

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Autoverifica su serie numeriche e numeri complessi

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

martedì 7 dicembre 2010

Istruzioni generali. (1) Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito giovedì 09/12). (2) Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. (3) A partire da giovedì 09/12 e fino a domenica 12/12 sarà possibile, seguendo il [link](#) che sarà attivato il 09/12 nella pagina web del corso, comunicare via web in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme ad eventuali commenti.

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 42 pt (12×3,5 pt). **Ex. 2:** 58 pt (12+8+15+15+8 pt). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sé quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

1. Studiare il carattere⁽¹⁾ delle seguenti serie $\sum_n a_n$, al variare dei parametri presenti:

(a) $\sum_{n>-x} \left(\frac{x+1}{n+x}\right)^n$; (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{(n!)^x}$; (c) $\sum e^{-n \sin x}$; (d) $\sum_{n\geq 1} \log \frac{x+n}{n}$;
(e) $\sum \frac{n^x}{47+2n^2-n^3}$; (f) $\sum \frac{n}{n^2+1} (4^x-2)^n$; (g) $\sum \sinh\left(\frac{n^{3x}+\sqrt{n}}{2n^5-n+2}\right)$; (h) $\sum_{n\geq 1} (\sqrt[n]{n}-1)$;
(i) $\sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos x}{n \log(n|x|)}$; (j) $\sum \frac{\sqrt{n}}{(x-5)^n}$; (k) $\sum \frac{n^\alpha+2^n}{n^2+3^{n/\alpha}}$; (l) $\sum \frac{\cos(n\pi)}{n^x+2^x}$.

2. (a) Dato $w = -1 + i$, rispondere ai seguenti quesiti.

- Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\bar{z}w \in \mathbb{R}$ e $|z| = 3$.
- Quali sono i numeri immaginari puri che distano almeno 4 da w ?
- Disegnare sul piano di Gauss l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |w-z| < 2, 2\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \leq 1\}$.
- Qual'è il numero complesso z tale che $\frac{w+3}{z-i} = 3+4i$?
- Scrivere in forma algebrica i numeri $u_1 = 3\overline{(w+1)} - 2i$, $u_2 = -3iw^2$ e $u_3 = \frac{|w|^2+i}{w^3-2}$, e determinare le loro radici quadrate.

(b) Risolvere le seguenti equazioni nella variabile complessa z :

(i) $\bar{z}^2 = 1 - iz$; (ii) $\left| \frac{1-3z}{i+\bar{z}} \right| = 3$.

⁽¹⁾distinguendo tra eventuale convergenza semplice e/o assoluta.

- (c) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f(z) = \bar{z}^2 - i$.
- (i) La funzione f è iniettiva? Suriettiva?
 - (ii) Dato $w = -5 - 13i$, calcolare $f(w)$ e la fibra $f^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = w\}$.
 - (iii) Si dimostri che la restrizione di f a $A = \mathbb{R}_{>0}$ (semiasse reale positivo) è iniettiva, calcolare l'immagine $B = f(A)$ e determinare l'inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$.
 - (iv) Posto $K = \{iy : y < 0\}$ (semiasse immaginario inferiore), calcolare l'immagine $f(K) = \{f(z) : z \in K\}$ e l'antiimmagine $f^{-1}(K) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in K\}$.
- (d) Siano $\alpha = -8(i\sqrt{3} + 1)$, $\beta = -3\sqrt{2}(1 - i)$, $\gamma = \frac{6(2i+1)}{i-2}$ e $\delta = 3 - 4i$.
- (i) Scrivere α , β , γ e δ in forma trigonometrica.
 - (ii) Calcolare le radici quarte di α e le radici cubiche di γ .
 - (iii) Descrivere le potenze intere di β e δ .
 - (iv) Sia $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione esponenziale $\exp(z) = e^z$. Descrivere i valori di \exp in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; descrivere anche le immagini tramite \exp dei sottoinsiemi $i\mathbb{R}_{<0} = \{it \in i\mathbb{R} : t < 0\}$, $\mathbb{R}_{\leq -3} = \{t \in \mathbb{R} : t \leq -3\}$ e $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 2, 1 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.
- (e) (i) Risolvere l'equazione $p(z) = 6z^6 - 3z^5 + 14z^4 + 44z^3 + 4z^2 + 15z = 0$ sapendo che due sue soluzioni sono $-\frac{3}{2}$ e $1 - 2i$. Come si decompone il polinomio $p(z)$ in fattori irriducibili su \mathbb{R} e su \mathbb{C} ?
- (ii) Sia data l'equazione $(2 - i)z^2 + 3(1 + i)z + 2\alpha = 0$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ vi è una soluzione doppia? Si risolva poi l'equazione per $\alpha = 1 + i$.

