24 lezione

Se qualcuno mente

allora

tutti mentono!

Relazione d'equivalenza $\mathcal{H}$-valutata

Data un'algebra di Heyting $\mathcal{H}$ e un'insieme non vuoto $\mathbf{D}$

si chiama **relazione d'equivalenza $\mathcal{H}$-valutata**

una funzione $\mathbf{E} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathcal{H}$

che soddisfa:

riflessività: per ogni $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = \mathbf{1}$$

simmetria: per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \leq \mathbf{E}(\mathbf{d_2}, \mathbf{d_1})$$

transitività: per ogni $\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}, \mathbf{d_3} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}) \wedge \mathbf{E}(\mathbf{d_2}, \mathbf{d_3}) \leq \mathbf{E}(\mathbf{d_1}, \mathbf{d_3})$$

Predicato $\mathcal{H}$-valutato

Data un'algebra di Heyting $\mathcal{H}$ e un'insieme non vuoto $\mathbf{D}$

una funzione $\mathbf{E} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{H}$

un **predicato $\mathcal{H}$-valutato rispetto ad E su D**

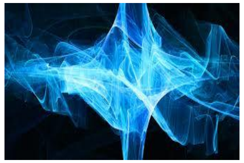
è una funzione $\mathbf{P} : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{H}$

che soddisfa:

proprietà di sostitutività: per ogni $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{c}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{d})$$

funzione $\mathcal{H}$-valutata



Data un'algebra di Heyting $\mathcal{H}$, due insiemi non vuoti $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}'$

dotati di una relazione d'equivalenza $\mathcal{H}$-valutata rispettivamente

$$\mathbf{E} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{H} \qquad \qquad \mathbf{E}' : \mathbf{D}' \times \mathbf{D}' \rightarrow \mathcal{H}$$

una **funzione $\mathcal{H}$-valutata rispetto ad $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{E}'$**

è una funzione $\mathbf{f} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$

che soddisfa la proprietà di **sostitutività**:

per ogni $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \leq \mathbf{E}'(\,\mathbf{f}(\mathbf{c})\,,\,\mathbf{f}(\mathbf{d})\,)$$

Relazione d'equivalenza $\mathcal{H}$-valutata su prodotto cartesiano

Data un'algebra di Heyting $\mathcal{H}$ e un insieme non vuoto $\mathbf{D}$

dotato di una relazione d'equivalenza $\mathcal{H}$-valutata

$$\mathbf{E} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{H}$$

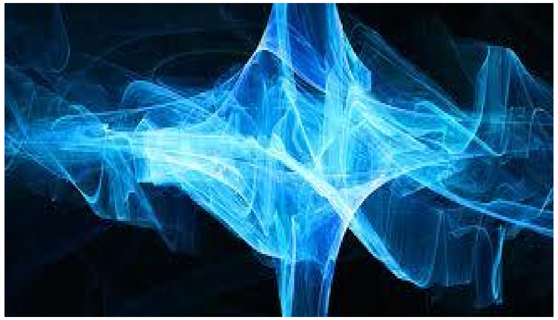
l'insieme del prodotto cartesiano $\mathbf{n}$-ario $\mathbf{D^n}$ si può dotare della seguente relazione d'equivalenza $\mathcal{H}$-valutata

$$\mathbf{E_n} : \mathbf{D^n} \times \mathbf{D^n} \rightarrow \mathcal{H}$$

definita in tal modo

$$\mathbf{E_n}(\,(\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_n})\,,\,(\mathbf{d_1}, \ldots, \mathbf{d_n})\,) \equiv \bigwedge_{\mathbf{j=1,\ldots n}} \mathbf{E}(\mathbf{c_j}, \mathbf{d_j})$$

notazione funzioni $\mathcal{H}$-valutate



Indichiamo

$$\mathbf{Fun}_{\mathbf{E}}(\mathbf{D}^{\mathbf{n}}, \mathbf{D}')$$

=

l'insieme delle funzioni $\mathcal{H}$-valutate rispetto ad $\mathbf{E}_{\mathbf{n}}$ ed $\mathbf{E}$

algebra dei $\mathcal{H}$-predicati valutati

Data un'algebra di Heyting $\mathcal{H}$, un'insieme non vuoto $\mathbf{D}$,

una relazione d'equivalenza $\mathcal{H}$-valutata $\quad \mathbf{E} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{H}$

l'insieme $\mathbf{Pred_E}(\mathbf{D^n}, \mathcal{H})$ dotato dell'*ordine puntuale* ovvero per $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbf{Pred_E}(\mathbf{D}, \mathcal{H})$

$$\mathbf{P} \leq \mathbf{Q} \equiv \forall \overline{\mathbf{d}} \in \mathbf{D^n}\ \mathbf{P}(\overline{\mathbf{d}}) \leq \mathbf{Q}(\overline{\mathbf{d}})$$

