Caro Babbo Natale

per il prossimo anno vorrei riuscire in tutto

SENZA studiare!

Ps: **ATTENTO a NON invertire il secondo verbo all'infinito con il primo, come è successo finora!!!**

Semantica intuizionista predicativa senza Uguaglianza

la semantica della Logica Intuizionista Predicativa **LI** in un linguaggio $\mathcal{L}$
è data da:

modello=**valutazione MULTIVALENTE** 

$$\nu : Term(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{F}un(D^n, D)$$

$$\nu : Form(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{n \in Nat} \mathbf{F}un(D^n, \mathcal{H})$$

ove $\mathbf{H}$ è **algebra di Heyting completa**

considerando $\mathbf{1} \in \mathcal{H}$ come valore vero

e un valore **non vero** (in senso lato il valore falso) ogni valore $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ per cui vale $\mathbf{h} \neq \mathbf{1}$)

def. modello ν di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$

=**modello multiivalente** in cui $\mathtt{fr}$ è vera

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) = \mathbf{1}$

def. contromodello ν di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$

= **modello multivalente** in cui $\mathtt{fr}$ **NON** è vera

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) \neq \mathbf{1}$

(perchè NON vale necessariamente $\nu(\mathtt{fr}) = \mathbf{0}$ ove $\mathbf{0}$ = **minimo dell'algebra** $\mathcal{H}$ di ν)

 tautologia semantica `fr` ha **SOLTANTO** modelli	 opinione semantica `fr` ha almeno **un contromodello** $\neg$`fr` ha almeno **un contromodello**	 contraddizione semantica $\neg$`fr` ha **SOLTANTO** modelli (quindi `fr` ha **SOLTANTO** contromodelli)

Teorema di validità di LI rispetto a semantica intuizionista

se $\vdash \mathtt{fr}$ è **derivabile** in $\mathtt{LI}$

ovvero è **tautologia formale** in $\mathtt{LI}$

allora

$\vdash \mathtt{fr}$ è **vero** in ogni **modello intuizionista**

in ogni valutazione intuizionista predicativa

Dim.

le regole del calcolo dei sequenti **LI** sono **valide**

$\Rightarrow$ CONSERVANO **verità dei sequenti LOCALMENTE**

rispetto a **ciascuna valutazione intuizionista**

dall'ALTO di TUTTE le FOGLIE verso il BASSO

$\Rightarrow$ se le foglie sono **ASSIOMI**

questi sono **veri** in **ogni valutazione**

e quindi lo è anche la **radice di una derivazione!**

Teorema di completezza di LI rispetto a semantica intuizionista

se $\vdash$ fr è **vero** in ogni **modello intuizionista**

in ogni valutazione intuizionista predicativa

allora

$\vdash$ fr è **derivabile** in LI

ovvero è **tautologia formale** in LI

Dim. si dimostra l'enunciato

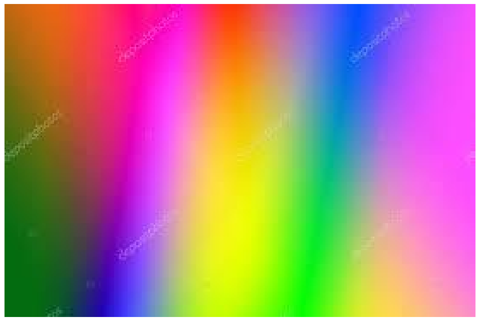
tramite costruzione di valutazione identità

con dominio il completamento di Dedekind-MacNeille

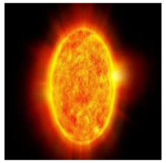
dell' algebra sintattica delle formule

(v. note)

Semantiche proposizionali

logica **classica**	logica **intuizionista**
valutazione BIVALENTE $\nu : \texttt{Prop}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$	**NO valutazione BIVALENTE**
valutazione MULTIVALENTE $\nu : \texttt{Prop}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{B}$ in **algebra di Boole** $\mathcal{B}$ 	**valutazione MULTIVALENTE** $\nu : \texttt{Prop}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{H}$ in **algebra di Heyting** $\mathcal{H}$ 

def. **contromodello** di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$

=**modello** **bivalente** in cui $\mathtt{fr}$ è falsa

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) = \mathbf{0}$

def. **contromodello MULTIvalente** di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$


= **modello MULTIvalente** in cui $\mathtt{fr}$ **NON** è vera

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) \neq \mathbf{1}$

ALGEBRE di Boole e di Heyting

<table>
<tr>
<td>

algebra di **Boole** $\mathcal{B}$

=

algebra di **Heyting** +

$\neg \mathbf{a}$ è complemento di $\mathbf{a} \in \mathcal{B}$

ovvero $\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a} = \mathbf{1}$

$\Downarrow$

$$\mathbf{a} \to \mathbf{b} = \neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$$