Soluzioni.

1. Nel seguito, si indicherà con a_n il termine generale della serie $\sum a_n$ che si sta studiando, e si darà per noto: (a) che la serie armonica $\sum \frac{1}{n^p}$ converge se e solo se $p > 1$; (b) che la serie geometrica $\sum q^n$ converge assolutamente quando $|q| < 1$ (con somma $\frac{1}{1-q}$), non converge per $q \leq -1$ e diverge a $+\infty$ per $q \geq 1$.
- (a) $[\sum_{n > -x} (\frac{x+1}{n+x})^n]$ Criterio della radice: poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |\frac{x+1}{n+x}|$ tende a 0, la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $[\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{(n!)^x}]$ La serie è a termini positivi. Criterio del rapporto: poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)^{1-x} (\frac{n+1}{n})^n$ tende a 0 se $x > 1$, tende a e se $x = 1$ e tende a $+\infty$ se $x < 1$, la serie converge se $x > 1$ e diverge a $+\infty$ se $x \leq 1$.
- (c) $[\sum e^{-n \sin x}]$ La serie è geometrica di ragione $q = e^{-\sin x} > 0$, dunque converge quando $e^{-\sin x} < 1$ (ovvero quando $\sin x > 0$, cioè $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$); e diverge a $+\infty$ quando $e^{-\sin x} \geq 1$ (ovvero quando $\sin x \leq 0$, cioè $-\pi + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$).
- (d) $[\sum_{n \geq 1} \log \frac{x+n}{n}]$ Vale $\frac{x+n}{n} = 1 + \frac{x}{n}$. Se $x > 0$ la serie è a termini positivi, e poiché $\log(1 + \frac{x}{n}) \sim \frac{x}{n} = x \frac{1}{n}$ essa diverge a $+\infty$. Se $x = 0$ la serie è nulla, dunque banalmente convergente. Infine, se $x < 0$ la serie è a termini negativi, dunque di segno costante: la sua opposta ha termine generale $-\log(1 + \frac{x}{n}) = \log(\frac{n}{n+x}) = \log(1 - \frac{x}{n+x}) \sim -\frac{x}{n+x} \sim \frac{1}{n}$, dunque lei diverge a $-\infty$.
- (e) $[\sum \frac{n^x}{47+2n^2-n^3}]$ La serie ha termine generale definitivamente negativo; la sua opposta ha termine generale definitivamente positivo $\frac{n^x}{n^3-2n^2-47} \sim \frac{1}{n^{3-x}}$, dunque converge quando $3-x > 1$ (cioè $x < 2$) e diverge a $+\infty$ per $3-x \leq 1$ (cioè $x \geq 2$). Pertanto la nostra serie converge per $x < 2$, e diverge a $-\infty$ per $x \geq 2$.
- (f) $[\sum \frac{n}{n^2+1} (4^x - 2)^n]$ Criterio del rapporto: poiché $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n(n^2+2n+3)} |4^x - 2|$ tende a $|4^x - 2|$, la serie converge assolutamente quando $|4^x - 2| < 1$ (cioè $-1 < 4^x - 2 < 1$, cioè $1 < 4^x < 3$, cioè $0 < x < \log_4 3$) e non converge quando $|4^x - 2| > 1$ (cioè $x < 0$ oppure $x > \log_4 3$; più precisamente, quando $x > \log_4 3$ essa diverge a $+\infty$). Quando $x = 0$ essa diventa $\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$, che converge semplicemente per il criterio di Leibniz ma non assolutamente (essendo $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$); infine, quando $x = \log_4 3$ diventa $\sum \frac{n}{n^2+1}$, dunque diverge a $+\infty$.
- (g) $[\sum \sinh(\frac{n^{3x+\sqrt{n}}}{2n^5-n+2})]$ Se $3x \geq 5$ (ovvero $x \geq \frac{5}{3}$) la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Se invece $x < \frac{5}{3}$ la serie è a termini positivi infinitesimi: essendo $a_n \sim \frac{n^{3x+\sqrt{n}}}{2n^5-n+2}$, vanno distinti i casi $3x \leq \frac{1}{2}$ (ovvero $x \leq \frac{1}{6}$) in cui $a_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n^5} = n^{-\frac{9}{2}}$ (dunque la serie converge) e $3x > \frac{1}{2}$ (ovvero $\frac{1}{6} < x < \frac{5}{3}$) in cui $a_n \sim \frac{1}{n^{5-3x}}$ (dunque essa converge quando $5-3x > 1$, cioè $x < \frac{4}{3}$). Ricapitolando, la serie converge per $x < \frac{4}{3}$ e diverge a $+\infty$ per $x \geq \frac{4}{3}$.