è un'algebra di Heyting ove

$\mathbf{1}$	$\equiv$	funzione costante **1**
$\mathbf{0}$	$\equiv$	funzione costante **0**
$\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$	$\equiv$	è la funzione $(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})(\overline{\mathbf{d}}) \equiv \mathbf{P}(\overline{\mathbf{d}}) \wedge \mathbf{Q}(\overline{\mathbf{d}})$ per $\overline{\mathbf{d}} \in \mathbf{D^n}$
$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$	$\equiv$	è la funzione $(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q})(\overline{\mathbf{d}}) \equiv \mathbf{P}(\overline{\mathbf{d}}) \vee \mathbf{Q}(\overline{\mathbf{d}})$ per $\overline{\mathbf{d}} \in \mathbf{D}$
$\mathbf{Q^P}$	$\equiv$	è la funzione $(\mathbf{Q^P})(\overline{\mathbf{d}}) \equiv \mathbf{Q}(\overline{\mathbf{d}})^{\mathbf{P}(\overline{\mathbf{d}})}$ per $\overline{\mathbf{d}} \in \mathbf{D}$

per $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbf{Pre_E}(\mathbf{D^n}, \mathcal{H})$

Se $\mathcal{H}$ è completa $\Rightarrow$ pure $\mathbf{Pre_E}(\mathbf{D^n}, \mathcal{H})$ è completa rispetto a

$\bigwedge_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathbf{f_i}$	$\equiv$	è la funzione $(\bigwedge_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathbf{f_i})(\overline{\mathbf{d}}) \equiv \bigwedge_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} (\mathbf{f_i}(\overline{\mathbf{d}})) \in \mathcal{H}$ per $\overline{\mathbf{d}} \in \mathbf{D}$
$\bigvee_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathbf{f_i}$	$\equiv$	è la funzione $(\bigvee_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathbf{f_i})(\overline{\mathbf{d}}) \equiv \bigvee_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} (\mathbf{f_i}(\overline{\mathbf{d}})) \in \mathcal{H}$ per $\overline{\mathbf{d}} \in \mathbf{D}$

Se $\mathcal{H}$ è un'algebra di Boole pure $\mathbf{Pre_E}(\mathbf{D}, \mathcal{H})$ è un'algebra di Boole.

Semantica intuizionista predicativa con Uguaglianza

la semantica della Logica Intuizionista Predicativa con uguaglianza $\mathbf{LI}_{=}$ in un linguaggio $\mathcal{L}$

è data da:

modello=**valutazione MULTIVALENTE** 

$$\nu : Term(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbf{Nat}} \mathbf{Fun}_{\mathbf{E}}(\mathbf{D}^{\mathbf{n}}, \mathbf{D})$$

$$\nu : Form(\mathcal{L})_{cont} \longrightarrow \bigcup_{\mathbf{n}\in\mathbf{Nat}} \mathbf{Pred}_{\mathbf{E}}(\mathbf{D}^{\mathbf{n}}, \mathcal{H})$$

ove $\mathbf{H}$ è **algebra di Heyting completa**

ed $\mathbf{E}$ relazione di equivalenza $\mathbf{H}$-valutata

considerando $\mathbf{1} \in \mathcal{H}$ come valore vero

e un valore **non vero** (in senso lato il valore falso) ogni valore $\mathbf{h}\in\mathcal{H}$ per cui vale $\mathbf{h} \neq \mathbf{1}$)

def. **modello** ν di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$

=**modello multiivalente** in cui $\mathtt{fr}$ è vera

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) = \mathbf{1}$

def. **contromodello** ν di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$

= **modello multivalente** in cui $\mathtt{fr}$ **NON** è vera

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) \neq \mathbf{1}$

(perchè NON vale necessariamente $\nu(\mathtt{fr}) = \mathbf{0}$ ove $\mathbf{0}$ = **minimo dell'algebra** $\mathcal{H}$ di ν)

