V^\uparrow)^\downarrow \}$$

e per semplicità usiamo la notazione

$$DM(V) \equiv (V^\uparrow)^\downarrow$$

Theorem 11.40 (completamento di algebra di Heyting) Se \mathcal{H} è un'algebra di Heyting allora $DM(\mathcal{H})$ con l'ordine dato da

$$A \leq B \equiv A \subseteq B$$

per $A, B \in DM(\mathcal{H})$ è un'algebra di Heyting completa e

$$\text{im} : \mathcal{H} \longrightarrow DM(\mathcal{H})$$

definito in tal modo

$$\text{im}(h) \equiv DM(\{h\})$$

è un morfismo INIETTIVO di algebre di Heyting ove

$$\begin{aligned} 1 &\equiv DM(\{1_{\mathcal{H}}\}) = \mathcal{H} \\ 0 &\equiv DM(\{0_{\mathcal{H}}\}) = \{0\} \\ A \wedge B &\equiv A \cap B \\ A \vee B &\equiv DM(A \cup B) \\ B^A &\equiv \{ h \in \mathcal{H} \mid \forall a \in A \ h \wedge a \in B \} \\ \bigwedge_{i \in I} A_i &\equiv \bigcap_{i \in I} A_i \\ \bigvee_{i \in I} A_i &\equiv DM(\bigcup_{i \in I} A_i) \end{aligned}$$

Dim. La dimostrazione fa uso del fatto che DM definisce un operatore di chiusura dalla collezione delle parti di \mathcal{H} in sè stessa

$$DM : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

che riflessivo, ovvero per un qualsiasi sottoinsieme U di \mathcal{H}

$$U \subseteq DM(U)$$

idempotente, ovvero per un qualsiasi sottoinsieme U di \mathcal{H}

$$DM(DM(U)) = DM(U)$$

e monotono: per sottoinsiemi $U, V \subseteq \mathcal{H}$

$$\text{se } U \subseteq V \quad \text{allora } DM(U) \subseteq DM(V)$$

Da ciò segue immediatamente che dati due insiemi $A, B \in DM(\mathcal{H})$ sia l'estremo inferiore binario che quello su insiemi arbitrari è dato dall'intersezione di insiemi

$$A \cap B \equiv A \cap B \quad \bigwedge_{i \in I} A_i \equiv \bigcap_{i \in I} A_i$$

Infatti $A \cap B \in DM(\mathcal{H})$ perchè per monotonia

$$DM(A \cap B) \subseteq DM(A) = A \quad \text{e anche } DM(A \cap B) \subseteq DM(B) = B$$

e dunque $DM(A \cap B) \subseteq A \cap B$ e per riflessività si conclude $A \cap B = DM(A \cap B)$.

Analogamente si dimostra che $\bigwedge_{i \in I} A_i \equiv \bigcap_{i \in I} A_i$.

Invece l'estremo superiore binario di $A, B \in DM(\mathcal{H})$ e quello su una famiglia indicata su un insieme arbitrario $A_i \in DM(\mathcal{H})$ per $i \in I$ è dato da

$$A \vee B \equiv DM(A \cup B) \quad \bigvee_{i \in I} A_i \equiv DM\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

che per l'idempotenza sono elementi di $DM(\mathcal{H})$. Per monotonia si ha che

$$A = DM(A) \subseteq DM(A \cup B) \quad B = DM(B) \subseteq DM(A \cup B)$$

e se per $C \in DM(\mathcal{H})$ si ha $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ allora $A \cup B \subseteq C$ e per monotonia

$$DM(A \cup B) \subseteq DM(C) = C$$

e dunque $A \vee B \equiv DM(A \cup B)$.

Chiaramente \mathcal{H} è il massimo di $DM(\mathcal{H})$ e $\{0\}$ è il minimo in quanto $0 \in DM(A) = A$ per ogni $A \in DM(\mathcal{H})$. Infine mostriamo che ha un pseudocomplemento di $A, B \in DM(\mathcal{H})$

$$A \rightarrow B \equiv \{ h \in \mathcal{H} \mid \forall a \in A \ h \wedge a \in B \}$$

Infatti dato $C \in DM(\mathcal{H})$ si dimostra che

$$(1) \quad C \subseteq A \rightarrow B \quad \text{sse } C \cap A \subseteq B$$

come segue:

\Rightarrow : supponiamo $C \subseteq A \rightarrow B$ e sia $c \in C \cap A$. Sapendo che $c \in A \rightarrow B$ dal fatto che $c = c \wedge c$ e che pure $c \in A$ segue che $c \in B$, ovvero $C \cap A \subseteq B$.

\Leftarrow : supponiamo $C \cap A \subseteq B$ e sia $c \in C$ e $a \in A$. Allora $c \wedge a \in C$ e $c \wedge a \in A$ perchè entrambi gli insiemi sono chiusi sui minoranti per definizione di DM . Dunque $c \wedge a \in C \cap A$ e dall'ipotesi segue che $c \wedge a \in B$. Si conclude quindi che $c \in A \rightarrow B$ per definizione. Dunque $C \subseteq A \rightarrow B$.

Rimane solo da mostrare che $DM(A \rightarrow B) = A \rightarrow B$ e per la riflessività basta mostrare che $DM(A \rightarrow B) \subseteq A \rightarrow B$.

Ora sappiamo che $DM(A \rightarrow B) \in DM(\mathcal{H})$ per l'idempotenza. e dunque applicando la proprietà (1) sopra si trova che

$$DM(A \rightarrow B) \subseteq A \rightarrow B \quad \text{sse} \quad DM(A \rightarrow B) \cap A \subseteq B$$

Ora si osservi che vale

$$DM(A \rightarrow B) \cap A \subseteq B$$

Ora se $h \in DM(A \rightarrow B) \cap A$ allora dobbiamo mostrare che $h \in B = DM(B)$. A tal scopo facciamo vedere che h è minorante di un qualsiasi maggiorante $y \in \mathcal{H}$ di B . In altre parole preso $y \in B^\uparrow$ consideriamo l'elemento

$$h \rightarrow y \in \mathcal{H}$$

e facciamo vedere che questo è un maggiorante di $A \rightarrow B$. Infatti dato $k \in A \rightarrow B$ siccome $h \in A$ per ipotesi ne segue che $k \wedge h \in B$ e dunque $k \wedge h \leq y$ (in quanto y è maggiorante di B) e per le proprietà del pseudocomplemento ne segue che $k \leq h \rightarrow y$, ovvero

$$h \rightarrow y \in (A \rightarrow B)^\uparrow$$

ma siccome $h \in DM(A \rightarrow B)$ (ovvero è un minorante dei maggioranti di $A \rightarrow B$ per ipotesi) ne segue che

$$h \leq h \rightarrow y$$

da cui per le proprietà del pseudocomplemento segue che $h \wedge h \leq y$ ovvero

$$h \leq y$$

e siccome y era un qualsiasi maggiorante di B ne segue che h è minorante di un qualsiasi maggiorante di B ovvero

$$h \in DM(B) = B$$

come volevasi dimostrare.

Quindi da ciò e dalla proprietà (1) si conclude che $DM(A \rightarrow B) \subseteq A \rightarrow B$ come volevasi dimostrare.

Theorem 11.41 (completamento di un algebra di Boole) Se \mathcal{B} è un'algebra di Boole allora $DM(\mathcal{B})$ con l'ordine dato da

$$A \leq B \equiv A \subseteq B$$

per $A, B \in DM(\mathcal{B})$ è un'algebra di Boole completa e

$$\text{im} : \mathcal{B} \longrightarrow DM(\mathcal{B})$$

definito in tal modo

$$\text{im}(h) \equiv DM(\{h\})$$

è un morfismo INIETTIVO di algebre di Boole ove

$$\begin{aligned} 1 &\equiv DM(\{1_{\mathcal{H}}\}) \\ 0 &\equiv DM(\{0_{\mathcal{H}}\}) \\ A \wedge B &\equiv A \cap B \\ A \vee B &\equiv DM(A \cup B) \\ A^c &\equiv \{ h \in \mathcal{H} \mid \forall a \in A \ h \wedge a = 0 \} \\ \bigwedge_{i \in I} A_i &\equiv \bigcap_{i \in I} A_i \\ \bigvee_{i \in I} A_i &\equiv DM(\bigcup_{i \in I} A_i) \end{aligned}$$

Dim. Dal teorema 11.40 e dal lemma 11.15 sappiamo che $DM(\mathcal{B})$ è un'algebra di Heyting. Ora si osservi che per ogni $A \in DM(\mathcal{B})$ vale

$$DM(A \cup \neg A) = \mathcal{B}$$

A tal scopo mostriamo che un qualsiasi maggiorante di $A \cup \neg A$ è per forza $1 \in \mathcal{B}$. Infatti preso un maggiorante di $A \cup \neg A$ qualsiasi

$$y \in (A \cup \neg A)^\uparrow$$

e preso un qualsiasi $a \in A$ si ha per ipotesi che $a \leq y$ e dunque $\neg y \leq \neg a$ per il lemma 11.17. Ovvero $\neg y$ è un minorante di tutti gli elementi del tipo $\neg a$ per $a \in A$ ovvero

$$\neg y \in \{ \neg a \mid a \in A \}^\downarrow$$

Ora si osservi

$$\neg A \equiv A \rightarrow 0 = \{ h \in \mathcal{B} \mid \text{per ogni } a \in A \ h \leq \neg a \} = \{ \neg a \mid a \in A \}^\downarrow$$

in quanto $h \wedge a \leq 0$ vale se e solo se $h \iff \neg a$ (ricordando che $\neg a \equiv a \rightarrow 0$). Da ciò segue che

$$\neg y \in \neg A$$

ma essendo y un maggiorante pure di $\neg A$ ne segue che

$$\neg y \leq y$$

ovvero

$$1 = y \vee \neg y \leq y$$

Con ciò concludiamo che $y = 1$ e dunque

$$1 \in DM(A \cup \neg A)$$

ovvero

$$DM(A \cup \neg A) = \mathcal{B}$$

Per il lemma 11.20 da questo si conclude che $DM(\mathcal{B})$ è un'algebra di Boole completa.

11.1.4 Validità e completezza della logica classica proposizionale rispetto alla semantica booleana

Nel seguito estendiamo il concetto di valutazione classica per la logica proposizionale classica a quella di valutazione a valori in un'algebra di Boole qualsiasi:

Def. 11.42 (valutazione booleana) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} con una classe Var_{prop} di variabili proposizionali una *valutazione booleana* è una funzione

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{B}$$

ove \mathcal{B} è un'algebra di Boole e valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \nu(\perp) &= 0 \\ \nu(\mathbf{tt}) &= 1 \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \&\mathbf{pr}_2) &= \nu(\mathbf{pr}_1) \wedge \nu(\mathbf{pr}_2) \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2) &= \nu(\mathbf{pr}_1) \vee \nu(\mathbf{pr}_2) \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) &= \nu(\mathbf{pr}_1)^c \vee \nu(\mathbf{pr}_2) \\ \nu(\neg \mathbf{pr}_1) &= \nu(\mathbf{pr}_1)^c \end{aligned}$$

Def. 11.43 (modello booleano di una proposizione) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , chiamiamo *modello booleano* di una proposizione \mathbf{pr} una valutazione booleana

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{B}$$

che rende vera \mathbf{pr} , ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{pr}) = \mathbf{1}$.

Importante: Per una valutazione booleana il valore di verità di una proposizione può essere diverso da 1 e da 0 e quindi

per una valutazione booleana
 $\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$
 se \mathbf{pr} NON è vera per ν , ossia $\nu(\mathbf{pr}) \neq 1$
 NON vale necessariamente
 che \mathbf{pr} sia falsa per ν , ossia $\nu(\mathbf{pr}) = 0$

Quindi diamo la seguente definizione di contromodello:

Def. 11.44 (contromodello booleano di una proposizione) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , chiamiamo *CONTROModello booleano* di una proposizione \mathbf{pr} una valutazione booleana

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{B}$$

che NON rende vera \mathbf{pr} , ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{pr}) \neq \mathbf{1}$.

Def. 11.45 (modello booleano di un sequente) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , una valutazione booleana

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{B}$$

rende vero un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ nel linguaggio proposizionale \mathcal{L} se e solo se la valutazione rende vero il suo significato ovvero risulta che $\nu(\Gamma^{\&e} \rightarrow \Delta^{\vee}) = \mathbf{1}$.

Def. 11.46 (classificazione della verità semantica di una proposizione) Data una proposizione \mathbf{pr} di un linguaggio proposizionale \mathcal{L}

\mathbf{pr} è **VALIDA nella semantica booleana**
 se è vera in OGNI modello booleano, ovvero è vera per ogni valutazione booleana,

\mathbf{pr} è **SODDISFACIBILE nella semantica classica**
 se è vera in almeno un modello booleano; ovvero è vera per qualche valutazione booleana;

\mathbf{pr} è **NON VALIDA nella semantica classica**
 se NON è vera in qualche modello booleano,
 ovvero esiste una valutazione booleana ν tale che $\nu(\mathbf{pr}) \neq \mathbf{1}$;

\mathbf{pr} è **INSODDISFACIBILE nella semantica classica**
 se NON è vera in OGNI modello booleano,
 ovvero per ogni valutazione booleana ν si ha che $\nu(\mathbf{pr}) \neq \mathbf{1}$.

e poi poniamo che

fr è **TAUTOLOGIA** nella semantica booleana
 se è vera in OGNI modello booleano,

fr è **OPINIONE** nella semantica classica
 se NON è vera in almeno un modello booleano
 e pure la sua negazione $\neg\text{fr}$ NON è vera in almeno un modello booleano,

fr è **PARADOSSO** (o meglio **ANTINOMIA**) nella semantica classica
 se la sua negazione $\neg\text{fr}$ è vera in ogni modello booleano.

Def. 11.47 (classificazione della verità rispetto alla semantica booleana di un sequente) Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in un linguaggio proposizionale L un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **valido/soddisfacibile/NON valido/Insoddisfacibile/opinione/paradosso** nella logica classica proposizionale se e solo se lo è la formula $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ che rappresenta il suo significato.

IMPORTANTE Si noti che data un'algebra di Boole, per esempio la collezione delle parti

$$\mathcal{P}(X)$$

di un insieme X e data una variabile proposizionale \mathbf{A} , possiamo definire una valutazione

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

tale

$$\nu(A) = \{x\}$$

per un qualche $x \in X$.

Ora secondo tale valutazione A NON è vero anche se non è propriamente *falso* nel senso che non vale $\nu(A) = 0 = \emptyset$.

Questo fatto non altera il fatto che una formula di \mathbf{LC}_p è o tautologia o opinione o paradosso in quanto abbiamo sempre a disposizione le valutazioni in $\mathcal{P}(X)$ che assegnano ad A il valore 0 oppure 1.

Def. 11.48 (validità booleana di regola ad una premessa) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

si dice **valida rispetto alla semantica booleana**

se OGNI valutazione booleana

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

che rende vero il sequente

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$$

ovvero per cui vale $\nu(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) = 1$, rende vero pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

ovvero si ha pure che $\nu(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) = 1$

Def. 11.49 (validità booleana di regola a due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

si dice **valida rispetto alla semantica booleana**)

se OGNI valutazione booleana

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

che rende veri ENTRAMBI i sequenti

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

ovvero per cui vale $\nu(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee}) = 1$ e $\nu(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee}) = 1$, rende vero pure il seguente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \Delta_3$$

ovvero si ha che $\nu(\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee}) = 1$.

Ci conviene dimostrare che sono valide le regole proposizionali della deduzione naturale proposizionale che chiamiamo **DNC_p**:

Def. 11.50 Sia **DNC_p** il frammento di **DNC₌** senza le regole dei quantificatori e dell'uguaglianza.

Theorem 11.51 (validità delle regole DNC_p) **Tutti gli assiomi di DNC_p sono tautologie semantiche e TUTTE le regole di DNC_p sono valide rispetto alla semantica booleana.**

Dim. La validità di tutte le regole eccetto la regola di riduzione all'assurdo seguono esattamente come nella dimostrazione del teorema 11.65.

La validità della regola

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ ra}$$

si dimostra come segue. Data un'algebra di Boole \mathcal{B} e una valutazione booleana ν relativa ad essa se la premessa è vera per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \neg A \rightarrow \perp) = 1$$

e per definizione di valutazione

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \neg A) \rightarrow \nu(\perp) = \nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \perp) = 1$$

allora per il lemma 11.17 e per definizione di valutazione si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\neg A) = \nu(\Gamma^{\&} \& A) \leq \nu(\perp) = 0$$

e per definizione di pseudocomplemento

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\neg A) \rightarrow 0$$

ricordando che in un'algebra di Boole

$$\nu(A) \rightarrow 0 = \neg(\nu(\neg A)) \vee 0$$

si ottiene che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \neg\nu(\neg A) \vee 0 = \neg\nu(\neg A)$$

Ora si ricordi che in un'algebra di Boole $\neg\nu(A) = \nu(A)^c$ da cui

$$\neg\nu(\neg A) = (\nu(\neg A)^c)^c = \nu(A)$$

e dunque

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(A)$$

ovvero per il lemma 11.17 e la definizione di valutazione sull'implicazione

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow A) = 1$$

ossia la conclusione della regola è pure vera per ν .