- (h) $[\sum_{n \geq 1} (\sqrt[n]{n} - 1)]$ Il termine $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ è (definitivamente) decrescente e infinitesimo, dunque la serie potrebbe convergere; si tratta solo di capire che tipo di infinitesimo sia a_n . L'idea giusta, in questo caso, è di studiare la disequazione $a_n > \frac{1}{n}$, che dà $\sqrt[n]{n} > 1 + \frac{1}{n}$, ovvero $n > (1 + \frac{1}{n})^n$: ricordando che la successione esponenziale al secondo membro tende crescendo a e , tale disequazione è soddisfatta per $n \geq 3$, dunque definitivamente. Pertanto la serie diverge a $+\infty$ per confronto con la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$.
- (i) $[\sum_{n \geq 1} \frac{2+\cos x}{n \log(n|x|)}]$ La serie ha senso per $x \neq 0$, ed è (almeno definitivamente) a termini positivi. Il numeratore $2+\cos x$ è una costante positiva, che non influisce sul carattere della serie; inoltre il denominatore $n \log(n|x|) = n(\log n + \log|x|)$ è $\sim n \log n$. Si tratta dunque di capire il carattere della serie $\sum \frac{1}{n \log n}$, e la conclusione varrà per ogni $x \neq 0$. Il criterio del rapporto e della radice non funzionano (i limiti danno 1), e nemmeno il criterio del confronto aiuta (infatti $\frac{1}{n \log n}$ è maggiorato da $\frac{1}{n}$ e minorato da $\frac{1}{n^\alpha}$ per ogni $\alpha > 1$). Come per le serie armoniche, anche qui bisogna ricorrere al criterio di condensazione di Cauchy: infatti $\sum 2^k a_{2^k} = \sum 2^k \frac{1}{2^k \log 2^k} = \sum \frac{1}{k \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum \frac{1}{k}$ che diverge a $+\infty$. Dunque anche la nostra serie diverge a $+\infty$, per ogni $x \neq 0$.
- (j) $[\sum \frac{\sqrt{n}}{(x-5)^n}]$ La serie ha senso per $x \neq 5$. Criterio della radice: poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{|x-5|}$ tende a $\frac{1}{|x-5|}$, la serie converge assolutamente quando $|x-5| > 1$ (ovvero per $x < 4$ oppure $x > 6$) e non converge quando $|x-5| < 1$ (ovvero per $4 < x < 6$ ma $x \neq 5$). Quando $x = 4$ la serie diventa $\sum (-1)^n \sqrt{n}$, che non converge; quando $x = 6$ la serie diventa $\sum \sqrt{n}$, che diverge a $+\infty$.
- (k) $[\sum \frac{n^\alpha + 2^n}{n^2 + 3^{n/\alpha}}]$ È una serie a termini positivi, che ha senso per $\alpha \neq 0$. Ragionando per asintoticità, notiamo che per ogni α il numeratore è $\sim 2^n$, mentre il denominatore è $\sim n^2$ se $\alpha < 0$ ed è $\sim 3^{n/\alpha}$ se $\alpha > 0$; pertanto se $\alpha < 0$ il termine generale a_n tende a $+\infty$ (in particolare non è infinitesimo) e così la serie diverge a $+\infty$, mentre se $\alpha > 0$ si ha $a_n \sim q^n$ con $q = \frac{2}{3^{1/\alpha}}$, dunque la serie converge se e solo se $q < 1$, ovvero $2 < 3^{1/\alpha}$, ovvero $1/\alpha > \log_3 2$, ovvero $0 < \alpha < \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$. Ricapitolando, la serie converge se e solo se $0 < \alpha < \log_2 3$, e diverge a $+\infty$ negli altri casi.