<table>
<tr>
<td>
tautologia semantica

$\mathtt{fr}$ ha **SOLTANTO** modelli</td>
<td>
opinione semantica

$\mathtt{fr}$ ha almeno **un contromodello**

$\neg\mathtt{fr}$ ha almeno **un contromodello**</td>
<td>
contraddizione semantica

$\neg\mathtt{fr}$ ha **SOLTANTO** modelli

(quindi $\mathtt{fr}$ ha **SOLTANTO** contromodelli)</td>
</tr>
</table>

Teorema di validità di LI rispetto a semantica intuizionista

se $\vdash \mathtt{fr}$ è **derivabile** in $\mathtt{LI}_{=}$

ovvero è **tautologia formale** in $\mathtt{LI}_{=}$

allora

$\vdash \mathtt{fr}$ è **vero** in ogni **modello intuizionista**

in ogni valutazione intuizionista predicativa

Dim.

le regole del calcolo dei sequenti $\mathbf{LI}_{=}$ sono **valide**

$\Rightarrow$ CONSERVANO **verità dei sequenti LOCALMENTE**

rispetto a **ciascuna valutazione intuizionista**

dall'ALTO di TUTTE le FOGLIE verso il BASSO

$\Rightarrow$ se le foglie sono **ASSIOMI**

questi sono **veri** in **ogni valutazione**

e quindi lo è anche la **radice di una derivazione!**

Teorema di completezza di $\mathbf{LI}_=$ rispetto a semantica intuizionista

se $\vdash \mathtt{fr}$ è **vero** in ogni **modello intuizionista**

in ogni valutazione intuizionista predicativa

allora

$\vdash \mathtt{fr}$ è **derivabile** in $\mathtt{LI}_=$

ovvero è **tautologia formale** in $\mathtt{LI}_=$

Dim. si dimostra l'enunciato

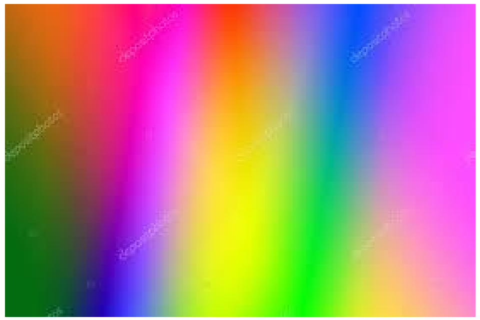
tramite costruzione di valutazione identità

con dominio il completamento di Dedekind-MacNeille

dell' algebra sintattica delle formule

(v. note)

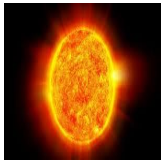
Semantiche predicative con uguaglianza

logica **classica**	logica **intuizionista**
valutazione BIVALENTE	**NO valutazione BIVALENTE**
valutazione MULTIVALENTE in **algebra di Boole** $\mathcal{B}$ 	**valutazione MULTIVALENTE** in **algebra di Heyting** $\mathcal{H}$ 

def. **contromodello** di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$

=**modello bivalente** in cui $\mathtt{fr}$ è falsa

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) = \mathbf{0}$



def. **contromodello MULTIvalente** di un enunciato $\mathtt{fr}$ di $\mathcal{L}$

= **modello MULTIvalente** in cui $\mathtt{fr}$ **NON** è vera

ovvero $\nu(\mathtt{fr}) \neq \mathbf{1}$

Teorema di validità

<table>
<tr>
<td>

tautologia formale

$\vdash$ `fr` è **derivabile in** L

$\Downarrow$ (**th. Validità**)

tautologia semantica

`fr` ha **SOLTANTO** modelli

</td>
<td>

la sua dimostrazione segue

da dimostrazione validità

delle regole del calcolo

la **verità** di un sequente in un **modello**

scende $\Downarrow$ dalle premesse alla radice di ogni regola

in OGNI singolo modello

</td>
</tr>
</table>

Teorema di completezza

 tautologia semantica `fr` ha **SOLTANTO** modelli $\Downarrow$ (**th. completezza**) tautologia formale $\vdash$ `fr` è **derivabile in** $\mathtt{L}$	*dimostrazione ad hoc a seconda della semantica!!*