Da questo teorema chiaramente segue il seguente:

Theorem 11.52 (teorema di validità di \mathbf{DNC}_p per la semantica booleana) Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{DNC}_p allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ è valida rispetto alla semantica booleana, ovvero ogni valutazione booleana rende vera $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$.

Dim. Segue dal teorema 11.51 considerando che dagli assiomi di una derivazione la validità in tutti i modelli booleani è conservata da tutte le regole fino alla radice.

Theorem 11.53 (completezza della semantica booleana) Se un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in un linguaggio proposizionale L è valido rispetto alla semantica booleana, ovvero vero in ogni valutazione, allora $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{DNC}_p .

Dim. Se $\Gamma \vdash \Delta$ è valido rispetto a tutte le valutazioni booleane è anche valido rispetto alle valutazioni classiche perché $\{0, 1\}$ è un'algebra di Boole (vedi lemma 11.22). Dunque per il teorema 11.130 ne segue che $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in \mathbf{LC}_p e quindi anche nel frammento \mathbf{DNC}_p ad esso equivalente come si deduce dal teorema 5.58.

Quindi concludiamo che

TAUTOLOGIA semantica booleana	=	TAUTOLOGIA FORMALE in $\mathbf{DNC}_p/\mathbf{LC}_p$
OPINIONE semantica booleana	=	OPINIONE FORMALE in $\mathbf{DNC}_p/\mathbf{LC}_p$
PARADOSSO semantica booleana	=	PARADOSSO FORMALE in $\mathbf{DNC}_p/\mathbf{LC}_p$

11.1.5 Validità e completezza della logica intuizionista proposizionale rispetto alla semantica intuizionista

Generalizziamo qui il concetto di valutazione booleano a quello di valutazione intuizionista in un'algebra di Heyting.

Nel seguito faremo riferimento alla logica intuizionista come quella definita dal calcolo dei sequenti \mathbf{LI}_p o dal suo equivalente in termini di deduzione naturale \mathbf{DNI}_p definito come segue:

Def. 11.54 (valutazione intuizionista di $\mathbf{LI}_p/\mathbf{DNI}_p$) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} con una classe Var_{prop} di variabili proposizionali una *valutazione intuizionista di \mathbf{LI}_p* è una funzione

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

ove \mathcal{H} è un'algebra di Heyting e valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \nu(\perp) &= \mathbf{0} \\ \nu(\mathbf{tt}) &= \mathbf{1} \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \&\mathbf{pr}_2) &= \nu(\mathbf{pr}_1) \wedge \nu(\mathbf{pr}_2) \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \vee \mathbf{pr}_2) &= \nu(\mathbf{pr}_1) \vee \nu(\mathbf{pr}_2) \\ \nu(\mathbf{pr}_1 \rightarrow \mathbf{pr}_2) &= \nu(\mathbf{pr}_1) \rightarrow \nu(\mathbf{pr}_2) \\ \nu(\neg \mathbf{pr}_1) &= \nu(\mathbf{pr}_1) \rightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

Def. 11.55 (modello intuizionista di una proposizione) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , chiamiamo *modello intuizionista* di una proposizione \mathbf{pr} una valutazione intuizionista di $PROP(\mathcal{L})$ a in un'algebra di Heyting \mathcal{H}

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

che rende vera \mathbf{pr} , ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{pr}) = \mathbf{1}$.

Def. 11.56 (contromodello intuizionista di una proposizione) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , chiamiamo **CONTROMODELLO** intuizionista di una proposizione \mathbf{pr} una valutazione di $PROP(\mathcal{L})$ a valori in un'algebra di Heyting \mathcal{H}

$$\nu : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

che NON rende vera \mathbf{pr} ovvero che **falsifica** \mathbf{pr} in quanto vale $\nu(\mathbf{pr}) \neq \mathbf{1}$.

Importante: Come per una valutazione booleana generica anche per una valutazione intuizionista il valore di verità di una proposizione può essere diverso da $\mathbf{1}$ e da $\mathbf{0}$ e quindi

Una valutazione intuizionista
 $\nu : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$
 che è contromodello di \mathbf{pr}
 ovvero che NON rende vera \mathbf{pr} nel senso che $\nu(\mathbf{pr}) \neq \mathbf{1}$
 NON è detto che verifichi $\nu(\mathbf{pr}) = \mathbf{0}$.

Però se \mathbf{pr} è una **contraddizione** otteniamo che ogni valutazione la valuta nel minimo:

Lemma 11.57 *Se \mathbf{pr} è una contraddizione semantica allora per ogni valutazione intuizionista in un'algebra di Heyting \mathcal{H}*

$$\nu : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

si ha

$$\nu(\mathbf{pr}) = \mathbf{0}$$

Dim. Dato che per ipotesi $\neg \mathbf{pr}$ è una tautologia ne segue che per ogni valutazione ν si ha

$$\nu(\neg \mathbf{pr}) = \mathbf{1}$$

Ora per il lemma 11.17 e per definizione di valutazione di una negazione si conclude

$$\nu(\neg\neg\mathbf{pr}) = \neg\nu(\neg\mathbf{pr}) = \neg\mathbf{1} = \mathbf{0}$$

Poi si osservi che (lo si dimostri per esercizio!) in ogni algebra di Heyting per ogni $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ vale

$$\mathbf{h} \leq \neg\neg\mathbf{h}$$

e dunque ricordando la definizione di valutazione di una negazione si ottiene

$$\nu(\mathbf{pr}) \leq \neg\neg\nu(\mathbf{pr}) = \nu(\neg\neg\mathbf{pr}) = \mathbf{0}$$

Da cui si conclude

$$\nu(\mathbf{pr}) = \mathbf{0}$$

Come accade per le valutazioni classiche proposizionali, anche per le valutazioni intuizioniste proposizionali su una data algebra di Heyting \mathcal{H} la valutazione di una proposizione dipende solo dalla valutazione delle sue variabili proposizionali:

Lemma 11.58 Date una proposizione \mathbf{pr} e date due valutazioni intuizioniste proposizionali

$$\nu_1 : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H} \qquad \nu_2 : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

se per ogni variabile proposizionale \mathbf{V}_k che occorre in \mathbf{pr} si ha che $\nu_1(\mathbf{V}_k) = \nu_2(\mathbf{V}_k)$ allora $\nu_1(\mathbf{pr}) = \nu_2(\mathbf{pr})$.

Dato che la valutazione intuizionista di una proposizione dipende solo dalla valutazione delle sue variabili proposizionali OGNI valutazione intuizionista ESTENDE in modo unico una data valutazione delle sue variabili proposizionali.

Theorem 11.59 (estensione di valutazione di variabili) Ogni funzione di variabili proposizionali a valori in un'algebra di Heyting

$$\xi : \mathbf{Var}_{\mathbf{prop}} \longrightarrow \mathcal{H}$$

si estende in modo unico ad una valutazione intuizionista

$$\nu_\xi : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

tale che

$$\nu_\xi \cdot \mathbf{i} = \xi$$

ovvero

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Var}_{\mathbf{prop}} & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{H} \\ \downarrow i & \nearrow \exists! \nu_\xi & \\ \mathbf{Prop}(\mathcal{L}) & & \end{array}$$

Dim. La valutazione di una proposizione è per definizione univocamente determinata da quella delle sue variabili proposizionali (vedi anche lemma 11.58).

Osservazione Nel seguito grazie al teorema 8.9 definiremo una valutazione intuizionista semplicemente definendola sulle variabili proposizionali.

Def. 11.60 (classificazione della verità di una proposizione rispetto alla semantica intuizionista)

pr è **TAUTOLOGIA** nella semantica intuizionista

se è vera in *OGNI* modello intuizionista,

(e quindi la sua negazione $\neg\text{pr}$ è falsa in ogni modello intuizionista)

pr è **OPINIONE** nella semantica intuizionista

se *NON* è vera in almeno un modello intuizionista

e pure la sua negazione $\neg\text{pr}$ *NON* è vera in almeno un modello intuizionista,

pr è **PARADOSSO** (o meglio **ANTINOMIA**) nella semantica intuizionista

se la sua negazione $\neg\text{pr}$ è vera in ogni modello intuizionista.

Def. 11.61 (classificazione della verità di un sequente rispetto alla semantica intuizionista)

Dato un sequente $\Gamma \vdash \text{pr}$ in un linguaggio proposizionale L

$\Gamma \vdash \text{pr}$ si dice **valido/soddisfacibile/NON valido/Insoddisfacibile/opinione/paradosso** rispetto alla semantica intuizionista se e solo se lo è la proposizione $\Gamma^{\&} \rightarrow \text{pr}$ che rappresenta il suo significato.

Def. 11.62 (validità intuizionista di regola ad una premessa) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha_1}{\Gamma_2 \vdash \alpha_2}$$

si dice **valida rispetto alla semantica intuizionista**

se *OGNI* valutazione intuizionista

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

che rende vero il sequente

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1$$

ovvero per cui vale $\nu(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \alpha_1) = 1$, rende vero pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \alpha_2$$

ovvero si ha pure che $\nu(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \alpha_2) = 1$

Def. 11.63 (validità intuizionista di regola a due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha_1 \quad \Gamma_2 \vdash \alpha_2}{\Gamma_3 \vdash \alpha_3}$$

si dice **valida rispetto alla semantica intuizionista)**

se *OGNI* valutazione intuizionista

$$\nu : PROP(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0, 1\}$$

che rende veri **ENTRAMBI** i sequente

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \alpha_2$$

ovvero per cui vale $\nu(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \alpha_1) = 1$ e $\nu(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \alpha_2) = 1$, rende vero pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \alpha_3$$

ovvero si ha che $\nu(\Gamma_3^{\&} \rightarrow \alpha_3) = 1$.

Si osservi che un sequente è reso vero da una valutazione se e solo se la valutazione delle sue premesse è minore della valutazione della sua conclusione:

Lemma 11.64 *Dato un sequente $\Gamma \vdash \text{pr}$ in un linguaggio proposizionale L e una valutazione intuizionista $\nu : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{H}$ si ha che*

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \text{pr}) = \mathbf{1} \quad \text{sse} \quad \nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\text{pr})$$

Dim. Dato che per definizione $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \text{pr}) = \nu(\Gamma^{\&}) \rightarrow \nu(\text{pr})$ allora la tesi segue dal lemma 11.17 in quanto si ha che vale

$$\nu(\Gamma^{\&}) \rightarrow \nu(\text{pr}) = \mathbf{1} \quad \text{sse} \quad \nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\text{pr})$$

Per dimostrare che una tautologia proposizionale intuizionista è anche semantica dobbiamo dimostrare che ogni sequente derivabile in \mathbf{DNI}_p o nel calcolo equivalente \mathbf{LI}_p è vero in ogni valutazione intuizionista in un'algebra di Heyting qualsiasi. A tal scopo ci conviene dimostrare che sono validi gli assiomi e le regole proposizionali di uno dei due calcoli. Scegliamo di mostrare la validità delle regole della deduzione naturale proposizionale \mathbf{DNI}_p in quanto agiscono essenzialmente solo sulle conclusioni del sequente.

Theorem 11.65 (validità delle regole \mathbf{DNI}_p) *Tutti gli assiomi di \mathbf{DNI}_p sono tautologie semantiche e TUTTE le regole di \mathbf{DNI}_p sono valide rispetto alla semantica intuizionista.*

Dim.

1. *Validità assioma del vero*

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν si vede che l'assioma della costante vero

$$\begin{array}{c} \text{ax-tt} \\ \Gamma \vdash \text{tt} \end{array}$$

in quanto $\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\text{tt}) = \mathbf{1}$ e per il lemma 11.64

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \text{tt}) = \mathbf{1}$$

2. *validità regola dell'ex-falso-quodlibet*

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \text{ ex-f-q}$$

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν se la premessa è vera per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \perp) = \mathbf{1}$$

allora per il lemma 11.64 si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\perp) = \mathbf{0}$$

e dunque

$$\mathbf{0} \leq \nu(\mathbf{A})$$

da cui concludiamo

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A})$$

ovvero per il lemma 11.64

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{1}$$

ossia la conclusione della regola è pure vera per ν .

3. validità della regola dello scambio a sx

$$\frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C} \text{sc}_{\text{sx}}$$

segue dalla commutatività dell'estremo inferiore e si lascia come esercizio al lettore.

4. validità della regola della congiunzione $\&-\text{Sn}_1$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A}} \&-\text{Sn}_1$$

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν se la premessa è vera per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B}) = \mathbf{1}$$

per il lemma 11.64 e la definizione di valutazione si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A} \& \mathbf{B}) = \nu(\mathbf{A}) \wedge \nu(\mathbf{B}) \leq \nu(\mathbf{A})$$

da cui segue che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A})$$

e quindi per il lemma 11.17

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{1}$$

e quindi pure la conclusione è vera per ν .

5. La validità della regola $\&-\text{Sn}_2$ si dimostra analogamente alla validità di $\&-\text{Sn}_1$.

6. validità della regole della congiunzione $\&-D$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \quad \Gamma \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \& \mathbf{B}} \&-D$$

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν se entrambe le premesse sono vere per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$$

per il lemma 11.64 si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A}) \quad \text{e} \quad \nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{B})$$

da cui segue che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A}) \wedge \nu(\mathbf{B}) = \nu(\mathbf{A} \& \mathbf{B})$$

e quindi per il lemma 11.64 si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A} \& \mathbf{B}) = \mathbf{1}$$

e quindi pure la conclusione è vera per ν .

7. validità delle regole di disgiunzione \vee -Sn

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{C} \quad \Gamma, \mathbf{B} \vdash \mathbf{C}}{\Gamma \vdash \mathbf{C}} \vee\text{-Sn}$$

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν se le premesse sono tutte vere per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \mathbf{1} \quad \nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}) = \mathbf{1} \quad \nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) = \mathbf{1}$$

per il lemma 11.64 e la definizione di valutazione si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \nu(\mathbf{A}) \vee \nu(\mathbf{B})$$

ed inoltre

$$\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{A}) = \nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}) \leq \nu(\mathbf{C})$$

e pure

$$\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{B}) = \nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{B}) \leq \nu(\mathbf{C})$$

e per definizione di estremo superiore ne segue che

$$(\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{A})) \vee (\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{B})) \leq \nu(\mathbf{C})$$

che unito alla distributività dell'estremo superiore sulla congiunzione (vedi lemma 11.13)

$$(\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{A})) \vee (\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{B})) = \nu(\Gamma^{\&}) \wedge (\nu(\mathbf{A}) \vee \nu(\mathbf{B}))$$

permette di concludere

$$\nu(\Gamma^{\&}) \wedge (\nu(\mathbf{A}) \vee \nu(\mathbf{B})) \leq \nu(\mathbf{C})$$

Ora da questo e dal aver dedotto sopra che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A}) \vee \nu(\mathbf{B})$$

ne segue che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{C})$$

e quindi per il lemma 11.64 e la definizione di valutazione si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{C}) = \mathbf{1}$$

e quindi pure la conclusione è vera per ν .

8. validità della regola della disgiunzione \vee -Dn₁

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \vee\text{-Dn}_1$$

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν se la premessa è vera per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{1}$$

per il lemma 11.64 si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A})$$

da cui segue che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A}) \vee \nu(\mathbf{B}) = \nu(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

e quindi per il lemma 11.64 si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \mathbf{1}$$

e quindi pure la conclusione è vera per ν .

9. *validità della regola di disgiunzione \vee -D_{n2}* si dimostra analogamente alla validità di \vee -D_{n1}.

10. *validità della regola di implicazione \rightarrow -D*

$$\frac{\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}}{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}} \rightarrow -D$$

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν se la premessa è vera per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$$

allora il lemma 11.64 e la definizione di valutazione si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{A}) = \nu(\Gamma^{\&} \& \mathbf{A}) \leq \nu(\mathbf{B})$$

e per definizione di pseudocomplemento ne segue

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A}) \rightarrow \nu(\mathbf{B})$$

e per definizione di valutazione di un'implicazione

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$$

e per il lemma 11.64 si conclude che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})) = \mathbf{1}$$

e quindi pure la conclusione è vera per ν .

11. *validità della regola di implicazione \rightarrow -S_n*

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \quad \Gamma \vdash \mathbf{A}}{\Gamma \vdash \mathbf{B}} \rightarrow -S_n$$

Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e una valutazione ν se le premesse sono tutte vere per ν ossia

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})) = \mathbf{1} \quad \nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}) = \mathbf{1}$$

per il lemma 11.64 e la definizione di valutazione si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \nu(\mathbf{A}) \rightarrow \nu(\mathbf{B})$$

e anche

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A})$$

Ora da $\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A}) \rightarrow \nu(\mathbf{B})$ per definizione di pseudocomplemento segue che

$$\nu(\Gamma^{\&}) \wedge \nu(\mathbf{A}) \leq \nu(\mathbf{B})$$

e dall'ipotesi $\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A})$ si conclude

$$\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{B})$$

e per il lemma 11.64 si ha che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{1}$$

e quindi pure la conclusione è vera per ν .