- (1) $[\sum \frac{\cos(n\pi)}{n^x+2x}]$ Per iniziare, notiamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Se $x \leq 0$ il termine generale a_n non è infinitesimo, dunque la serie (definitivamente a segno alterno) non converge. Invece per $x > 0$ si tratta di una serie di Leibniz, che converge semplicemente; quanto alla convergenza assoluta, vale $|a_n| = \frac{1}{n^x+2x} \sim \frac{1}{n^x}$, dunque la serie converge assolutamente solo nel caso $x > 1$.

2. (a) (i) Posto $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$ si ha $\bar{z}w = (x - iy)(-1 + i) = (-x + y) + i(x + y)$, e la condizione $\bar{z}w \in \mathbb{R}$ equivale a $\operatorname{Im}(\bar{z}w) = x + y = 0$; d'altra parte, la condizione $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$ dà $x^2 + y^2 = 9$. Il sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ ha soluzioni $\pm(\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2})$: pertanto $z = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}(1 - i)$.

(ii) La distanza di $z = iy$ (con $y \in \mathbb{R}$) da $w = -1 + i$ è data da $|z - w| = |iy - (-1 + i)| = |1 + i(y - 1)| = \sqrt{1^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{y^2 - 2y + 2}$: la condizione è allora $\sqrt{y^2 - 2y + 2} \geq 4$, ovvero $y^2 - 2y + 2 \geq 16$, da cui $y^2 - 2y - 14 \geq 0$, soddisfatta per $y \leq -\sqrt{15} + 1$ oppure $y > \sqrt{15} + 1$. Il luogo è formato pertanto da tutti i punti iy dell'asse immaginario con $y \leq -\sqrt{15} + 1$ oppure $y > \sqrt{15} + 1$.

(iii) Nel piano di Gauss, la condizione $|w - z| < 2$ descrive i numeri z che distano meno di 2 da $w = -1 + i$, ovvero quelli che stanno dentro la circonferenza di raggio 2 centrata in w ; d'altra parte, la condizione $2\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \leq 1$ descrive i numeri z che stanno sotto o sulla retta $y = -2x + 1$ (con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$). L'insieme cercato è ottenuto intersecando le due zone.

(iv) Ponendo $z = x + iy$ si ha $\frac{w+3}{z-i} = \frac{2+i}{x+i(y-1)} = 3 + 4i$, da cui $2 + i = (3 + 4i)(x + i(y - 1)) = (3x - 4y + 4) + i(4x + 3y - 3)$, che equivale al sistema $\begin{cases} 3x - 4y + 4 = 2 \\ 4x + 3y - 3 = 1 \end{cases}$, con soluzione unica $(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$. Si ha perciò $z = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = \frac{2}{5}(1 + 2i)$.

L'equazione può essere risolta alternativamente anche con conti diretti, senza ricorrere a parte reale e immaginaria: da $\frac{w+3}{z-i} = \frac{2+i}{z-i} = 3 + 4i$, passando ai reciproci, si ricava $\frac{z-i}{2+i} = \frac{1}{3+4i}$, da cui $z - i = \frac{2+i}{3+4i}$, da cui $z = i + \frac{2+i}{3+4i} = \frac{3i-4+2+i}{3+4i} = \frac{-2+4i}{3+4i} = \frac{(-2+4i)(3-4i)}{25} = \frac{-6+8i+12i+16}{25} = \frac{10+20i}{25} = \frac{2}{5}(1 + 2i)$.