</td>
<td>

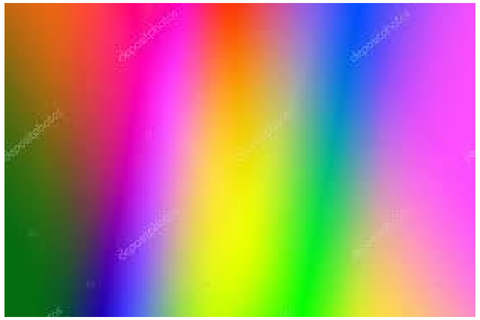
algebra di **Heyting**

$\neg \mathbf{a}$ è PSEUDO-complemento di $\mathbf{a} \in \mathcal{H}$

$\mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a} \leq \mathbf{1}$

$\Downarrow$

$$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \geq \neg \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$$



</td>
</tr>
</table>

Teorema di validità

tautologia formale

$\vdash \mathtt{fr}$ è **derivabile in** $\mathtt{L}$

$\Downarrow$ (**th. Validità**)

tautologia semantica

$\mathtt{fr}$ ha **SOLTANTO** modelli

la sua dimostrazione segue

da dimostrazione validità

delle regole del calcolo

la **verità** di un sequente in un **modello**

scende $\Downarrow$ dalle premesse alla radice di ogni regola

in OGNI singolo modello

Teorema di completezza

 tautologia semantica `fr` ha **SOLTANTO** modelli $\Downarrow$ (**th. completezza**) tautologia formale $\vdash$ `fr` è **derivabile in** $\mathtt{L}$	*dimostrazione ad hoc a seconda della semantica!!*

Teorema di completezza tra LC$_p$ e semantica bivalente

tautologia semantica bivalente

`fr` ha **SOLTANTO** modelli

$\Downarrow$ (**th. completezza**)

tautologia formale

$\vdash$ `fr` è **derivabile in LC$_p$**

via **procedura di decisione derivabilità**

sequente proposizionale classico

Teorema di completezza tra LC$_p$ e semantica booleana

tautologia semantica booleana

`fr` ha **SOLTANTO** modelli

$\Downarrow$ (**th. completezza**)

tautologia formale

$\vdash$ `fr` è **derivabile in LC$_p$**

via interpretazione identica

nell' algebra booleana delle formule (**algebra di Lindenbuam**)

Teorema di completezza tra $\mathbf{LI}_p$ e semantica intuizionista

 tautologia semantica intuizionista $\mathtt{fr}$ ha **SOLTANTO** modelli $\Downarrow$ (**th. completezza**) tautologia formale $\vdash \mathtt{fr}$ è **derivabile in $\mathbf{LI}_p$**	 *via interpretazione identica* *nell' algebra di Heyting delle formule (**algebra di Lindenbuam**)*

Teorema di completezza tra LC$_=$ e semantica bivalente

tautologia semantica bivalente

`fr` ha **SOLTANTO** modelli

$\Downarrow$ (**th. completezza**)

tautologia formale

$\vdash$ `fr` è **derivabile in LC**$_p$

dimostrazione NON costruttiva

via **LEMMA DI ZORN**

Teorema di completezza tra $\mathrm{LC}_=$ e semantica booleana predicativa

 tautologia semantica booleana predicativa `fr` ha **SOLTANTO** modelli ⇓ (**th. completezza**) tautologia formale $\vdash$ `fr` è **derivabile in** $\mathtt{LC}_=$	 **dimostrazione costruttiva** *via* **completamento di Dedekind-MacNeille** *dell' algebra delle formule di Lindenbaum*

Teorema di completezza tra $\mathbf{LI}_{=}$ e semantica in algebre di Heyting complete

tautologia semantica in algebre di Heyting complete

`fr` ha **SOLTANTO** modelli

$\Downarrow$ (**th. completezza**)

tautologia formale

$\vdash$ `fr` è **derivabile in** $\mathbf{LC}_{=}$

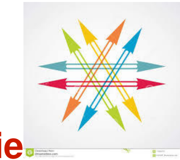
dimostrazione costruttiva

via **completamento di Dedekind-MacNeille**

dell' algebra delle formule di Lindenbaum

teoremi di completezza predicativi con algebra delle formule

l'**algebra delle formule predicative** sia di $\mathrm{LI}_=$ che di $\mathrm{LC}_=$

ha una **struttura** descrivibile in **teoria delle categorie** 

$\Downarrow$

teorema di **completezza** di $\mathrm{LI}_=$ rispetto alla **semantica categoriale** intuizionista

tramite l'*interpretazione identica nell'algebra delle formule* di $\mathrm{LI}_=$ 

teorema di **completezza** di $\mathrm{LC}_=$ rispetto alla **semantica categoriale** classica

tramite l'*interpretazione identica nell'algebra delle formule* di $\mathrm{LC}_=$