Le validità delle regole della negazione seguono dal fatto che si può definire $\neg \mathbf{A} \equiv \mathbf{A} \rightarrow \perp$.

Da questo teorema chiaramente segue il seguente:

Theorem 11.66 (teorema di validità di \mathbf{DNI}_p per la semantica intuizionista) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , se il sequente $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in \mathbf{DNI}_p allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$ è valida rispetto alla semantica intuizionista, ovvero ogni valutazione intuizionista rende vera $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$.

Dim. Segue dal teorema 11.65 considerando che dagli assiomi di una derivazione la validità è conservata da tutte le regole fino alla radice per tutte le valutazioni intuizioniste, ovvero per tutti i modelli intuizionisti.

Lemma 11.67 (validità regola composizione) La regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \text{fr} \quad \Gamma, \text{fr}, \Gamma'' \vdash \alpha}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \alpha} \text{ comp}$$

è valida rispetto alla semantica intuizionista ovvero tutte le regole di $\mathbf{DNI}_{p,c}$ sono valide rispetto alla semantica intuizionista.

Corollary 11.68 Ogni regola derivata in $\mathbf{DNI}_{p,c}$ è valida rispetto alla semantica intuizionista.

Dim. Una regola derivata in $\mathbf{DNI}_{p,c}$ è abbreviazione di una sequenza di regole del calcolo ed essendo queste valide rendono pure valida la regola derivata stessa.

Corollary 11.69 Tutte le regole di \mathbf{LI}_p sono valide rispetto alla semantica classica.

Dim. Segue dal lemma 11.67 e dal corollario 11.68 sapendo che le regole di \mathbf{LI}_p sono regole derivate in $\mathbf{DNI}_{p,c}$ per il teorema 5.66.

Theorem 11.70 (completezza della semantica intuizionista) Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , se un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ è valido rispetto alla semantica intuizionista, ovvero vero in ogni valutazione, allora $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in \mathbf{DNI}_p (e quindi in \mathbf{LI}_p).

Dim. Se il sequente $\Gamma \vdash \alpha$ è valido rispetto alla semantica intuizionista allora è valido anche per la seguente valutazione “identica” nell'algebra di Lindenbaum di \mathbf{LI}_p che è la stessa di \mathbf{DNI}_p per l'equivalenza dei calcoli 5.68:

$$\nu_{\text{id}} : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})$$

tale che

$$\nu_{\text{id}}(\text{pr}) \equiv [\text{pr}]$$

ove si conclude che

$$\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha) = [\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha] = [\text{tt}]$$

Quindi per definizione di ordine nell'algebra di Lindenbaum si ha che

$$\text{tt} \vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$$

è derivabile in \mathbf{LI}_p e in \mathbf{DNI}_p e usando la regola comp con l'assioma $\vdash \text{tt}$

$$\frac{\vdash \text{tt} \quad \text{tt} \vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ comp}$$

si trova pure che

$$\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$$

è derivabile in \mathbf{DNI}_p , e anche in \mathbf{LI}_p , e per il lemma 5.38 ottenuto grazie all'invertibilità delle regole di congiunzione a sinistra e dell'implicazione in \mathbf{LI}_p , si conclude che $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in \mathbf{LI}_p e quindi in \mathbf{DNI}_p essendo calcoli equivalenti.

Quindi possiamo concludere che:

TAUTOLOGIA semantica intuizionista	=	TAUTOLOGIA FORMALE in $\mathbf{LI}_p/\mathbf{DNI}_p$
OPINIONE semantica intuizionista	=	OPINIONE FORMALE in $\mathbf{LI}_p/\mathbf{DNI}_p$
PARADOSSO semantica intuizionista	=	PARADOSSO FORMALE in $\mathbf{LI}_p/\mathbf{DNI}_p$

Utali lemmi:

Lemma 11.71 Un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ formulato in un linguaggio proposizionale \mathcal{L} NON è derivabile in \mathbf{LI}_p se e solo se esiste un'algebra di Heyting e una valutazione $\nu : \mathbf{PROP}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{H}$ tale che in ν NON vale $\nu(\Gamma^{\&}) \leq \mathbf{nu}(\alpha)$ ovvero

$$\nu(\Gamma^{\&}) \not\leq \mathbf{nu}(\alpha)$$

e ν risulta essere un contromodello del sequente.

Dim. Ricordiamo che per il lemma 11.64 $\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\alpha)$ vale se e solo se $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha) = \mathbf{1}$. Ora per il teorema di validità e completezza 11.66,11.70 si ha che $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha) \neq \mathbf{1}$ se e solo se $\Gamma \vdash \alpha$ NON è derivabile in \mathbf{LI}_p . Quindi $\nu(\Gamma^{\&}) \leq \nu(\alpha)$ NON vale, ovvero

$$\nu(\Gamma^{\&}) \not\leq \mathbf{nu}(\alpha)$$

se e solo se $\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha) \neq \mathbf{1}$ e se e solo se $\Gamma \vdash \alpha$ NON è derivabile in \mathbf{LI}_p .

Esempio di contromodello intuizionista.

Si può concludere che il sequente

$$\neg(\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \ \vee \ \neg\mathbf{B}$$

NON è derivabile in \mathbf{LI}_p usando il lemma 11.71 definendo un contromodello.

A tal scopo prendiamo come algebra di Heyting \mathcal{H} la topologia dei reali τ_{reali} sui reali \mathcal{R} definiamo una valutazione ν definendo i suoi valori solo sulle variabili proposizionali

$$\nu(\mathbf{A}) =]\mathbf{0}, \mathbf{2}[\quad \nu(\mathbf{B}) =]\mathbf{2}, \mathbf{4}[$$

e questo a definirla su ogni proposizione grazie al teorema 8.9.

Ne segue che

$$\nu(\neg\mathbf{A}) =]\mathbf{2}, +\infty[\cup]-\infty, \mathbf{0}[\quad \text{e} \quad \nu(\neg\mathbf{B}) =]\mathbf{4}, +\infty[\cup]-\infty, \mathbf{2}[$$

e quindi

$$\nu(\neg\mathbf{A} \ \vee \ \neg\mathbf{B}) =]\mathbf{2}, +\infty[\cup]-\infty, \mathbf{2}[= \mathcal{R} \setminus \{\mathbf{2}\}$$

ma $\nu(\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}) = \emptyset$ e quindi

$$\nu(\neg(\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B})) = \mathcal{R}$$

da cui concludiamo che

$$\nu(\neg(\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B})) = \mathcal{R} \not\subseteq \nu(\neg\mathbf{A} \ \vee \ \neg\mathbf{B}) = \mathcal{R} \setminus \{\mathbf{2}\}$$

e per il lemma 11.71 il sequente $\neg(\mathbf{A} \ \& \ \mathbf{B}) \vdash \neg\mathbf{A} \ \vee \ \neg\mathbf{B}$ NON è derivabile in \mathbf{LI}_p .

11.2 Validità e completezza della logica classica predicativa con uguaglianza rispetto semantica booleana predicativa

Diamo di seguito la definizione di modello booleano predicativo per la logica classica predicativa con uguaglianza. Faremo uso della notazione descritta all'inizio di sezione 8.6 e usata per definire la semantica classica predicativa.

Def. 11.72 (modello booleano predicativo) Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$
- variabili

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

un *modello booleano predicativo* per \mathcal{L} è dato da

- un'algebra di *Boole completa* \mathcal{B}
- un dominio (=insieme NON VUOTO) \mathbf{D}
- un'interpretazione dei termini sotto contesto come funzioni n -arie in D

$$\nu : Term(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{Fun}(D^n, D)$$

- un'interpretazione delle formule sotto contesto come funzioni n -arie in \mathcal{B}

$$\nu : Form(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{Fun}(D^n, \mathcal{B})$$

tale che

- le costanti sono interpretate come elementi del dominio $\nu(\mathbf{c}_{j[\]}) \in \mathbf{Fun}(D^0, D)$
- le variabili sono interpretate come *proiezioni*

$$\nu(\mathbf{v}_{\mathbf{k}\sigma}) = \pi_{\mathbf{k}} : D^{\mathbf{n}} \longrightarrow D$$

- le funzioni n_k -arie come funzioni n_k -arie sul dominio

$$\nu(\mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_k}]}) : D^{\mathbf{n}_k} \longrightarrow D$$

- per ogni termine t_σ di L con k la lunghezza di σ

$$\nu(\mathbf{t}_\sigma) = \nu(\mathbf{t}_{\mathbf{v}(\mathbf{t})}) \cdot \mathbf{In}(\mathbf{t}, \sigma) : D^{\mathbf{k}} \longrightarrow D$$

-

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i}]}) : D^{\mathbf{i}} \longrightarrow \mathcal{B}$$

e

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i})_\sigma) = \nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i}]}) \cdot \mathbf{In}(\mathbf{t}, \sigma) : D^{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathcal{B}$$

ove k è la lunghezza di σ .

•

$$\nu(\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{2[v_1, v_2]}) = \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathcal{B}$$

tale che

$$\nu(v_1 = v_{2[v_1, v_2]})(d_1, d_2) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } d_1 = d_2 \\ 0 & \text{se } d_1 \neq d_2 \end{cases}$$

e inoltre

$$\nu(\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_{2\sigma}) = \mathbf{D}^k \longrightarrow \mathcal{B}$$

ove k è la lunghezza di σ e vale pure

$$\nu(\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_{2\sigma}) = \nu(\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{2[v_1, v_2]}) \cdot \langle \nu(\mathbf{t}_{1\sigma}), \nu(\mathbf{t}_{2\sigma}) \rangle$$

- La costante falso sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento minimo dell'algebra di boole $Fun(D^k, \mathcal{B})$ (si veda definizione 11.25)

$$\nu(\perp_\sigma) = \mathbf{0} : \mathbf{D}^k \longrightarrow \mathcal{B}$$

ovvero la funzione costante 0.

- La costante vero sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento massimo dell'algebra di boole $Fun(D^k, \mathcal{B})$ (si veda definizione 11.25)

$$\nu(\mathbf{tt}_\sigma) = \mathbf{1} : \mathbf{D}^k \longrightarrow \mathcal{B}$$

ovvero la funzione costante 1.

- per formule $\mathbf{fr}_{1\sigma}, \mathbf{fr}_{2\sigma}, \mathbf{fr}_\sigma$ di \mathcal{L} con contesto in $Form_{cont}(\mathcal{L})$ e k la lunghezza di σ valgono le seguenti:

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \ \& \ \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \wedge \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \wedge è l'estremo inferiore dell'algebra di Boole $Fun(D^k, \mathcal{B})$ (si veda definizione 11.25).

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \ \vee \ \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \vee \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \vee è l'estremo superiore dell'algebra di Boole $Fun(D^k, \{0, 1\})$ (si veda definizione 11.25)

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \ \rightarrow \ \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \rightarrow \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \rightarrow è l'estremo superiore dell'algebra di Boole $Fun(D^k, \mathcal{B})$ (si veda definizione 11.25)

—

$$\nu((\neg \mathbf{fr})_\sigma) = \nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$$

ove $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$ è il complementare di $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)$ dell'algebra di Boole $Fun(D^k, \{0, 1\})$ (si veda definizione 11.25).

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\forall v_n \ \mathbf{fr})_{\sigma \setminus v_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \longrightarrow \{0, 1\}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1} \dots \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus v_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigwedge_{\mathbf{e} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{e}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k))$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{fr})_{\sigma \setminus v_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \rightarrow \mathcal{B}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1} \dots \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus v_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigvee_{\mathbf{e} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{e}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

Lemma 11.73 Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$
- variabili

$$\mathit{Var} \equiv \{ x_n \mid n \in \mathit{Nat} \}$$

e un dominio \mathbf{D} e un'algebra di Boole completa \mathcal{B} , la funzione interpretazione dei termini e formule di \mathcal{L} sotto contesto è *univocamente* determinata dalle interpretazioni dei simboli di costante, funzione e predicati atomici diversi dall'uguaglianza. In altre termini date due valutazioni relative ν_1 e ν_2 allo stesso dominio \mathbf{D} se valgono le seguenti condizioni

-

$$\nu_1(\mathbf{c}_{j|j}) = \nu_2(\mathbf{c}_{j|j}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^0, \mathbf{D})$$

per ogni costante c_j al variare di $j \in J$

-

$$\nu_1(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) = \nu_2(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) \in \mathbf{M}(\mathbf{D}^k, \mathbf{D})$$

per ogni funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$

-

$$\nu_1(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) = \nu_2(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^i, \mathcal{B})$$

per ogni predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$.

allora per termini in contesto t_σ qualsiasi e formule in contesto qualsiasi \mathbf{fr}_σ

$$\nu_1(t_\sigma) = \nu_2(t_\sigma) \quad \nu_1(\mathbf{fr}_\sigma) = \nu_2(\mathbf{fr}_\sigma)$$

Lemma 11.74 (sostituzione) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e una valutazione booleana predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Boole completa \mathcal{B} per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L e un'altro termine in contesto s_{σ_3}

$$\nu((\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[\mathbf{v}_j/\mathbf{s}])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \nu(\mathbf{s}_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3} \rangle$$

$$\nu((\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[\mathbf{v}_j/\mathbf{s}])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \nu(\mathbf{s}_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i
e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_2 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte, e allo stesso modo con $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con σ_2 e poi con σ_3 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte.

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Lemma 11.75 (indebolimento) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e una valutazione booleana predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Boole completa \mathcal{B} per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L se $v_j \notin VL(t)$ e $v_j \not\in NL(\mathbf{fr})$ allora

$$\nu(\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(\mathbf{t}_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \pi_{\mathbf{n}_1+1}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} \rangle$$

$$\nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \pi_{\mathbf{n}_1+1}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i
e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_2 .

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Def. 11.76 (modello booleano predicativo di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *modello booleano predicativo di una formula* \mathbf{fr} una valutazione booleana predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Boole completa \mathcal{B} per cui vale

$$\nu((\mathbf{fr})_{\mathbf{v}(\mathbf{fr})}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$$

ove k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente il valore di verità della sua chiusura universale rispetto a ν è 1

$$\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) = \mathbf{1} \in \mathcal{B}$$

In tal caso diciamo che ν rende vera \mathbf{fr} .

Def. 11.77 (contromodello booleano di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *CONTROModello booleano* di una formula \mathbf{fr} una valutazione booleana ν su un dominio D a valori in un'algebra di Boole completa \mathcal{B} che NON rende vera \mathbf{fr} , ovvero per cui

$$\nu((\mathbf{fr})_{\mathbf{v}(\mathbf{fr})}) \neq \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$$

se k è il numero delle sue variabili libere.

Def. 11.78 (modello booleano predicativo di un sequente) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , una valutazione classica ν su un dominio D a valori in un'algebra di Boole completa \mathcal{B} rende vero un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ nello stesso linguaggio se e solo se

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})_{\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(D^k, \mathcal{B})$$

se k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente se e solo se la valutazione rende vera la chiusura universale del suo significato ovvero risulta che

$$\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})) = \mathbf{1} \in \mathcal{B}$$

Def. 11.79 (classificazione della verità booleana di una formula) Data una formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo L

\mathbf{fr} è VALIDA nella semantica booleana predicativa

se è vera in OGNI modello booleano predicativo, ovvero è vera per ogni valutazione booleana,

\mathbf{fr} è SODDISFACIBILE nella semantica booleana predicativa

se è vera in almeno un modello booleano predicativo; ovvero è vera per qualche valutazione booleana predicativa;

\mathbf{fr} è NON VALIDA nella semantica booleana predicativa

se NON è vera in qualche modello booleano predicativo,

ovvero esiste una valutazione booleana predicativa ν tale che $\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) \neq \mathbf{1}$;

\mathbf{pr} è INSODDISFACIBILE nella semantica booleana predicativa

se NON è vera in OGNI modello booleano predicativo,

ovvero per ogni valutazione booleana predicativa ν si ha che $\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) \neq \mathbf{1}$.

e poi poniamo che

\mathbf{fr} è TAUTOLOGIA nella semantica booleana predicativa

se è vera in OGNI modello booleano predicativo,

\mathbf{fr} è OPINIONE nella semantica booleana predicativa

se è vera in un modello booleano predicativo e falsa in un altro,

\mathbf{fr} è PARADOSSO (o meglio ANTINOMIA) nella semantica classica predicativa

se la sua negazione $\neg \mathbf{fr}$ è vera in ogni modello booleano predicativo.

Def. 11.80 (classificazione della verità rispetto alla semantica booleana di un sequente) Dato un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ in un linguaggio predicativo L un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ si dice **valido/soddisfacibile/NON valido/Insoddisfacibile/opinione/paradosso** nella semantica booleana predicativa se e solo se lo è la formula $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee}$ che rappresenta il suo significato.