(v) Si ha $u_1 = 3\overline{(w+1)} - 2i = 3\bar{i} - 2i = -3i - 2i = -5i$; $u_2 = -3iw^2 = -3i(1 - 1 - 2i) = -6$; $u_3 = \frac{|w|^2+i}{w^3-2} = \frac{2+i}{-1+3i-3i^2+i^3-2} = \frac{2+i}{2i} = \frac{(2+i)(-i)}{2} = \frac{1-2i}{2}$. Se $w = x + iy$ è radice quadrata di u_1 deve essere $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -5 \end{cases}$, con soluzioni $\pm(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2})$: dunque $w = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}(1 - i)$. Le radici quadrate di u_2 sono facilmente $\pm i\sqrt{6}$. Infine, le radici quadrate $w = x + iy$ di u_3 devono dare $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = -1 \end{cases}$, con soluzioni $w = \pm(\frac{\sqrt{5+1}}{2} - \frac{\sqrt{5-1}}{2}i)$.

- (b) (i) Posto $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, da $\bar{z}^2 = 1 - iz$ si trova $(x - iy)^2 = 1 - i(x + iy)$, ovvero $(x^2 - y^2) + i(-2xy) = (y + 1) + i(-x)$, da cui il sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = y + 1 \\ -2xy = -x \end{cases}$. Dalla seconda equazione si ricava $x(1 - 2y) = 0$: se $x = 0$, dalla prima si ricava $y^2 + y + 1 = 0$, priva di soluzioni reali; se invece $y = \frac{1}{2}$, dalla prima si ricava $x^2 = y^2 + y + 1 = \frac{7}{4}$, da cui $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Le soluzioni sono dunque $z_1 = \frac{\sqrt{7}+i}{2}$ e $z_2 = -\frac{\sqrt{7}+i}{2}$.

(ii) L'equazione ha senso quando $i + \bar{z} \neq 0$, cioè $\bar{z} \neq -i$, cioè $z \neq i$. Si ha $|\frac{1-3z}{i+\bar{z}}| = \frac{|1-3z|}{|i+\bar{z}|} = 3$, da cui $|1 - 3z| = 3|i + \bar{z}|$. Posto ancora $z = x + iy$, ciò significa $|(1 - 3x) + i(-3y)| = 3|x + i(1 - y)|$, ovvero $(1 - 3x)^2 + 9y^2 = 9(x^2 + (1 - y)^2)$, da cui $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$. Le soluzioni sono dunque tutti e soli i numeri complessi $z = x + iy$ che, sul piano di Gauss, stanno sulla retta $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$.

- (c) (i) Da $f(z_1) = f(z_2)$ si ricava $\bar{z}_1^2 - i = \bar{z}_2^2 - i$, da cui $\bar{z}_1^2 = \bar{z}_2^2$, da cui $z_1^2 = z_2^2$: ma ciò non implica che $z_1 = z_2$ (infatti potrebbe essere anche $z_1 = -z_2$). Dunque f non è iniettiva. Dato invece un qualsiasi $w \in \mathbb{C}$, l'equazione $f(z) = w$ ha sempre soluzioni z , perché essa equivale a $\bar{z}^2 = w + i$, ovvero $z^2 = \overline{w + i}$, e basta ricordare che ogni numero complesso ha radici quadrate. Dunque f è suriettiva.

(ii) Si ha $f(w) = \overline{(-5 - 13i)^2} - i = (-5 + 13i)^2 - i = 25 - 169 - 130i - i = -144 - 131i$. Da $f(z) = \bar{z}^2 - i = w$ si ricava invece $\bar{z}^2 = w + i = -5 - 12i$, ovvero $z^2 = -5 + 12i$: in altre parole, la fibra $f^{-1}(w)$ è formata dalle due radici quadrate del numero $-5 + 12i$. Se $(x + iy)^2 = -5 + 12i$ si deve avere $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$, che ha soluzioni $(x, y) = \pm(2, 3)$: pertanto $f^{-1}(w) = \{\pm(2 + 3i)\}$.