Teorema di completezza tra LC$_p$ e semantica bivalente

tautologia semantica bivalente

`fr` ha **SOLTANTO** modelli

$\Downarrow$ (**th. completezza**)

tautologia formale

$\vdash$ `fr` è **derivabile in LC$_p$**

via **procedura di decisione derivabilità**

sequente proposizionale classico

Teorema di completezza tra $\mathbf{LC}_p$ e semantica booleana

 tautologia semantica booleana `fr` ha **SOLTANTO** modelli $\Downarrow$ (**th. completezza**) tautologia formale $\vdash$ `fr` è **derivabile in** $\mathbf{LC}_p$	 *via interpretazione identica* *nell' algebra booleana delle formule* (**algebra di Lindenbuam**)

Teorema di completezza tra $\mathbf{LI}_p$ e semantica intuizionista

 tautologia semantica intuizionista `fr` ha **SOLTANTO** modelli $\Downarrow$ (**th. completezza**) tautologia formale $\vdash$ `fr` è **derivabile in $\mathbf{LI}_p$**	 *via interpretazione identica* *nell' algebra di Heyting delle formule (***algebra di Lindenbuam***)*

Teorema di completezza tra LC$_=$ e semantica bivalente

 tautologia semantica bivalente `fr` ha **SOLTANTO** modelli $\Downarrow$ (**th. completezza**) tautologia formale $\vdash$ `fr` è **derivabile in LC$_p$**	 **dimostrazione NON costruttiva** *via* **LEMMA DI ZORN**

Teorema di completezza tra $\mathrm{LC}_=$ e semantica booleana predicativa

tautologia semantica booleana predicativa

$\mathtt{fr}$ ha **SOLTANTO** modelli

$\Downarrow$ (**th. completezza**)

tautologia formale

$\vdash \mathtt{fr}$ è **derivabile in** $\mathtt{LC}_=$

dimostrazione costruttiva

via **completamento di Dedekind-MacNeille**

dell' algebra delle formule di Lindenbaum

Teorema di completezza tra $\mathbf{LI}_{=}$ e semantica in algebre di Heyting complete

tautologia semantica in algebre di Heyting complete

$\mathtt{fr}$ ha **SOLTANTO** modelli

$\Downarrow$ (**th. completezza**)

tautologia formale

$\vdash \mathtt{fr}$ è **derivabile in $\mathbf{LC}_{=}$**

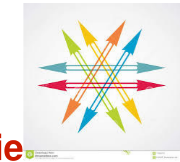
dimostrazione costruttiva

via **completamento di Dedekind-MacNeille**

dell' algebra delle formule di Lindenbaum

teoremi di completezza predicativi con algebra delle formule

l'**algebra delle formule predicative** sia di $\mathrm{LI}_{=}$ che di $\mathrm{LC}_{=}$



ha una **struttura** descrivibile in **teoria delle categorie**

$\Downarrow$

teorema di **completezza** di $\mathrm{LI}_{=}$ rispetto alla **semantica categoriale** intuizionista

tramite l'*interpretazione identica nell'algebra delle formule* di $\mathrm{LI}_{=}$

teorema di **completezza** di $\mathrm{LC}_{=}$ rispetto alla **semantica categoriale** classica

tramite l'*interpretazione identica nell'algebra delle formule* di $\mathrm{LC}_{=}$

Classificazione logica intuizionista e classica delle proposizioni

		
tautologia classica	opinione classica	contraddizione classica
$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Updownarrow$
tautologia intuizionista	opinione intuizionista	contraddizione intuizionista
esempi tautologia classica opinione intuizionista $A \vee \neg A$	esempi come quello qui a fianco a sx	per teor. Glivenko

Classificazione logica intuizionista e classica dei predicati con uguaglianza

		
tautologia classica $\Uparrow$ tautologia intuizionista	opinione classica $\Downarrow$ opinione intuizionista	contraddizione classica $\Uparrow$ contraddizione intuizionista
esempi tautologia classica opinione intuizionista $A \vee \neg A$	esempi uno di quelli a fianco a dx o a sx	esempi contraddizione classica opinione intuizionista $\neg \forall x \forall y (x = y \vee \neg x = y)$ $\neg(\forall x \neg\neg A(x) \rightarrow \neg\neg \forall x A(x))$