Def. 11.81 (validità booleana predicativa di regola ad una premessa) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$$

si dice **valida rispetto alla semantica booleana predicativa**

se OGNI valutazione booleana predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Boole completa \mathcal{B} che rende vero il sequente

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1$$

ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee})) = \mathbf{1}$, rende vero pure il seguente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

ovvero si ha pure che $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})) = \mathbf{1}$

Def. 11.82 (validità booleana predicativa di regola a due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}$$

si dice **valida rispetto alla semantica booleana predicativa**

se OGNI valutazione booleana predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Boole completa \mathcal{B} che rende veri ENTRAMBI i sequenti

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2$$

ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \Delta_1^{\vee})) = \mathbf{1}$ e $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \Delta_2^{\vee})) = \mathbf{1}$, rende vero pure il seguente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \Delta_3$$

ovvero si ha che $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_3^{\&} \rightarrow \Delta_3^{\vee})) = \mathbf{1}$.

Ci conviene dimostrare che sono valide le regole proposizionali della deduzione naturale $\mathbf{DNC}_=$:

Theorem 11.83 (validità delle regole $\mathbf{DNC}_=$) Tutti gli assiomi di $\mathbf{DNC}_=$ sono tautologie semantiche e TUTTE le regole di $\mathbf{DNC}_=$ sono valide rispetto alla semantica booleana predicativa.

Dim. Controlliamo la validità delle regole dei quantificatori.

1. *validità della regola \forall -Sn*

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v})}{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})} \forall\text{-Sn}$$

che abbiamo riscritto con metavariable per variabili v .

Sia ν una valutazione su un dominio D a valori in un'algebra di Boole \mathcal{B} e sia σ una lista di k variabili che contiene TUTTE le variabili libere che compaiono nelle formule della regola eccetto v e per semplicità si suppone v di indice maggiore di tutte le variabili libere che compaiono nelle formule della regola (se non lo fosse si procede analogamente come segue sotto inserendola in un eventuale contesto in modo corretto).

Supponiamo che

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_{\sigma}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$$

ovvero per definizione di valutazione

$$\nu(\Gamma_{\sigma}^{\&}) \rightarrow \nu((\forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_{\sigma}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$$

e per il lemma 11.17

$$\nu(\Gamma_{\sigma}^{\&}) \leq \nu((\forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_{\sigma})$$

in $\mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$. Dato che per ogni k -upla $(d_1, \dots, d_k) \in D^k$

$$\nu((\forall v A(v))_{\sigma})(d_1, \dots, d_k) = \bigwedge_{d \in D} \nu(A(v)_{[\sigma, v]})(d_1, \dots, d_k, d)$$

e che per il lemma 11.74

$$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{t})_{\sigma}) = \nu(\mathbf{A}(\mathbf{v})_{[\sigma, \mathbf{v}]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k, \nu(\mathbf{t}_{\sigma}) \rangle$$

si ottiene che

$$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{t})_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \nu(\mathbf{A}(\mathbf{v})_{[\sigma, \mathbf{v}]})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \nu(\mathbf{t}_\sigma)(\bar{\mathbf{d}}))$$

Quindi

$$\nu((\forall v A(v))_\sigma)(d_1, \dots, d_k) = \bigwedge_{d \in D} \nu(A(v)_{[\sigma, v]})(d_1, \dots, d_k, d) \leq \nu(A(v)_{[\sigma, v]})(d_1, \dots, d_k, \nu(t_\sigma)(\bar{d}))$$

ovvero

$$\nu((\forall v A(v))_\sigma)(d_1, \dots, d_k) \leq \nu(A(t)_\sigma)(d_1, \dots, d_k)$$

in \mathbf{B} e per l'arbitrarietà della k -upla $(d_1, \dots, d_k) \in D^k$ concludiamo che

$$\nu((\forall v A(v))_\sigma) \leq \nu(A(t)_\sigma)$$

in $\mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$. Infine da questo e l'ipotesi $\nu(\Gamma_\sigma^\&) \leq \nu((\forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma)$ otteniamo che

$$\nu(\Gamma_\sigma^\&) \leq \nu(\mathbf{A}(\mathbf{t})_\sigma)$$

da cui per il lemma 11.17

$$\nu((\Gamma^\& \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}))_\sigma) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$$

come volevasi dimostrare.

2. validità della regola \forall -D

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{u})}{\Gamma \vdash \forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v})} \forall\text{-D} \quad (u \notin VL(\Gamma, \forall x A(x)))$$

che abbiamo riscritto con metavariables per variabili v, u . Sia ν una valutazione su un dominio D a valori in un'algebra di Boole \mathbf{B} e sia σ una lista di k variabili che contiene TUTTE le variabili libere che compaiono nelle formule della regola eccetto u e non contiene v . Per semplicità si suppone che sia u che v siano di indice MAGGIORE di tutte le variabili in σ (se non lo fossero si procede analogamente come segue inserendole nel contesto con σ in modo corretto).

Supponiamo che in $\mathbf{Fun}(D^k, \mathcal{B})$ valga

$$\nu((\Gamma^\& \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u}))_{\sigma, \mathbf{u}}) = \nu(\Gamma^\&_{\sigma, \mathbf{u}}) \rightarrow \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}}) = \mathbf{1}$$

Dal lemma 11.17 si ottiene che vale pure

$$\nu(\Gamma^\&_{\sigma, \mathbf{u}}) \leq \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}})$$

Dato che u non compare libera in Γ per il lemma 11.75 si ottiene che

$$\nu(\Gamma^\&_{\sigma, \mathbf{u}}) = \nu(\Gamma^\&_\sigma) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k \rangle$$

ovvero

$$\nu(\Gamma^\&_\sigma) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k \rangle \leq \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}})$$

Ovvero per ogni $\bar{\mathbf{d}} \equiv (d_1, \dots, d_k) \in D^k$ e per ogni $d \in D$ otteniamo che

$$\nu(\Gamma^\&_\sigma)(\bar{\mathbf{d}}) \leq \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{d})$$

Siccome $d \in D$ è arbitrario si ottiene che

$$\nu(\Gamma^\&_\sigma)(\bar{\mathbf{d}}) \leq \bigwedge_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{d})$$

ricordando che

$$\nu((\forall v A(v))_\sigma)(d_1, \dots, d_k) = \bigwedge_{d \in D} \nu(A(u)_{\sigma, u})(d_1, \dots, d_k, d)$$

si conclude che

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&})(\bar{\mathbf{d}}) \leq \nu((\forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k)$$

e per l'arbitrarietà della k -upla $\bar{\mathbf{d}}$ si conclude

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \leq \nu((\forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma)$$

ovvero per il lemma 11.17 e la definizione di valutazione booleana vale

$$\nu((\Gamma_\sigma^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma) = \nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \rightarrow \nu((\forall \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma) = \mathbf{1}$$

ovvero la conclusione della regola è vera nella valutazione booleana di partenza.

3. validità della regola \exists -Sn

$$\frac{\Gamma \vdash \exists \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}) \quad \Gamma, \mathbf{A}(\mathbf{u}) \vdash \mathbf{C}}{\Gamma \vdash \mathbf{C}} \exists\text{-Sn } (u \notin VL(\Gamma, \exists v A(v), C))$$

che abbiamo riscritto con metavariables per variabili v, u . Sia ν una valutazione su un dominio D a valori in un'algebra di Boole \mathcal{B} e sia σ una lista di k variabili che contiene TUTTE le variabili libere che compaiono nelle formule della regola eccetto u e non contiene v . Per semplicità si suppone che sia u che v siano di indice MAGGIORE di tutte le variabili in σ (se non lo fossero si procede analogamente come segue inserendole nel contesto con σ in modo corretto).

Sia ν una valutazione su un dominio D a valori in un'algebra di Boole \mathcal{B} e sia σ una lista di k variabili che contiene TUTTE le variabili libere che compaiono nelle formule della regola in cui NON compare v e neppure u e per semplicità si suppone che queste siano ENTRAMBE con indici maggiori di tutte le variabili in σ (se non lo fossero si procede analogamente come segue inserendola nel contesto con σ in modo corretto).

Supponiamo che in $Fun(D^k, \mathcal{B})$ valgano

$$\nu((\Gamma_\sigma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma) = \nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \rightarrow \nu((\exists \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma) = \mathbf{1}$$

e

$$\nu((\Gamma_\sigma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{C})_{\sigma, \mathbf{u}}) = \nu(\Gamma_\sigma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{u}))_{\sigma, \mathbf{u}} \rightarrow \nu(\mathbf{C}_{\sigma, \mathbf{u}}) = \mathbf{1}$$

Dal lemma 11.17 si ottiene che valgono

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \leq \nu((\exists \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma)$$

e pure

$$\nu((\Gamma_\sigma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{u}))_{\sigma, \mathbf{u}}) \leq \nu(\mathbf{C}_{\sigma, \mathbf{u}})$$

Si noti che

$$\nu((\Gamma_\sigma^{\&} \& \mathbf{A}(\mathbf{u}))_{\sigma, \mathbf{u}}) = \nu(\Gamma_\sigma^{\&})_{\sigma, \mathbf{u}} \wedge \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u}))_{\sigma, \mathbf{u}}$$

Dato che u non compare libera nè in C e nè in Γ per il lemma 11.75 si ottiene che

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&})_{\sigma, \mathbf{u}} = \nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k \rangle$$

e anche che

$$\nu(\mathbf{C}_{\sigma, \mathbf{u}}) = \nu(\mathbf{C}_\sigma) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k \rangle$$

ovvero

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k \rangle \wedge \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}}) \leq \nu(\mathbf{C}_\sigma) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k \rangle$$

Ovvero per ogni $\bar{d} \equiv (d_1, \dots, d_k) \in D^K$ e per ogni $d \in D$ otteniamo che

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&})(\bar{d}) \wedge \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{d}) \leq \nu(\mathbf{C}_\sigma)(\bar{d})$$

Siccome $d \in D$ è arbitrario si ottiene che

$$\bigvee_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\Gamma_\sigma^{\&})(\bar{d}) \wedge \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{d}) \leq \nu(\mathbf{C}_\sigma)(\bar{d})$$

e per la distributività degli estremi superiori sull'estremo inferiore binario si ottiene

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&})(\bar{d}) \wedge \bigvee_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{\sigma, \mathbf{u}})(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{d}) \leq \nu(\mathbf{C}_\sigma)(\bar{d})$$

ovvero

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&})(\bar{d}) \wedge \nu((\exists \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) \leq \nu(\mathbf{C}_\sigma)(\bar{d})$$

Ora da questo unito all'ipotesi che

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \leq \nu((\exists \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v}))_\sigma)$$

ne segue che

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&})(\bar{d}) \leq \nu(\mathbf{C}_\sigma)(\bar{d})$$

e per l'arbitrarietà della k -upla \bar{d} si conclude

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{C}_\sigma)$$

ovvero per il lemma 11.17 e la definizione di valutazione booleana vale

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{C})_\sigma) = \nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \rightarrow \nu(\mathbf{C}_\sigma) = \mathbf{1}$$

ovvero la conclusione della regola è vera nella valutazione booleana di partenza.

4. validità della regola di \exists -Dn

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{A}(\mathbf{t})}{\Gamma \vdash \exists \mathbf{v} \mathbf{A}(\mathbf{v})} \exists\text{-Dn}$$

che abbiamo riscritto usando la metavariable v .

Sia ν una valutazione su un dominio D a valori in un'algebra di Boole \mathcal{B} e sia σ una lista di k variabili che contiene TUTTE le variabili libere che compaiono nelle formule della regola eccetto v e per semplicità si suppone v di indice maggiore di tutte le variabili libere che compaiono nelle formule della regola (se non lo fosse si procede analogamente come segue sotto inserendola in un eventuale contesto in modo corretto).

Supponiamo che

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{t}))_\sigma) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$$

Dal lemma 11.17 si ha che

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \leq \nu(\mathbf{A}(\mathbf{t})_\sigma)$$

e ricordando che per il lemma 11.74

$$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{t})_\sigma) = \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{[\sigma, \mathbf{u}]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_k, \nu(\mathbf{t}_\sigma) \rangle$$

In particolare ciò implica che per ogni $\bar{d} \equiv (d_1, \dots, d_k) \in D^k$ si ha per definizione

$$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{t})_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) = \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{[\sigma, \mathbf{u}]}) (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \nu(\mathbf{t}_\sigma)(\bar{d}))$$

e dal fatto che

$$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{[\sigma, \mathbf{u}]}) (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \nu(\mathbf{t}_\sigma)(\bar{\mathbf{d}})) \leq \bigvee_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{[\sigma, \mathbf{u}]}) (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{d})$$

si conclude

$$\nu(\mathbf{A}(\mathbf{t}_\sigma)) (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k) \leq \bigwedge_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{A}(\mathbf{u})_{[\sigma, \mathbf{u}]}) (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k, \mathbf{d}) = \nu((\exists \mathbf{u} \mathbf{A}(\mathbf{u}))_\sigma) ((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k))$$

e dall'ipotesi segue che

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) (\bar{\mathbf{d}}) \leq \nu((\exists \mathbf{u} \mathbf{A}(\mathbf{u}))_\sigma) (\bar{\mathbf{d}})$$

ovvero

$$\nu(\Gamma_\sigma^{\&}) \leq \nu((\exists \mathbf{u} \mathbf{A}(\mathbf{u}))_\sigma)$$

in $\mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$ e dunque

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{u} \mathbf{A}(\mathbf{u}))_\sigma) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{B})$$

La validità delle regole dell'uguaglianza segue banalmente per la definizione semantica di uguaglianza.

Da questo teorema chiaramente segue il seguente:

Theorem 11.84 (teorema di validità di $\mathbf{DNC}_=$ per la semantica booleana predicativa) Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^\vee$ è valida rispetto alla semantica booleana predicativa, ovvero ogni valutazione booleana rende vera $\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^\vee$.

Dim. Segue dal teorema 11.83 considerando che dagli assiomi di una derivazione la validità in tutti i modelli booleani è conservata da tutte le regole fino alla radice.

Lemma 11.85 (validità regola composizione) La regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \text{fr} \quad \Gamma, \text{fr}, \Gamma'' \vdash \alpha}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \alpha} \text{ comp}$$

è valida rispetto alla semantica booleana predicativa ovvero tutte le regole di $\mathbf{DNC}_{=,c}$ sono valide rispetto alla semantica booleana predicativa.

Corollary 11.86 Ogni regola derivata in $\mathbf{DNC}_{=,c}$ è valida rispetto alla semantica booleana predicativa.

Dim. Una regola derivata in $\mathbf{DNC}_{=,c}$ è abbreviazione di una sequenza di regole del calcolo ed essendo queste valide rendono pure valida la regola derivata stessa.

Corollary 11.87 Tutte le regole di $\mathbf{LC}_=$ e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica booleana predicativa.

Dim. Segue dal lemma 11.85 e dal corollario 11.86 sapendo che le regole di $\mathbf{LC}_=$ sono regole derivate in $\mathbf{DNC}_{=,c}$ (come le loro inverse) per il corollario ??.

Theorem 11.88 (completezza della semantica booleana predicativa) Un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ di formule in un linguaggio predicativo L è valido rispetto alla semantica booleana predicativa, ovvero vero in ogni valutazione booleana predicativa, allora $\Gamma \vdash \Delta$ è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$.

Dim. Si consideri l'algebra di Boole delle formule di L

$$\mathcal{A}(\mathcal{L}) \equiv \{ [\mathbf{fr}] \mid \mathbf{fr} \in \text{Form}(\mathcal{L}) \}$$

ove

$$[\mathbf{fr}] \equiv \{ \alpha \in \text{Form}(\mathcal{L}) \mid \vdash \mathbf{fr} \leftrightarrow \alpha \text{ è derivabile in } \mathbf{LC}_= \}$$

con la relazione

$$[\mathbf{fr}_1] \leq [\mathbf{fr}_2] \equiv \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2 \text{ è derivabile in } \mathbf{LC}_=$$

è detto *algebra di Lindenbaum della logica classica predicativa con uguaglianza*.

Tale algebra è di Boole con la stessa argomentazione in 11.24 però non è necessariamente completa. Per completarla usiamo l'immersione del teorema 11.41

$$\mathbf{im} : \mathcal{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \text{DM}(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$$

Poi si definisce una valutazione prendendo come dominio l'insieme quoziente dei termini di L alla relazione di equivalenza $t \simeq s$ sse $t = s$ è vero nella logica classica predicativa con uguaglianza, ossia

$$D \equiv \{ [t] \mid t \in \text{Term}(\mathcal{L}) \}$$

ove

$$[t] \equiv \{ s \in \text{Term}(\mathcal{L}) \mid \vdash t = s \text{ è derivabile in } \mathbf{DNC}_= \}$$

Come algebra di Boole completa si sceglie il completamento di Dedekind-MacNeille dell'algebra di Lindenbaum delle formule

$$\mathcal{B} \equiv \text{DM}(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$$

in modo tale

•

$$\nu(\mathbf{c}_{j[1]}) \equiv [\mathbf{c}_j] \in \mathbf{D}$$

•

$$\nu(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[v_1, \dots, v_{n_k}]})([t_1], \dots, [t_{n_k}]) \equiv [\mathbf{f}_k(t_1, \dots, t_{n_k})]$$

•

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[v_1, \dots, v_{n_i}]})([t_1], \dots, [t_{n_i}]) \equiv \mathbf{im}([\mathbf{P}_i(t_1, \dots, t_{n_i})]) \in \mathbf{DM}(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$$

. Per il lemma 11.73 ν si estende è univocamente determinata su tutti i termini e le formule sotto contesto di \mathcal{L} e quindi definisce un modello booleano in cui si dimostra che per ogni formula sotto contesto $\mathbf{fr}_v(\mathbf{fr})$

$$\nu(\mathbf{fr}_v(\mathbf{fr}))([v_1], \dots, [v_n]) = [\mathbf{fr}]$$

ove $v(\mathbf{fr}) \equiv [v_1, \dots, v_n]$.