(iii) Prendiamo $t_1, t_2 > 0$ e supponiamo che $f(t_1) = f(t_2)$: ciò significa che $\bar{t}_1^2 - i = \bar{t}_2^2 - i$, ovvero $t_1^2 = t_2^2$, da cui $t_1 = t_2$. Dunque la restrizione di f a $A = \mathbb{R}_{>0}$ è iniettiva. Si ha poi $B = f(A) = \{f(t) : t > 0\} = \{\bar{t}^2 - i : t > 0\} = \{t^2 - i : t > 0\} = \{u - i : u > 0\}$: pertanto B è la semiretta orizzontale nel piano di Gauss dei numeri con parte reale positiva e parte immaginaria uguale a -1 . Preso $u - i \in B$, da $f(t) = t^2 - i = u - i$ si ricava $u = t^2$, da cui $t = \sqrt{u}$: dunque la funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ è data da $f^{-1}(u - i) = \sqrt{u}$.

(iv) Se $K = \{iy : y < 0\}$ si ha $f(K) = \{f(iy) : y < 0\} = \{\overline{(iy)^2} - i : y < 0\} = \{(-iy)^2 - i : y < 0\} = \{-y^2 - i : y < 0\} = \{-v - i : v > 0\}$: dunque $f(K)$ è la semiretta orizzontale nel piano di Gauss dei numeri

con parte reale negativa e parte immaginaria uguale a -1 .

Si ha infine $f^{-1}(K) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in K\} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}^2 - i = iv \text{ con } v < 0\} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}^2 = iv \text{ con } v < 1\} = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = iv \text{ con } v > -1\}$. Se $z = x + iy$, la condizione “ $z^2 = iv$ con $v > -1$ ” equivale al sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy > -1 \end{cases}$. La prima equazione dà $x = \pm y$: se $x = y$, la seconda diventa $x^2 > -\frac{1}{2}$ (sempre vera), mentre se $x = -y$ diventa $-x^2 > -\frac{1}{2}$, verificata per $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pertanto, l’antiimmagine $f^{-1}(K)$ è data dai numeri complessi che, sul piano di Gauss con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, giacciono su tutta la bisettrice $y = x$ oppure sul segmento della bisettrice $y = -x$ con $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (d) (i) Si ha $|\alpha| = 8|\sqrt{3} + 1| = 16$, da cui $\alpha = 16(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Si ha poi $|\beta| = 3\sqrt{2}|1 - i| = 6$, da cui $\beta = 6(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Vale $\gamma = \frac{6(2i+1)}{i-2} = \frac{6(2i+1)(-2-i)}{5} = \frac{6(-5i)}{5} = -6i$, da cui $\gamma = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Infine, si ha $|\delta| = 5$ da cui $\delta = 5(\frac{3}{5} + i(-\frac{4}{5})) = 5e^{i\theta}$ con $\cos \theta = \frac{3}{5}$ e $\sin \theta = -\frac{4}{5}$: sarà ad esempio $\theta = -\arcsin \frac{4}{5}$.

(ii) Le radici quarte di $\alpha = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sono date da $w_k = \sqrt[4]{16} e^{i(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2})}$ con $k = 0, 1, 2, 3$, dunque $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$, $w_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$, $w_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -w_0$ e $w_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = -w_1$. Le radici cubiche di $\gamma = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$ sono $z_k = \sqrt[3]{6} e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3})}$ con $k = 0, 1, 2$, dunque $z_0 = \sqrt[3]{6} e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{6}i$, $z_1 = \sqrt[3]{6} e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(\sqrt{3} + i)$ e $z_2 = \sqrt[3]{6} e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(\sqrt{3} - i)$.

(iii) Se $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\beta^k = 6^k e^{i\frac{3k\pi}{4}}$: si tratta di un numero di modulo 6^k ed argomento $\frac{3k\pi}{4}$, che sta sulle bisettrici per k dispari, sull’asse reale per k pari e multiplo di 4 e sull’asse immaginario per k pari ma non multiplo di 4. D’altra parte si ha $\delta^k = 5^k e^{ik\theta}$ con $\theta = -\arcsin \frac{4}{5}$: si tratta di un numero di modulo 5^k ed argomento $k\theta$, e quest’ultimo non assume valori notevoli come nel caso precedente. Si noti che i moduli delle potenze tendono a 0^+ per $k \rightarrow -\infty$, e a $+\infty$ per $k \rightarrow +\infty$.