Ora se $\Gamma \vdash \Delta$ è valido per ogni valutazione booleana significa che

$$\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)_{[1]}) = \mathbf{im}([\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)]) = \mathbf{im}([\mathbf{tt}]) \in \mathbf{DM}(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$$

Quindi per iniettività dell'immersione \mathbf{im} di ordine nell'algebra di Lindenbaum si ha che

$$\mathbf{tt} \vdash \mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)$$

è derivabile in $\mathbf{DNC}_=$ e per l'equivalenza con $\mathbf{LC}_=$ in teorema 5.57 tale sequente è pure derivabile in $\mathbf{LC}_=$ e usando la regola comp con l'assioma $\vdash \mathbf{tt}$

$$\frac{\vdash \mathbf{tt} \quad \mathbf{tt} \vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha}{\Gamma \vdash \alpha} \text{ comp}$$

si trova pure che

$$\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$$

è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ (e quindi anche in $\mathbf{DNC}_=$) e per il lemma 5.38 e per l'invertibilità della regola di $\forall\text{-D}$ in $\mathbf{LC}_=$ si conclude che $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in $\mathbf{LC}_=$ e quindi in $\mathbf{DNC}_=$.

Quindi concludiamo che

TAUTOLOGIA semantica booleana predicativa	=	TAUTOLOGIA FORMALE in $\mathbf{DNC}_=/\mathbf{LC}_=$
OPINIONE semantica booleana predicativa	=	OPINIONE FORMALE in $\mathbf{DNC}_=/\mathbf{LC}_=$
PARADOSSO semantica booleana predicativa	=	PARADOSSO FORMALE in $\mathbf{DNC}_=/\mathbf{LC}_=$

11.3 Validità e completezza della logica intuizionista predicativa rispetto semantica intuizionista predicativa

Diamo di seguito la definizione di modello intuizionista predicativo per la logica intuizionista predicativa (senza uguaglianza dunque). Faremo uso della notazione descritta all'inizio di sezione 8.6 e usata per definire la semantica classica predicativa.

Def. 11.89 (modello intuizionista predicativo) Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$
- variabili

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

un modello intuizionista predicativo per \mathcal{L} è dato da

- un'algebra di *Heyting completa* \mathcal{H}
- un dominio (=insieme NON VUOTO) \mathbf{D}
- un'interpretazione dei termini sotto contesto come funzioni n -arie in D

$$\nu : Term(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{Fun}(D^n, D)$$

- un'interpretazione delle formule sotto contesto come funzioni n -arie in \mathcal{H}

$$\nu : Form(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{Fun}(D^n, \mathcal{H})$$

tale che

- le costanti sono interpretate come elementi del dominio $\nu(\mathbf{c}_{j[\]}) \in \mathbf{Fun}(D^0, D)$
- le variabili

$$\nu(\mathbf{v}_{\mathbf{k}\sigma}) = \pi_{\mathbf{k}} : D^n \longrightarrow D$$

- le funzioni n_k -arie come funzioni n_k -arie sul dominio

$$\nu(\mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_k}]}) : D^{\mathbf{n}_k} \longrightarrow D$$

- per ogni termine t_σ di L con k la lunghezza di σ

$$\nu(t_\sigma) = \nu(\overline{t_{\mathbf{v}(t)}}) \cdot \mathbf{In}(t, \sigma) : D^k \longrightarrow D$$

-

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i}]}) : D^i \longrightarrow \mathcal{H}$$

e

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i})_\sigma) = \nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_i}]}) \cdot \mathbf{In}(t, \sigma) : D^k \longrightarrow \mathcal{H}$$

ove k è la lunghezza di σ .

- La costante falso sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento minimo dell'algebra di Heyting $Fun(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.25)

$$\nu(\perp_\sigma) = \mathbf{0} : \mathbf{D}^k \rightarrow \mathcal{H}$$

ovvero la funzione costante 0.

- La costante vero sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento massimo dell'algebra di Heyting $Fun(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.25)

$$\nu(\top_\sigma) = \mathbf{1} : \mathbf{D}^k \rightarrow \mathcal{H}$$

ovvero la funzione costante 1.

- per formule $\mathbf{fr}_{1\sigma}, \mathbf{fr}_{2\sigma}, \mathbf{fr}_\sigma$ di \mathcal{L} con contesto in $Form_{cont}(\mathcal{L})$ e k la lunghezza di σ valgono le seguenti:

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \wedge \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \wedge è l'estremo inferiore dell'algebra di Heyting $Fun(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.25).

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \vee \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \vee è l'estremo superiore dell'algebra di Heyting $Fun(D^k, \{0, 1\})$ (si veda definizione 11.25)

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \rightarrow \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \rightarrow \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \rightarrow è l'estremo superiore dell'algebra di Heyting $Fun(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.25)

—

$$\nu((\neg \mathbf{fr})_\sigma) = \nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$$

ove $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$ è il complementare di $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)$ dell'algebra di Heyting $Fun(D^k, \{0, 1\})$ (si veda definizione 11.25).

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \mathbf{fr})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \rightarrow \mathcal{H}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_h, \mathbf{d}_{h+2}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigwedge_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k))$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{fr})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \rightarrow \mathcal{H}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n_1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigvee_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n_1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n_1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

Lemma 11.90 Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$
- variabili

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

e un dominio \mathbf{D} e un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} , la funzione interpretazione dei termini e formule di L sotto contesto è *univocamente* determinata dalle interpretazioni dei simboli di costante, funzione e predicati atomici diversi dall'uguaglianza. In altre termini date due valutazioni relative ν_1 e ν_2 allo stesso dominio \mathbf{D} se valgono le seguenti condizioni

- $$\nu_1(\mathbf{c}_{j[\]}) = \nu_2(\mathbf{c}_{j[\]}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^0, \mathbf{D})$$
 per ogni costante c_j al variare di $j \in J$
- $$\nu_1(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) = \nu_2(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathbf{D})$$
 per ogni funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- $$\nu_1(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) = \nu_2(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^i, \mathcal{H})$$
 per ogni predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$.

allora per termini in contesto t_σ qualsiasi e formule in contesto qualsiasi \mathbf{fr}_σ

$$\nu_1(\mathbf{t}_\sigma) = \nu_2(\mathbf{t}_\sigma) \quad \nu_1(\mathbf{fr}_\sigma) = \nu_2(\mathbf{fr}_\sigma)$$

Lemma 11.91 (sostituzione) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e una valutazione intuizionista predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L e un'altro termine in contesto s_{σ_3}

$$\nu((\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[\mathbf{v}_j/\mathbf{s}])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \nu(\mathbf{s}_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{n_1+n_2}, \dots, \pi_{n_1+n_2+n_3} \rangle$$

$$\nu((\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[\mathbf{v}_j/\mathbf{s}])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \nu(\mathbf{s}_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{n_1+n_2}, \dots, \pi_{n_1+n_2+n_3} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i

e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_3 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte, e allo stesso modo con $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con σ_2 e poi con σ_3 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte.

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Lemma 11.92 (indebolimento) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e una valutazione booleana predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L se $v_j \notin VL(t)$ e $v_j \not\mathcal{N}L(\mathbf{fr})$ allora

$$\nu(t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(t_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \pi_{n_1+1}, \dots, \pi_{n_1+n_2} \rangle$$

$$\nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{n_1}, \pi_{n_1+1}, \dots, \pi_{n_1+n_2} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i

e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_2 .

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Def. 11.93 (modello intuizionista predicativo di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *modello intuizionista predicativo di una formula* \mathbf{fr} una valutazione intuizionista predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} per cui vale

$$\nu((\mathbf{fr})_{\mathbf{v}(\mathbf{fr})}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{H})$$

ove k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente il valore di verità della sua chiusura universale rispetto a ν è 1

$$\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) = \mathbf{1} \in \mathcal{H}$$

In tal caso diciamo che ν rende vera \mathbf{fr} .

Def. 11.94 (contromodello intuizionista di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *CONTROModello intuizionista di una formula* \mathbf{fr} una valutazione intuizionista ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} che NON rende vera \mathbf{fr} , ovvero per cui

$$\nu((\mathbf{fr})_{\mathbf{v}(\mathbf{fr})}) \neq \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{H})$$

se k è il numero delle sue variabili libere.

Def. 11.95 (modello intuizionista predicativo di un sequente) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , una valutazione intuizionista ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rende vero un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ nello stesso linguaggio se e solo se

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})_{\mathbf{v}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^k, \mathcal{H})$$

se k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente se e solo se la valutazione rende vera la chiusura universale del suo significato ovvero risulta che

$$\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \Delta^{\vee})) = \mathbf{1} \in \mathcal{H}$$

Def. 11.96 (classificazione della verità intuizionista di una formula) Data una formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo L

fr è **TAUTOLOGIA** nella semantica intuizionista predicativa

se è vera in OGNI modello intuizionista predicativo

fr è **OPINIONE** nella semantica intuizionista

se NON è vera in almeno un modello intuizionista predicativo

e pure la sua negazione \neg pr NON è vera in almeno un modello intuizionista predicativo,

fr è **PARADOSSO** (o meglio **ANTINOMIA** nella semantica intuizionista predicativo

se la sua negazione \neg fr è vera in ogni modello intuizionista predicativo.

Def. 11.97 (classificazione della verità rispetto alla semantica intuizionista di un sequente)

Dato un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ in un linguaggio predicativo L

un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ si dice **valido/opinione/paradosso** nella semantica intuizionista predicativa se e solo se lo è la formula $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$ che rappresenta il suo significato.

Def. 11.98 (validità intuizionista predicativa di regola ad una premessa) Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha_1}{\Gamma_2 \vdash \alpha_2}$$

si dice **valida rispetto alla semantica intuizionista predicativa**

se OGNI valutazione intuizionista predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} che rende vero il sequente

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1$$

ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \alpha_1)) = \mathbf{1}$, rende vero pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \alpha_2$$

ovvero si ha pure che $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \alpha_2)) = \mathbf{1}$

Def. 11.99 (validità intuizionista predicativa di regola a due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha_1 \quad \Gamma_2 \vdash \alpha_2}{\Gamma_3 \vdash \alpha_3}$$

si dice **valida rispetto alla semantica intuizionista predicativa**

se OGNI valutazione intuizionista predicativa ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} che rende veri ENTRAMBI i sequenti

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \alpha_2$$

ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \alpha_1)) = \mathbf{1}$ e $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \alpha_2)) = \mathbf{1}$, rende vero pure il sequente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \alpha_3$$

ovvero si ha che $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_3^{\&} \rightarrow \alpha_3)) = \mathbf{1}$.

Ci conviene dimostrare che sono valide le regole proposizionali della deduzione naturale **DNI**:

Theorem 11.100 (validità delle regole DNI) *Tutti gli assiomi di DNI sono tautologie semantiche e TUTTE le regole di DNI sono valide rispetto alla semantica intuizionista predicativa.*

Dim. La validità delle regole dei quantificatori segue nello stesso modo che in teorema 11.83.

Da questo teorema chiaramente segue il seguente:

Theorem 11.101 (teorema di validità di DNI per la semantica classica predicativa) Se il sequente $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in **DNI** allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$ è valida rispetto alla semantica classica predicativa, ovvero ogni valutazione classica rende vera $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$.

Dim. Segue dal teorema 11.125 considerando che dagli assiomi di una derivazione la validità in tutti i modelli intuizionisti è conservata da tutte le regole fino alla radice.

Lemma 11.102 (validità regola composizione) La regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \mathbf{fr} \quad \Gamma, \mathbf{fr}, \Gamma'' \vdash \alpha}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \alpha} \text{ comp}$$

è valida rispetto alla semantica classica predicativa ovvero tutte le regole di **DNI** on l'aggiunta della regola di composizione sono valide rispetto alla semantica classica predicativa.

Corollary 11.103 Ogni regola derivata in **DNI** è valida rispetto alla semantica intuizionista predicativa.

Dim. Una regola derivata in **DNI** con l'aggiunta della regola di composizione è abbreviazione di una sequenza di regole del calcolo ed essendo queste valide rendono pure valida la regola derivata stessa.

Corollary 11.104 Tutte le regole di **LI** e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica intuizionista predicativa.

Dim. Segue dal lemma 11.127 e dal corollario 11.128 sapendo che le regole di **LI** sono regole derivate in **DNI** con l'aggiunta della regola di composizione (come le loro inverse) per il corollario ??.

Theorem 11.105 (completezza della semantica intuizionista predicativa) Un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ di formule in un linguaggio predicativo L è valido rispetto alla semantica intuizionista predicativa, ovvero vero in ogni valutazione intuizionista predicativa, allora $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in **DNI**.

Dim. Si consideri l'algebra di Heyting delle formule di L

$$\mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \equiv \{ [\mathbf{fr}] \mid \mathbf{fr} \in \text{Form}(\mathcal{L}) \}$$

ove

$$[\mathbf{fr}] \equiv \{ \alpha \in \text{Form}(\mathcal{L}) \mid \vdash \mathbf{fr} \leftrightarrow \alpha \text{ è derivabile in LI} \}$$

con la relazione

$$[\mathbf{fr}_1] \leq [\mathbf{fr}_2] \equiv \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2 \text{ è derivabile in LI}$$

è detto *algebra di Lindenbaum della logica intuizionista predicativa*.

Tale algebra è di Heyting con la stessa argomentazione in 11.24 però non è necessariamente completa. Per completarla usiamo l'immersione del teorema 11.40

$$\text{im} : \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \longrightarrow DM(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$$

Poi si definisce una valutazione prendendo come dominio l'insieme dei termini di L , ossia

$$D \equiv \{ t \mid t \in \text{Term}(\mathcal{L}) \}$$

. Come algebra di Heyting completa si sceglie il completamento di Dedekind-MacNeille dell'algebra di Lindenbaum delle formule

$$\mathcal{H} \equiv DM(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$$

in modo tale

•

$$\nu(\mathbf{c}_{j[\]}) \equiv \mathbf{c}_j \in \mathbf{D}$$

•

$$\nu(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]})(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_k}) \equiv \mathbf{f}_k(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_k})$$

•

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]})(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_i}) \equiv \text{im}([\mathbf{P}_i(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_i})]) \in \mathbf{DM}(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$$

. Per il lemma 11.115 ν si estende è univocamente determinata su tutti i termini e le formule sotto contesto di \mathcal{L} e quindi definisce un modello intuizionista in cui si dimostra che per ogni formula sotto contesto $\mathbf{fr}_{v(\mathbf{fr})}$

$$\nu(\mathbf{fr}_{v(\mathbf{fr})})(v_1, \dots, v_n) = \mathbf{fr}$$

ove $v(\mathbf{fr}) \equiv [v_1, \dots, v_n]$.

Ora se $\Gamma \vdash \alpha$ è valido per ogni valutazione intuizionista significa che

$$\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)_{[\]}) = \text{im}(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)) = \text{im}(\mathbf{tt}) \in \mathbf{DM}(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$$

Quindi per iniettività dell'immersione im di ordine nell'algebra di Lindenbaum si ha che

$$\mathbf{tt} \vdash \mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)$$

è derivabile in **DNI** e per l'equivalenza con **LI** in teorema 5.57 tale sequente è pure derivabile in **LI** e usando la regola comp con l'assioma $\vdash \mathbf{tt}$

$$\frac{\vdash \mathbf{tt} \quad \mathbf{tt} \vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha}{\Gamma \vdash \alpha} \text{comp}$$

si trova pure che

$$\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$$

è derivabile in **LI** (e quindi anche in **DNI**) e per il lemma 5.38 e per l'invertibilità della regola di \forall -D in **LI** si conclude che $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in **LI** e quindi in **DNI**.

Quindi concludiamo che

TAUTOLOGIA semantica intuizionista predicativa	=	TAUTOLOGIA FORMALE in DNI/LI
OPINIONE semantica intuizionista predicativa	=	OPINIONE FORMALE in DNI/LI
PARADOSSO semantica intuizionista predicativa	=	PARADOSSO FORMALE in DNI/LI

Esempio di contromodello intuizionista Si può concludere che il sequente

$$\forall x (A(x) \vee B) \vdash \forall x A(x) \vee B$$

NON è derivabile in **LI** costruendo il seguente contromodello.