(iv) Ricordiamo che se $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$ allora $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$: dunque e^α ha modulo e^{-8} e argomento $-8\sqrt{3} \sim -13,8$ radianti (si tratta di un angolo nel terzo quadrante); e^β ha modulo $e^{-3\sqrt{2}}$ e argomento $3\sqrt{2} \sim 4,4$ radianti (un po’ meno di $\frac{3\pi}{2}$); e^γ ha modulo 1 e argomento -6 (a meno di un giro, corrisponde circa a $\frac{\pi}{12}$); infine, e^δ ha modulo e^3 e argomento -4 radianti (a meno di un giro, corrisponde circa a $\frac{3\pi}{4}$). L’immagine di $i\mathbb{R}_{<0}$ è $\{e^{it} : t < 0\}$: si ottiene tutto l’insieme $\mathbb{U} = \{z : |z| = 1\}$ dei numeri complessi unitari. L’immagine di $\mathbb{R}_{\leq -3}$ è $\{e^t : t \leq -3\} =]0, \frac{1}{e^3}]$, e quella del rettangolo $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 2, 1 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ è $\{e^z = e^x e^{iy} : |x| < 2, 1 < y < \pi\}$, il “ventaglio” dei numeri di modulo compreso tra $\frac{1}{e^2}$ e e^2 , e argomento compreso tra 1 e π radianti.

- (e) (i) Una soluzione ovvia di $p(z) = 6z^6 - 3z^5 + 14z^4 + 44z^3 + 4z^2 + 15z = 0$ è $z = 0$; un’altra, indicata nel testo, è $z = -\frac{3}{2}$; inoltre, poiché $p(z)$ ha coefficienti reali, se $1 - 2i$ è soluzione tale è anche $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$. Dunque $p(z)$ sarà divisibile per $q(z) = z(2z + 3)(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = z(2z + 3)(z^2 - 2z + 5)$: in effetti, dalla divisione euclidea di $p(z)$ per $q(z)$ si ottiene quoziente $3z^2 + 1$ e resto zero. Le ultime due soluzioni di $p(z) = 0$ sono date perciò da $3z^2 + 1 = 0$, ovvero $z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$. La decomposizione di $p(z)$ su \mathbb{C} è data da $p(z) = 6(z - 0)(z - (-\frac{3}{2}))(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))(z - \frac{\sqrt{3}}{3}i)(z - (-\frac{\sqrt{3}}{3}i)) = z(2z + 3)(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(\sqrt{3}z + i)(\sqrt{3}z - i)$; quella su \mathbb{R} è data da $p(z) = z(2z + 3)(z^2 - 2z + 5)(3z^2 + 1)$.

(ii) Il discriminante dell’equazione $(2 - i)z^2 + 3(1 + i)z + 2\alpha = 0$ è dato da $\Delta = b^2 - 4ac = 9(1 + i)^2 - 8\alpha(2 - i) = 18i - 8\alpha(2 - i)$: una soluzione doppia appare quando $\Delta = 0$, ovvero per $\alpha = \frac{18i}{8(2 - i)} = \frac{9}{4} \frac{i(2 + i)}{5} = -\frac{9}{20}(1 - 2i)$, e tale soluzione è $z = -\frac{b}{2a} = -\frac{3(1 + i)}{2(2 - i)} = -\frac{3(1 + i)(2 + i)}{10} = -\frac{3(1 + 3i)}{10}$. • Posto poi $\alpha = 1 + i$ e, applicando a $(2 - i)z^2 + 3(1 + i)z + 2(1 + i) = 0$ la consueta formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado si trova $z = \frac{-3(1 + i) \pm \sqrt{9(1 - 1 + 2i) - 8(2 - i)(1 + i)}}{2(2 - i)} = \frac{-3(1 + i) \pm \sqrt{-24 + 10i}}{2(2 - i)}$: le radici quadrate di $-24 + 10i$ risultano $\pm(1 + 5i)$, dunque si trova $z = \frac{-3(1 + i) \pm (1 + 5i)}{2(2 - i)}$, ovvero $z = \frac{-2 + 2i}{2(2 - i)} = \frac{(-1 + i)(2 + i)}{5} = -\frac{3 - i}{5}$ oppure $z = \frac{-4 - 8i}{2(2 - i)} = -\frac{2(1 + 2i)(2 + i)}{5} = -2i$.