Prendiamo come algebra di Heyting completa \mathcal{H} la topologia dei reali τ_{reali} sui reali e come dominio i numeri naturali.

$$D \equiv \mathbf{Nat}$$

Poi definiamo una valutazione ν ponendo

$$\nu(B_{[\]}) \equiv]2, 4[$$

e

$$\nu(A(x)_{[x]})(d) \equiv]0, 2 + (1/d)[$$

Chiaramente per il lemma 11.115 questo determina un modello intuizionista predicativo.

Ne segue che

$$\nu((A(x) \vee B)_{[x]})(d) =]0, 2 + 1/d[\cup]2, 4[=]0, 4[$$

$$\nu((\forall x (A(x) \vee B))_{[1]}) = \bigcap_{d \in \mathbb{N}at}]0, 4[=]0, 4[$$

mentre

$$\nu((\forall x A(x))_{[1]}) = \bigcap_{d \in \mathbb{N}at}]0, 2 + (1/d)[=]0, 2[$$

e quindi

$$\nu((\forall x A(x) \vee B)_{[1]}) =]0, 2[\cup]2, 4[$$

ovvero

$$\nu((\forall x (A(x) \vee B))_{[1]}) =]0, 4[\not\subseteq]0, 2[\cup]2, 4[$$

Quindi

$$\nu((\forall x (A(x) \vee B) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B))_{[1]}) \neq 1 \in \tau_{reali}$$

e dunque abbiamo trovato un contromodello del sequente di partenza.

11.4 Predicati valutati su un'algebra di Heyting

Def. 11.106 (Relazione d'equivalenza valutata) Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e un'insieme non vuoto D una funzione

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

si dice *relazione d'equivalenza valutata in \mathcal{H}* o *relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata*, se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:

- *riflessività*: per ogni $d_1, d_2 \in D$

$$1 = E(d_1, d_2) \quad \text{sse} \quad d_1 = d_2 \in D$$

- *simmetria*: per ogni $d_1, d_2 \in D$

$$E(d_1, d_2) \leq E(d_2, d_1)$$

- *transitività*: per ogni $d_1, d_2, d_3 \in D$

$$E(d_1, d_2) \wedge E(d_2, d_3) \leq E(d_1, d_3)$$

Def. 11.107 (Predicato valutato) Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} , un'insieme non vuoto D e una *relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata*

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

allora una funzione su \mathcal{D}

$$P : D \rightarrow \mathcal{H}$$

si dice *predicato \mathcal{H} -valutato rispetto ad E su D* se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:

- *sostitutività*: per ogni $c, d \in D$

$$E(c, d) \wedge P(c) \leq P(d)$$

Def. 11.108 Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} , due insiemi non vuoti D e D' dotati di una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata rispettivamente

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H} \quad \mathcal{E}' : D' \times D' \rightarrow \mathcal{H}$$

allora una funzione

$$f : D \rightarrow D'$$

si dice *funzione \mathcal{H} -valutata rispetto ad E, \mathcal{E}'* se e solo se soddisfa le seguenti condizioni:

- *sostitutività*: per ogni $c, d \in D$

$$E(c, d) \leq \mathcal{E}'(f(c), f(d))$$

Poi indichiamo con

$$Fun_v(D, D')$$

l'insieme delle funzioni \mathcal{H} -valutate rispetto ad E, \mathcal{E}' .

Lemma 11.109 (prodotto n -ario con uguaglianza valutata) Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} e un insieme non vuoto D dotato di una relazione d'equivalenza H -valutata

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

allora l'insieme del prodotto cartesiano n -ario D^n si può dotare di una relazione d'equivalenza H -valutata

$$E_n : D^n \times D^n \rightarrow \mathcal{H}$$

definita in tal modo

$$E_n((c_1, \dots, c_n), (d_1, \dots, d_n)) \equiv \bigwedge_{j=1, \dots, n} E(c_j, d_j)$$

Dim Per esercizio.

Lemma 11.110 *proiezioni* Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} , un'insieme non vuoto D , una *relazione d'equivalenza valutata in H*

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

allora le proiezioni

$$\pi_i : D^n \rightarrow D$$

sono funzioni H -valutate rispetto ad E_n e ad E .

Dim. per esercizio.

Lemma 11.111 Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} , un'insieme non vuoto D , una *relazione d'equivalenza valutata in H*

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

e date una m -upla di funzioni H -valutate rispetto ad E

$$f_j : D \rightarrow D$$

per $j = 1, \dots, m$ allora la funzione *coppia m -aria*

$$\langle f_1, \dots, f_m \rangle : D \rightarrow D^m$$

definita in tal modo

$$\langle f_1, \dots, f_m \rangle(\bar{d}) \equiv (f_1(\bar{d}), \dots, f_m(\bar{d})) \in D^m$$

per $\bar{d} \in D$, è una funzione H -valutata rispetto ad E_n e ad E_m .

Dim. per esercizio.

Def. 11.112 Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} , un'insieme non vuoto D , una *relazione d'equivalenza valutata in H*

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

denotiamo con

$$Pred_v(D^n, \mathcal{H})$$

l'insieme dei predicati n -ari H -valutati rispetto ad E_n su D^n .

Lemma 11.113 Data un'algebra di Heyting \mathcal{H} , un'insieme non vuoto D , una *relazione d'equivalenza valutata in H*

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

allora

- l'insieme $Pred_E(D^n, \mathcal{H})$ dotato dell'ordine puntuale ovvero per $P, Q \in Pred_E(D, \mathcal{H})$

$$P \leq Q \equiv \forall \bar{d} \in D^n \ P(\bar{d}) \leq Q(\bar{d})$$

è un'algebra di Heyting ove

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \text{funzione costante 1} \\ 0 &\equiv \text{funzione costante 0} \\ P \wedge Q &\equiv \text{è la funzione } (P \wedge Q)(\bar{d}) \equiv P(\bar{d}) \wedge Q(\bar{d}) \text{ per } \bar{d} \in D^n \\ P \vee Q &\equiv \text{è la funzione } (P \vee Q)(\bar{d}) \equiv P(\bar{d}) \vee Q(\bar{d}) \text{ per } \bar{d} \in D \\ Q^P &\equiv \text{è la funzione } (Q^P)(\bar{d}) \equiv Q(\bar{d})^{P(\bar{d})} \text{ per } \bar{d} \in D \end{aligned}$$

per $P, Q \in Pre_E(D^n, \mathcal{H})$.

- Se \mathcal{H} è completa pure $Pre_E(D^n, \mathcal{H})$ è completa rispetto ad

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} f_i &\equiv \text{è la funzione } (\bigwedge_{i \in I} f_i)(\bar{d}) \equiv \bigwedge_{i \in I} (f_i(\bar{d})) \in \mathcal{H} \text{ per } \bar{d} \in D \\ \bigvee_{i \in I} f_i &\equiv \text{è la funzione } (\bigvee_{i \in I} f_i)(\bar{d}) \equiv \bigvee_{i \in I} (f_i(\bar{d})) \in \mathcal{H} \text{ per } \bar{d} \in D \end{aligned}$$

- Se \mathcal{H} è un'algebra di Boole pure $Pre_E(D, \mathcal{H})$ è un'algebra di Boole.

11.5 Validità e completezza della logica intuizionista predicativa rispetto semantica intuizionista predicativa con UGUAGLIANZA

Diamo di seguito la definizione di modello intuizionista predicativo per la logica intuizionista predicativa con UGUAGLIANZA. Faremo uso della notazione descritta all'inizio di sezione 8.6 e usata per definire la semantica intuizionista predicativa.

Def. 11.114 (modello intuizionista predicativo con uguaglianza) Dato linguaggio predicativo \mathcal{L} con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$
- variabili

$$Var \equiv \{ x_n \mid n \in Nat \}$$

un modello intuizionista predicativo con uguaglianza per \mathcal{L} è dato da

- un'algebra di *Heyting completa* \mathcal{H}
- un dominio (=insieme NON VUOTO) \mathbf{D}
- una *relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata*

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

- un'interpretazione dei termini sotto contesto come funzioni \mathcal{H} -valutate n -arie su D^n in D rispetto a E_n e ad E (vedi definizione 11.108 e lemma 11.109)

$$\nu : Term(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} Fun_v(D^n, D)$$

- un'interpretazione delle formule come predicati \mathcal{H} -valutati n -ari rispetto ad E_n (vedi definizione 11.107 e lemma 11.109)

$$\nu : Form(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} Pred_v(D^n, \mathcal{H})$$

tale che

- le costanti sono interpretate come elementi del dominio $\nu(\mathbf{c}_{j[\]}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^0, \mathbf{D})$
- le variabili sono interpretate come *proiezioni*

$$\nu(\mathbf{v}_{\mathbf{k}\sigma}) = \pi_{\mathbf{k}} : \mathbf{D}^{\mathbf{n}} \longrightarrow \mathbf{D}$$

- le funzioni n_k -arie come *funzioni \mathcal{H} -valutate rispetto a E_{n_k} e ad E*

$$\nu(\mathbf{f}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{n}_k}]}) : \mathbf{D}^{\mathbf{n}_k} \longrightarrow \mathbf{D}$$

- per ogni termine t_σ di \mathbf{L} con k la lunghezza di σ

$$\nu(\mathbf{t}_\sigma) = \nu(\mathbf{t}_{\mathbf{v}(\mathbf{t})}) \cdot \mathbf{In}(\mathbf{t}, \sigma) : \mathbf{D}^k \longrightarrow \mathbf{D}$$

- i predicati n_i -ari come *predicati \mathcal{H} -valutati rispetto a E_{n_i} e ad E*

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) : \mathbf{D}^i \longrightarrow \mathcal{H}$$

e

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_\sigma) = \nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) \cdot \mathbf{In}(\mathbf{t}, \sigma) : \mathbf{D}^k \longrightarrow \mathcal{H}$$

ove k è la lunghezza di σ .

-

$$\nu(\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2_{[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]}) = \mathbf{D}^2 \longrightarrow \mathcal{H}$$

tale che

$$\nu(\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2_{[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]})(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$$

- La costante falso sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento minimo dell'algebra di Heyting $\mathbf{Pred}_v(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.113)

$$\nu(\perp_\sigma) = \mathbf{0} : \mathbf{D}^k \longrightarrow \{0, 1\}$$

ovvero la funzione costante 0.

- La costante vero sotto contesto σ di lunghezza k è interpretato come l'elemento massimo dell'algebra di Heyting $\mathbf{Pred}_v(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.113)

$$\nu(\mathbf{tt}_\sigma) = \mathbf{1} : \mathbf{D}^k \longrightarrow \mathcal{H}$$

ovvero la funzione costante 1.

- per formule $\mathbf{fr}_{1\sigma}, \mathbf{fr}_{2\sigma}, \mathbf{fr}_\sigma$ di \mathcal{L} con contesto in $\mathbf{Form}_{cont}(\mathcal{L})$ e k la lunghezza di σ valgono le seguenti:

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \ \& \ \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \wedge \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \wedge è l'estremo inferiore dell'algebra di Heyting $\mathbf{Pred}_v(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.113).

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \ \vee \ \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \vee \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \vee è l'estremo superiore dell'algebra di Heyting $\mathbf{Pred}_v(D^k, \{0, 1\})$ (si veda definizione 11.113)

—

$$\nu((\mathbf{fr}_1 \ \rightarrow \ \mathbf{fr}_2)_\sigma) = \nu((\mathbf{fr}_1)_\sigma) \rightarrow \nu((\mathbf{fr}_2)_\sigma)$$

ove \rightarrow è l'estremo superiore dell'algebra di Heyting $\mathbf{Pred}_v(D^k, \mathcal{H})$ (si veda definizione 11.113)

—

$$\nu((\neg \mathbf{fr})_\sigma) = \nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$$

ove $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)^c$ è il complementare di $\nu(\mathbf{fr}_\sigma)$ dell'algebra di Heyting $\mathbf{Pred}_v(D^k, \{0, 1\})$ (si veda definizione 11.113).

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \ \mathbf{fr})_{\sigma \setminus \mathbf{v}_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \rightarrow \mathcal{H}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1} \dots \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\forall \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus v_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_h, \mathbf{d}_{h+2}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigwedge_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k))$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

- per ogni formula in contesto \mathbf{fr}_σ di \mathcal{L} con k lunghezza di σ e $v_n \in \sigma$

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{fr})_{\sigma \setminus v_n}) : \mathbf{D}^{k-1} \rightarrow \mathcal{H}$$

ove $\sigma \setminus v_n$ denota la lista senza v_n posto che

$$\sigma \equiv \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1} \dots \mathbf{v}_k$$

allora

$$\nu((\exists \mathbf{v}_n \mathbf{f})_{\sigma \setminus v_n})((\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n_1}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)) = \bigvee_{\mathbf{d} \in \mathbf{D}} \nu(\mathbf{fr}_\sigma)(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n_1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k)$$

al variare di $(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n_1}, \mathbf{d}, \mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_k) \in \mathbf{D}^{k-1}$

Infine nel caso che $n = 1$ o $n = k$ valgono le uguaglianze sopra togliendo dalle coppie di elementi del dominio (anche TUTTE se $n = 1 = k$) gli elementi i cui indici non compaiono prima o dopo v_n .

Lemma 11.115 Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , con

- costanti \mathbf{c}_j per $j \in J$
- simboli di funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$
- simboli di predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$
- variabili

$$\mathit{Var} \equiv \{ x_n \mid n \in \mathit{Nat} \}$$

e un dominio \mathbf{D} e un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} , la funzione interpretazione dei termini e formule di \mathcal{L} sotto contesto è *univocamente* determinata dalle interpretazioni dei simboli di costante, funzione e predicati atomici diversi dall'uguaglianza. In altre termini date due valutazioni relative ν_1 e ν_2 allo stesso dominio \mathbf{D} se valgono le seguenti condizioni

-

$$\nu_1(\mathbf{c}_{j|j}) = \nu_2(\mathbf{c}_{j|j}) \in \mathbf{Fun}(\mathbf{D}^0, \mathbf{D})$$

per ogni costante c_j al variare di $j \in J$

-

$$\nu_1(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) = \nu_2(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) \in \mathbf{Fun}_v(\mathbf{D}^k, \mathbf{D})$$

per ogni funzione $f_k(v_1, \dots, v_{n_k})$ per $k \in K$

-

$$\nu_1(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) = \nu_2(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) \in \mathbf{Fun}_v(\mathbf{D}^i, \mathcal{H})$$

per ogni predicato atomico $P_i(v_1, \dots, v_{n_i})$ per $i \in I$.

allora per termini in contesto t_σ qualsiasi e formule in contesto qualsiasi \mathbf{fr}_σ

$$\nu_1(t_\sigma) = \nu_2(t_\sigma) \quad \nu_1(\mathbf{fr}_\sigma) = \nu_2(\mathbf{fr}_\sigma)$$

Lemma 11.116 (sostituzione) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e una valutazione intuizionista predicativa con uguaglianza ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rispetto ad una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata in H

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L e un'altro termine in contesto s_{σ_3}

$$\nu((\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[\mathbf{v}_j/\mathbf{s}])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \nu(\mathbf{s}_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3} \rangle$$

$$\nu((\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}[\mathbf{v}_j/\mathbf{s}])_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \nu(\mathbf{s}_{[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]}), \pi_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i

e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_2 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte, e allo stesso modo con $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con σ_2 e poi con σ_3 supposto che si mantenga la condizione che tutte le variabili siano distinte.

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Lemma 11.117 (indebolimento) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , e valutazione intuizionista predicativa con uguaglianza ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rispetto ad una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata in H

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

per ogni termine in contesto $t_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}$ e formula in contesto $\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_3]}$ di L se $v_j \notin VL(t)$ e $v_j \notin NL(\mathbf{fr})$ allora

$$\nu(\mathbf{t}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(\mathbf{t}_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \pi_{\mathbf{n}_1 + 1}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} \rangle$$

$$\nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, v_j, \sigma_2]}) = \nu(\mathbf{fr}_{[\sigma_1, \sigma_2]}) \cdot \langle \pi_1, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1}, \pi_{\mathbf{n}_1 + 1}, \dots, \pi_{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2} \rangle$$

ove n_i per $i = 1, 2, 3$ è la lunghezza di σ_i

e con $[\sigma_1, v_j, \sigma_2]$ si intende la lista ottenuto allungando σ_1 dapprima con v_j e poi con σ_2 .

Dim. Si procede per induzione sulla formazione dei termini e delle formule sotto contesto.

Def. 11.118 (modello intuizionista predicativo con uguaglianza di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *modello intuizionista predicativo con uguaglianza di una formula* \mathbf{fr} una valutazione intuizionista predicativa con uguaglianza ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rispetto ad una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata in H

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

per cui vale

$$\nu((\mathbf{fr})_{\nu(\mathbf{fr})}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Pred}_\nu(\mathbf{D}^k, \mathcal{H})$$

ove k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente il valore di verità della sua chiusura universale rispetto a ν è 1

$$\nu(\mathbf{Cu}(\mathbf{fr})) = \mathbf{1} \in \mathcal{H}$$

In tal caso diciamo che ν rende vera \mathbf{fr} .

Def. 11.119 (contromodello intuizionista predicativo con uguaglianza di una formula) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , chiamiamo *CONTR* modello intuizionista di una formula \mathbf{fr} una valutazione intuizionista predicativa con uguaglianza ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rispetto ad una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata in \mathbf{H}

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

che NON rende vera \mathbf{fr} , ovvero per cui

$$\nu((\mathbf{fr})_{\nu(\mathbf{fr})}) \neq \mathbf{1} \in \mathbf{Pred}_{\nu}(\mathbf{D}^k, \mathcal{H})$$

se k è il numero delle sue variabili libere.

Def. 11.120 (classificazione della verità intuizionista di una formula) Data una formula \mathbf{fr} di un linguaggio predicativo L

\mathbf{fr} è **TAUTOLOGIA** nella semantica intuizionista predicativa con uguaglianza
se è vera in OGNI modello intuizionista predicativo

\mathbf{fr} è **OPINIONE** nella semantica intuizionista con uguaglianza

se NON è vera in almeno un modello intuizionista predicativo con uguaglianza

e pure la sua negazione $\neg\mathbf{pr}$ NON è vera in almeno un modello intuizionista predicativo con uguaglianza,

\mathbf{fr} è **PARADOSSO** (o meglio **ANTINOMIA** nella semantica intuizionista predicativa con uguaglianza

se la sua negazione $\neg\mathbf{fr}$ è vera in ogni modello intuizionista predicativo con uguaglianza.

Def. 11.121 (modello intuizionista predicativo con uguaglianza di un sequente) Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} , una valutazione intuizionista predicativa con uguaglianza ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rispetto ad una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata in \mathbf{H}

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

rende vero un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ nello stesso linguaggio se e solo se

$$\nu((\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)_{\nu(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)}) = \mathbf{1} \in \mathbf{Pred}_{\nu}(\mathbf{D}^k, \mathcal{H})$$

se k è il numero delle sue variabili libere, o equivalentemente se e solo se la valutazione rende vera la chiusura universale del suo significato ovvero risulta che

$$\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)) = \mathbf{1} \in \mathcal{H}$$

Def. 11.122 (classificazione della verità rispetto alla semantica intuizionista con uguaglianza di un sequente)

Dato un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ in un linguaggio predicativo L

un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ si dice **valido/opinione/paradosso** nella semantica intuizionista predicativa se e solo se lo è la formula $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$ che rappresenta il suo significato.

Def. 11.123 (validità intuizionista predicativa con uguaglianza di regola ad una premessa)

Una regola del calcolo dei sequenti ad una premessa del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha_1}{\Gamma_2 \vdash \alpha_2}$$

si dice **valida rispetto alla semantica intuizionista predicativa con uguaglianza**

se OGNI ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rispetto ad una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata in \mathbf{H}

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

che rende vero il seguente

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1$$

ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \alpha_1)) = \mathbf{1}$, rende vero pure il seguente **conclusione**

$$\Gamma_2 \vdash \alpha_2$$

ovvero si ha pure che $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \alpha_2)) = \mathbf{1}$

Def. 11.124 (validità intuizionista predicativa con uguaglianza di regola a due premesse) Una regola a due premesse del tipo

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \alpha_1 \quad \Gamma_2 \vdash \alpha_2}{\Gamma_3 \vdash \alpha_3}$$

si dice **valida rispetto alla semantica intuizionista predicativa**)

se OGNI ν su un dominio D a valori in un'algebra di Heyting completa \mathcal{H} rispetto ad una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata in H

$$E : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

che rende veri ENTRAMBI i sequenti

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 \vdash \alpha_2$$

ovvero per cui vale $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_1^{\&} \rightarrow \alpha_1)) = \mathbf{1}$ e $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_2^{\&} \rightarrow \alpha_2)) = \mathbf{1}$, rende vero pure il seguente **conclusione**

$$\Gamma_3 \vdash \alpha_3$$

ovvero si ha che $\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma_3^{\&} \rightarrow \alpha_3)) = \mathbf{1}$.

Ci conviene dimostrare che sono valide le regole proposizionali della deduzione naturale **DNI₌**:

Theorem 11.125 (validità delle regole DNI₌) Tutti gli assiomi di **DNI₌** sono tautologie semantiche e **TUTTE** le regole di **DNI₌** sono valide rispetto alla semantica intuizionista predicativa.

Dim. La validità delle regole dei quantificatori segue nello stesso modo che in teorema 11.83.

Da questo teorema chiaramente segue il seguente:

Theorem 11.126 (teorema di validità di DNI₌ per la semantica classica predicativa) Se il sequente $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in **DNI₌** allora $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$ è valida rispetto alla semantica classica predicativa, ovvero ogni valutazione classica rende vera $\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$.

Dim. Segue dal teorema 11.125 considerando che dagli assiomi di una derivazione la validità in tutti i modelli booleani è conservata da tutte le regole fino alla radice.

Lemma 11.127 (validità regola composizione) La regola di composizione

$$\frac{\Gamma' \vdash \text{fr} \quad \Gamma, \text{fr}, \Gamma'' \vdash \alpha}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \alpha} \text{ comp}$$

è valida rispetto alla semantica classica predicativa ovvero tutte le regole di **DNI_{=,c}** sono valide rispetto alla semantica classica predicativa.

Corollary 11.128 Ogni regola derivata in **DNI_{=,c}** è valida rispetto alla semantica intuizionista predicativa.

Dim. Una regola derivata in $\mathbf{DNI}_{=,c}$ è abbreviazione di una sequenza di regole del calcolo ed essendo queste valide rendono pure valida la regola derivata stessa.

Corollary 11.129 Tutte le regole di $\mathbf{LI}_{=}$ e le loro inverse sono valide rispetto alla semantica intuizionista predicativa.

Dim. Segue dal lemma 11.127 e dal corollario 11.128 sapendo che le regole di $\mathbf{LI}_{=}$ sono regole derivate in $\mathbf{DNI}_{=,c}$ (come le loro inverse) per il corollario ??.

Theorem 11.130 (completezza della semantica intuizionista predicativa) *Un sequente $\Gamma \vdash \alpha$ di formule in un linguaggio predicativo L è valido rispetto alla semantica intuizionista predicativa, ovvero vero in ogni valutazione intuizionista predicativa, allora $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in $\mathbf{DNI}_{=}$.*

Dim. Si consideri l'algebra di Heyting delle formule di L

$$\mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \equiv \{ [\mathbf{fr}] \mid \mathbf{fr} \in \text{Form}(\mathcal{L}) \}$$

ove

$$[\mathbf{fr}] \equiv \{ \alpha \in \text{Form}(\mathcal{L}) \mid \vdash \mathbf{fr} \leftrightarrow \alpha \text{ è derivabile in } \mathbf{LI} \}$$

con la relazione

$$[\mathbf{fr}_1] \leq [\mathbf{fr}_2] \equiv \mathbf{fr}_1 \vdash \mathbf{fr}_2 \text{ è derivabile in } \mathbf{LI}$$

è detta *algebra di Lindenbaum della logica intuizionista predicativa*.

Tale algebra è di Heyting con la stessa argomentazione in 11.24 però non è necessariamente completa. Per completarla usiamo l'immersione del teorema 11.40

$$\text{im} : \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \longrightarrow \text{DM}(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$$

Poi si definisce una valutazione prendendo come dominio l'insieme dei termini di L , ossia

$$D \equiv \{ t \mid t \in \text{Term}(\mathcal{L}) \}$$

Come algebra di Heyting completa si sceglie il completamento di Dedekind-MacNeille dell'algebra di Lindenbaum delle formule

$$\mathcal{H} \equiv \text{DM}(\mathcal{A}(\mathcal{L}))$$

e come relazione d'equivalenza su D valutata in $\text{DM}(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$ si sceglie la classe di equivalenza del predicato di uguaglianza

$$E(t, t') \equiv \text{im}([t = t'])$$

in modo tale

•

$$\nu(\mathbf{c}_{j[\]}) \equiv \mathbf{c}_j \in \mathbf{D}$$

•

$$\nu(\mathbf{f}_k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_k}]}) (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_k}) \equiv \mathbf{f}_k(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_k})$$

•

$$\nu(\mathbf{P}_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i})_{[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_i}]}) (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_i}) \equiv \text{im}([\mathbf{P}_i(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n_i})]) \in \text{DM}(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$$

Chiaramente le funzioni e i predicati di \mathcal{L} sono $\text{DM}(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$ -valutati rispetto ad E per gli assiomi dell'uguaglianza. Per il lemma 11.115 ν si estende è univocamente determinata su tutti i termini e le formule sotto contesto di \mathcal{L} e quindi definisce un modello booleano in cui si dimostra che per ogni formula sotto contesto $\mathbf{fr}_v(\mathbf{fr})$

$$\nu(\mathbf{fr}_v(\mathbf{fr})) (v_1, \dots, v_n) = \mathbf{fr}$$

ove $v(\mathbf{fr}) \equiv [v_1, \dots, v_n]$.

Ora se $\Gamma \vdash \alpha$ è valido per ogni valutazione intuizionista significa che

$$\nu(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)_{[\]}) = \mathbf{im}(\mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)) = \mathbf{im}(\mathbf{tt}) \in \mathbf{DM}(\mathcal{A}_i(\mathcal{L}))$$

Quindi per iniettività dell'immersione \mathbf{im} di ordine nell'algebra di Lindenbaum si ha che

$$\mathbf{tt} \vdash \mathbf{Cu}(\Gamma^{\&} \rightarrow \alpha)$$

è derivabile in $\mathbf{DNI}_=$ e per l'equivalenza con $\mathbf{LI}_=$ in teorema 5.57 tale sequente è pure derivabile in $\mathbf{LI}_=$ e usando la regola \mathbf{comp} con l'assioma $\vdash \mathbf{tt}$

$$\frac{\vdash \mathbf{tt} \quad \mathbf{tt} \vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha}{\Gamma \vdash \alpha} \mathbf{comp}$$

si trova pure che

$$\vdash \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$$

è derivabile in \mathbf{LI} (e quindi anche in $\mathbf{DNI}_=$) e per il lemma 5.38 e per l'invertibilità della regola di \forall -D in $\mathbf{LI}_=$ si conclude che $\Gamma \vdash \alpha$ è derivabile in $\mathbf{LI}_=$ e quindi in $\mathbf{DNI}_=$.

Quindi concludiamo che

TAUTOLOGIA semantica intuizionista predicativa con uguaglianza	=	TAUTOLOGIA FORMALE in $\mathbf{DNI}_=/\mathbf{LI}_=$
OPINIONE semantica intuizionista predicativa con uguaglianza	=	OPINIONE FORMALE in $\mathbf{DNI}_=/\mathbf{LI}_=$
PARADOSSO semantica intuizionista predicativa con uguaglianza	=	PARADOSSO FORMALE in $\mathbf{DNI}_=/\mathbf{LI}_=$

Esempio di contromodello intuizionista con uguaglianza Si può concludere che il sequente

$$\vdash \forall y \forall x (x = y \vee \neg x = y)$$

NON è derivabile in $\mathbf{LI}_=$ costruendo il seguente contromodello.

Prendiamo come algebra di Heyting completa \mathcal{H} la topologia dei reali τ_{reali} sui reali e come dominio un insieme di due elementi:

$$D \equiv \{a, b\}$$

e una relazione d'equivalenza \mathcal{H} -valutata

$$E : \{a, b\} \times \{a, b\} \longrightarrow \tau_{reali}$$

$$E(a, a) = E(b, b) = 1 \quad E(a, b) = E(b, a) \equiv]0, 1[$$

Presa una *qualsiasi* valutazione ν si ha che Ne segue che

$$\nu((x = y)_{[x,y]})(a, b) \equiv]0, 1[$$

e anche che

$$\nu((\neg x = y)_{[x,y]})(a, b) \equiv]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

e quindi

$$\nu((x = y \vee \neg x = y)_{[x,y]})(a, b) = \mathcal{R} \setminus \{0, 1\}$$

e poi per $d \in \{a, b\}$

$$\nu((\forall x (x = y \vee \neg x = y))_{[y]})(d) = \bigcap_{d' \in \{a, b\}} \nu(x = y \vee \neg x = y)_{[x,y]}(d, d') = \mathcal{R} \cap \mathcal{R} \setminus \{0, 1\} = \mathcal{R} \setminus \{0, 1\}$$

e infine

$$\nu((\forall y \forall x (x = y \vee \neg x = y))_{[1]}) = \bigcap_{d \in \{a,b\}} \bigcap_{d' \in \{a,b\}} \nu((x = y \vee \neg x = y)_{[x,y]})(d, d') = \mathcal{R} \setminus \{0, 1\}$$

e quindi

$$1_{\mathcal{H}} = \mathcal{R} \not\subseteq \nu((\forall y \forall x (x = y \vee \neg x = y))_{[1]}) = \mathcal{R} \setminus \{0, 1\}$$

Ovvero il sequente di partenza $\vdash \forall y \forall x (x = y \vee \neg x = y)$ NON è valido.

12 Rudimenti di teoria delle categorie

Enunciamo qui di seguito alcune nozioni fondamentali di teoria delle categorie che useremo in seguito.

Testo di riferimento:

Saunders Mac Lane (1971): *Categories for the Working Mathematician* (seconda edizione), Springer

Def. 12.1 (nozione di categoria) Una categoria \mathcal{C} è determinata da i dati seguenti:

1. una collezione $\text{Ob}\mathcal{C}$ di oggetti,

2. una collezione $\text{Mor}\mathcal{C}$ di morfismi,

3. una funzione dominio

$$\text{dom}_{\mathcal{C}} : \text{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Ob}\mathcal{C}$$

4. una funzione codominio

$$\text{cod}_{\mathcal{C}} : \text{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Ob}\mathcal{C}$$

5. una funzione di morfismi identità

$$\text{id}_{-} : \text{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor}\mathcal{C}$$

6. una funzione composizione

$$(-) \cdot (-) : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C)$$

per oggetti qualsiasi $A, B, C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ ove la collezione $\mathcal{C}(A, B)$ è definita in tal modo

$$\mathcal{C}(A, B) \equiv \{ f \in \text{Mor}\mathcal{C} \mid \text{dom}_{\mathcal{C}}(f) = A \ \& \ \text{cod}_{\mathcal{C}}(f) = B \}$$

per oggetti qualsiasi $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$.

e questi dati soddisfano le seguenti proprietà

1. i morfismi identità sono elementi neutri della composizione: per oggetti qualsiasi $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ e per ogni morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$

$$f \cdot \text{id}_A = f \qquad \text{id}_B \cdot f = f$$

2. la composizione è associativa: per oggetti qualsiasi $A, B, C \in \text{Ob}\mathcal{C}$ e per ogni morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$, per ogni morfismo $g \in \mathcal{C}(B, C)$ e per ogni morfismo $h \in \mathcal{C}(C, D)$

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$$

Osservazione: Per definire i morfismi di una categoria, una volta definiti i suoi oggetti $\text{Ob}\mathcal{C}$ basta definire per arbitrari oggetti $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$ i morfismi con dominio A e codominio B

$$\mathcal{C}(A, B)$$

e poi definire

$$\text{Mor}\mathcal{C} \equiv \bigcup_{A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}} \mathcal{C}(A, B)$$

Def. 12.2 (Nozione di funtore) Date due categorie \mathcal{C} e \mathcal{D} un funtore

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

è determinato da i seguenti dati

1. una funzione che manda oggetti di \mathcal{C} in oggetti di \mathcal{D} :

$$F_0 : \mathbf{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ob}\mathcal{D}$$

2. una funzione che manda morfismi di \mathcal{C} in morfismi di \mathcal{D} :

$$F_1 : \mathbf{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Mor}\mathcal{D}$$

che soddisfa

(a) per ogni $f \in \mathbf{Mor}\mathcal{C}$

$$\mathbf{dom}_{\mathcal{D}}(F_1(f)) = F_0(\mathbf{dom}_{\mathcal{C}}(f)) \quad \mathbf{cod}_{\mathcal{D}}(F_1(f)) = F_0(\mathbf{cod}_{\mathcal{C}}(f))$$

(b) F_1 conserva le identità: per ogni oggetto $A \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$

$$F_1(id_A) = id_{F_0(A)}$$

(c) F_1 conserva la composizione: per oggetti qualsiasi $A, B, C \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$ e per ogni morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ e per ogni morfismo $g \in \mathcal{C}(B, C)$

$$F_1(g \cdot f) = F_1(g) \cdot F_1(f)$$

Osservazione: Date due categorie \mathcal{C} e \mathcal{D} per definire un funtore

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

basta definire la mappa F_0 sugli oggetti e per oggetti arbitrari $A, B \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$ una mappa

$$F_1 : \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{D}(F_0(A), F_0(B))$$

Fissate due categorie \mathcal{C}, \mathcal{D} possiamo dotare i funtori da \mathcal{C} a \mathcal{D} di una struttura categoriale denotata $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ i cui oggetti sono appunto i funtori ma i cui morfismi sono le *trasformazioni naturali*.

Def. 12.3 (Nozione di trasformazione naturale) Date due categorie \mathcal{C}, \mathcal{D} e dati due funtori $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una trasformazione naturale

$$\alpha : F \Rightarrow G$$

è una famiglia di morfismi

$$\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$$

al variare di A tra gli oggetti di \mathcal{C} tali che per ogni morfismo $f : A \rightarrow B$ si ha che

$$\alpha_B \cdot F(f) = G(f) \cdot \alpha_A$$

Nell'intento di costruire una categoria di categorie, per evitare noti paradossi ricordando che non esiste l'insieme di tutti gli insiemi, conviene supporre di fondare la nostra matematica delle categorie su una teoria degli insiemi come ad esempio la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con l'assioma di scelta (in breve ZFC). All'interno di tale teoria diamo la seguente definizione:

Def. 12.4 Una categoria \mathcal{C} si dice piccola se i suoi oggetti $Ob\mathcal{C}$ e i suoi morfismi $Mor\mathcal{C}$ formano un insieme.

Def. 12.5 Una categoria \mathcal{C} si dice localmente piccola se dati degli oggetti $A, B \in Ob\mathcal{C}$ e i suoi morfismi $\mathcal{C}(A, B)$ formano un insieme.

Possiamo quindi definire la categoria delle categorie piccole, che NON essa stessa piccola grazie all'uso di noti paradossi!

Def. 12.6 Chiamiamo Cat la categoria i cui oggetti sono le categorie piccole e i cui morfismi sono i funtori con la composizione di funtori data dalla composizione delle singole componenti dei funtori e con il funtore identico dato dalle mappe identità dei suoi componenti.

Nota bene: In realtà Cat è una cosiddetta 2-categoria in quanto oltre ai morfismi suoi, che vengono chiamati 1-morfismi, ha anche dei 2-morfismi dati dalle trasformazioni naturali da un 1-morfismo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ad un altro 1-morfismo $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Def. 12.7 Chiamiamo Set la categoria i cui oggetti sono gli insiemi e i cui morfismi in $Set(A, B)$ sono le funzioni dall'insieme A all'insieme B , con identità le funzioni identità e la composizione è la usuale composizione di funzioni.

Def. 12.8 (nozione di sottocategoria) Una categoria \mathcal{D} si dice sottocategoria di una categoria \mathcal{C} , indicato con $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ se gli oggetti di \mathcal{D} sono anche oggetti di \mathcal{C} e i morfismi di \mathcal{D} sono anche morfismi di \mathcal{C} con gli stessi oggetti dominio e codominio, la composizione di due morfismi in \mathcal{D} è uguale alla corrispondente in \mathcal{C} e i morfismi identità di \mathcal{D} sono pure di \mathcal{C} .

Def. 12.9 (nozione di isomorfismo) In una categoria \mathcal{C} un morfismo $f : A \rightarrow B$ si dice isomorfismo se esiste un morfismo $f^{-1} : B \rightarrow A$ tale che $f^{-1} \cdot f = id_A$ e $f \cdot f^{-1} = id_B$.

Def. 12.10 (oggetto terminale) Una categoria \mathcal{C} ha un oggetto terminale \top se e solo se per ogni suo oggetto A esiste un unico morfismo $!_A : A \rightarrow \top$.

Def. 12.11 (oggetto iniziale) Una categoria \mathcal{C} ha un oggetto iniziale 0 se e solo se per ogni suo oggetto A esiste un unico morfismo $?_A : 0 \rightarrow A$.

Def. 12.12 (prodotto binario) In una categoria \mathcal{C} il prodotto binario di due suoi oggetti A e B è un oggetto $A \times B$ dotato di due proiezioni

$$\pi_1 : A \times B \rightarrow A \qquad \pi_2 : A \times B \rightarrow B$$

tale che per ogni coppia di morfismi $f : C \rightarrow A$ e $g : C \rightarrow B$ esiste un unico morfismo

$$\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$$

tale che

$$\pi_1 \langle f, g \rangle = f \quad \pi_2 \langle f, g \rangle = g$$

Def. 12.13 (coprodotto binario) In una categoria \mathcal{C} il coprodotto binario di due suoi oggetti A e B è un oggetto $A \oplus B$ dotato di due proiezioni

$$i_1 : A \rightarrow A \oplus B \quad i_2 : B \rightarrow A \oplus B$$

tale che per ogni coppia di morfismi $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ esiste un unico morfismo

$$[f, g] : A \oplus B \rightarrow C$$

tale che

$$[f, g] \cdot i_1 = f \quad [f, g] \cdot i_2 = g$$

Def. 12.14 (categoria prodotto) Data due categorie \mathcal{C} e \mathcal{D} definiamo la *categoria prodotto* come la categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ i cui oggetti sono le coppie di oggetti di \mathcal{C} e di \mathcal{D} rispettivamente

$$(A, B) \quad \text{ove } A \in \text{Ob}\mathcal{C}, B \in \text{Ob}\mathcal{D}$$

e i morfismi sono coppie di morfismi di \mathcal{C} e di \mathcal{D} rispettivamente

$$(f, g) \quad \text{ove } f \in \text{Mor}\mathcal{C}, g \in \text{Mor}\mathcal{D}$$

con la composizione definita componente per componente ovvero se $\text{cod}(f_1) = \text{dom}(f_2)$ e $\text{cod}(g_1) = \text{dom}(g_2)$

$$(f_2, g_2) \cdot (f_1, g_1) \equiv (f_2 \cdot f_1, g_2 \cdot g_1)$$

e l'identità su

$$(A, B) \quad \text{ove } A \in \text{Ob}\mathcal{C}, B \in \text{Ob}\mathcal{D}$$

è

$$(id_A, id_B)$$

Lemma 12.15 La categoria prodotto dà luogo ad un prodotto binario in Cat .

Def. 12.16 Data una categoria \mathcal{C} definiamo il funtore **diagonale**

$$\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

in tal modo

$$\Delta(\mathbf{A}) \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{A})$$

per ogni oggetto \mathbf{A} di \mathcal{C} e

$$\Delta(\mathbf{f}) \equiv (\mathbf{f}, \mathbf{f})$$

per ogni morfismo \mathbf{f} di \mathcal{C} .

Def. 12.17

$\mathbf{1}$ = la categoria con un unico oggetto e un'unica freccia

ovvero

$$\begin{aligned}\mathbf{Ob1} &= \{*\} \\ \mathbf{Mor1} &= \{id_*\}\end{aligned}$$

Lemma 12.18 La categoria $\mathbf{1}$ definisce un oggetto terminale in \mathbf{Cat} .

12.1 Versione categoriale delle definizioni precedenti

La nozione di preordine corrisponde a quello di categoria nel caso che questa abbia al più un morfismo tra i suoi oggetti:

Def. 12.19 Una categoria \mathcal{C} si dice *preordinata* se è *piccola* e fra due oggetti A, B in \mathcal{C} esiste al più un morfismo da A a B . In tal caso definiamo

$$A \leq B \quad \text{sse} \quad \mathcal{C}(A, B) \neq \emptyset$$

Si osservi che valgono i seguenti lemmi:

Lemma 12.20 La relazione tra due oggetti di una categoria preordinata è un *preordine* ovvero è riflessivo e transitivo.

Lemma 12.21 Un funtore tra due categorie preordinate è completamente determinato da una funzione monotona tra i corrispondenti preordini.

Dim. Esercizio.

Def. 12.22 Una *connessione di Galois (monotona)* tra due categorie preordinate \mathcal{P} e \mathcal{Q} è una coppia $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ e $G : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ tali che per ogni $p \in \mathcal{P}$ e $q \in \mathcal{Q}$

$$F(p) \leq q \quad \text{se e solo se} \quad p \leq G(q)$$

.

e si indica con $F \dashv G$ e si dice che F è *aggiunto SINISTRO* a G e che G è *aggiunto DESTRO* a F .

Proposition 12.23 Date due categorie preordinate \mathcal{P} e \mathcal{Q} il cui preordine associato è sup-completo (ossia esistono gli estremi superiori di tutti i loro sottoinsiemi), e un funtore $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. F ha un aggiunto destro;
2. F conserva gli estremi superiori arbitrari.

Dim. per esercizio.

Lemma 12.24 Valgono le seguenti affermazioni: data una categoria preordinata \mathcal{C}

\mathcal{C} ha **oggetto terminale**

\Updownarrow

\mathcal{C} ha un **maggiorante** di tutti i suoi elementi

\Updownarrow

il funtore singoletto $\mathbf{Un} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$ ha un aggiunto **destro**
dato dal funtore $\top : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$
che associa all'unico oggetto di $\mathbf{1}$ l'oggetto terminale $\top \in \text{Ob}\mathcal{C}$

\mathcal{C} ha **oggetto iniziale**

\Updownarrow

\mathcal{C} ha un **minorante** di tutti i suoi elementi

\Updownarrow

il funtore singoletto $\mathbf{Un} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{1}$ ha un aggiunto **sinistro**
dato dal funtore $0 : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{C}$
che associa all'unico oggetto di $\mathbf{1}$ l'oggetto iniziale $0 \in \text{Ob}\mathcal{C}$

\mathcal{C} ha **estremi inferiori binari**

\Updownarrow

il funtore diagonale $\mathbf{Un} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ha un aggiunto **destro**
dato da un funtore $(-) \wedge (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

\mathcal{C} ha **estremi superiori binari**

\Updownarrow

il funtore diagonale $\mathbf{\Delta} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ha un aggiunto **sinistro**
dato da un funtore $(-) \vee (-) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

Theorem 12.25 (versione categoriale algebra di Heyting) Una categoria ordinata \mathcal{C} è un *algebra di Heyting* se ha estremi inferiori e superiori binari, un elemento minimo, denotato con $\mathbf{0}$ e massimo denotato con $\mathbf{1}$ e in aggiunta per ogni elemento $a \in \text{Ob}\mathcal{C}$ il funtore

$$(a \wedge -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

ha un aggiunto destro che chiamiamo

$$(a \rightarrow -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

Theorem 12.26 (versione categoriale di algebra di Boole) Una categoria ordinata \mathcal{C} che è un *algebra di Heyting* se è un'algebra di Heyting con in aggiunta la proprietà che il funtore

$$(- \rightarrow \mathbf{0}) : \mathcal{C}^{\text{OP}} \rightarrow \mathcal{C}$$

è aggiunto sia a sinistra che a destra del funtore

$$(- \rightarrow \mathbf{0}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{OP}}$$

Esempio fondamentale: Connettivi intuizionisti come connessioni di Galois

Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} consideriamo la categoria ordinata dell'algebra di Lindenbaum della logica intuizionista predicativo relativa ad L

$$\mathcal{A}_i(\mathcal{L})$$

Inoltre definiamo i seguenti funtori:

$$0 : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})$$

è il funtore costante in $0 \equiv [\perp]$;

$$\top : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})$$

è il funtore costante in $1 \equiv [\top]$;

il funtore *congiunzione* $(-)\wedge(-) : \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \times \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})$ risulta come segue: per proposizioni $\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2$ di \mathcal{L}

$$([\mathbf{pr}_1]) \wedge ([\mathbf{pr}_2]) \equiv [\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2]$$

il funtore *disgiunzione* $(-)\vee(-) : \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \times \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})$ è il funtore definito come segue: per proposizioni $\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2$ di \mathcal{L}

$$([\mathbf{pr}_1]) \vee ([\mathbf{pr}_2]) \equiv [\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2]$$

In particolare, per ogni proposizione \mathbf{pr} di \mathcal{L} il funtore *congiunzione con \mathbf{pr}*

$$(-) \wedge ([\mathbf{pr}]) : \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})$$

risulta definito come segue: per una qualsiasi proposizione α di \mathcal{L}

$$([\alpha]) \wedge ([\mathbf{pr}_2]) \equiv [\alpha \& \mathbf{pr}_2]$$

e il funtore *implicazione di \mathbf{pr}*

$$(-)^{[\mathbf{pr}]} : \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})$$

risulta definito come segue: per una qualsiasi proposizione α di \mathcal{L}

$$([\alpha])^{[\mathbf{pr}]} \equiv [\mathbf{pr} \rightarrow \alpha]$$

e il funtore *negazione*

$$\neg(-) : \mathcal{A}_i(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}_i(\mathcal{L})^{\text{OP}}$$

risulta definito come segue: per una qualsiasi proposizione α di \mathcal{L}

$$\neg([\alpha]) \equiv [\neg\alpha]$$

Lemma 12.27 Dato un linguaggio predicativo \mathcal{L} e una proposizione \mathbf{pr}

il funtore costante falso	è aggiunto sx al funtore singoletto
il funtore costante vero	è aggiunto dx al funtore singoletto
il funtore congiunzione	è aggiunto dx al funtore diagonale su algebra formule
il funtore disgiunzione	è aggiunto sx al funtore diagonale su algebra formule
l' implicazione di \mathbf{pr}	è aggiunto dx al funtore congiunzione
	di \mathbf{pr}
la negazione $\neg(-)$	è aggiunto sx al suo opposto $\neg^{\text{OP}}(-)$ con codominio categoria opposta

Esempio fondamentale: Connettivi della logica classica proposizionale come connessioni di Galois

Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} consideriamo la categoria ordinata dell'algebra di Lindenbaum della logica classica proposizionale relativa ad L

$$\mathcal{A}(\mathcal{L})$$

Inoltre definiamo i seguenti funtori:

$$0 : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$$

è il funtore costante in $0 \equiv [\perp]$;

$$\top : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$$

è il funtore costante in $1 \equiv [\top]$;

il funtore *congiunzione* $(-)\wedge(-) : \mathcal{A}(\mathcal{L}) \times \mathcal{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$ risulta come segue: per proposizioni $\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2$ di \mathcal{L}

$$([\mathbf{pr}_1]) \wedge ([\mathbf{pr}_2]) \equiv [\mathbf{fr}_1 \& \mathbf{fr}_2]$$

il funtore *disgiunzione* $(-)\vee(-) : \mathcal{A}(\mathcal{L}) \times \mathcal{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$ è il funtore definito come segue: per proposizioni $\mathbf{pr}_1, \mathbf{pr}_2$ di \mathcal{L}

$$([\mathbf{pr}_1]) \vee ([\mathbf{pr}_2]) \equiv [\mathbf{fr}_1 \vee \mathbf{fr}_2]$$

In particolare, per ogni proposizione \mathbf{pr} di L il funtore *congiunzione con \mathbf{pr}*

$$(-) \wedge ([\mathbf{pr}]) : \mathcal{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$$

risulta definito come segue: per una qualsiasi proposizione α di \mathcal{L}

$$([\alpha]) \wedge ([\mathbf{pr}_2]) \equiv [\alpha \& \mathbf{pr}_2]$$

e il funtore *implicazione di \mathbf{pr}*

$$(-)^{[\mathbf{pr}]} : \mathcal{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$$

risulta definito come segue: per una qualsiasi proposizione α di \mathcal{L}

$$([\alpha])^{[\mathbf{pr}_2]} \equiv [\mathbf{pr}_2 \rightarrow \alpha]$$

e il funtore *negazione di \mathbf{pr}*

$$\neg(-) : \mathcal{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})^{\mathbf{OP}}$$

risulta definito come segue: per una qualsiasi proposizione α di \mathcal{L}

$$\neg([\alpha]) \equiv [\neg\alpha]$$

e il funtore OPPOSTO della *negazione di \mathbf{pr}*

$$\neg^{\mathbf{OP}}(-) : \mathcal{A}(\mathcal{L})^{\mathbf{OP}} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{L})$$

risulta definito come segue: per una qualsiasi proposizione α di \mathcal{L}

$$\neg^{\mathbf{OP}}([\alpha]) \equiv [\neg\alpha]$$

Lemma 12.28 Dato un linguaggio proposizionale L e una proposizione \mathbf{pr}

il funtore costante falso	è aggiunto sx al funtore singoletto
il funtore costante vero	è aggiunto dx al funtore singoletto
il funtore congiunzione	è aggiunto dx al funtore diagonale su algebra formule
il funtore disgiunzione	è aggiunto sx al funtore diagonale su algebra formule
l' implicazione di pr	è aggiunto dx al funtore congiunzione
	di pr
la negazione $\neg(-)$	è aggiunto sx al suo opposto $\neg^{OP}(-)$ con codominio categoria opposta
la negazione $\neg(-)$	è aggiunto dx al suo opposto $\neg^{OP}(-)$ con codominio categoria opposta

12.1.1 Le categorie delle algebre di Boole e di Heyting

Def. 12.29 La categoria delle algebre di **Boole** è la categoria avente come oggetti le algebre di Boole, come morfismi gli omomorfismi di algebre di Boole, come composizione la composizione di funzioni, come morfismo identico la funzione identità e come uguaglianza l'uguaglianza di funzioni.

Def. 12.30 La categoria delle algebre di **Hey** è la categoria avente come oggetti le algebre di Heyting, come morfismi gli omomorfismi di algebre di Heyting, come composizione la composizione di funzioni, come morfismo identico la funzione identità e come uguaglianza l'uguaglianza di funzioni.

La categoria delle algebre di Boole è una sottocategoria di quelle di Heyting.

$$\mathbf{Boole} \subseteq \mathbf{Hey}$$