Indice

Serie, ovvero somme infinite: un problema antico

Provare a sommare tra loro infiniti addendi ha una lunga storia...

- Zenone di Elea (V sec. aC) dà il falso paradosso di Achille e della tartaruga, e Archimede (III sec. aC) riempie la parabola di triangoli (esaustione). Una somma infinita può dare un "risultato" finito !
- Nicola d'Oresme (XIV sec.) mostra che $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ (serie armonica) ha somma infinita. Una somma infinita può dare un "risultato" infinito anche se gli addendi sono infinitesimi !
  Infatti $1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + \cdots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \longrightarrow +\infty$.

- A proposito della serie $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$, l'abate Guido Grandi (1671-1742) trae conclusioni a dir poco temerarie:
  - Spostando le parentesi, da essa si ottiene sia $0 = (1-1) + (1-1) + (1 \cdots$ che $1 = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$ ... ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è plausibile !

  Non si possono più applicare le proprietà formali dell'addizione !
  - La somma è $\frac{1}{2}$: infatti $s = 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + \cdots) = 1 - s$ da cui $s = \frac{1}{2}$!

  Non è lecito supporre a priori che esista la somma, e farci i conti !

Maneggiare una somma infinita è dunque insidioso... come fare?

Serie: alcuni esempi iniziali

Data una serie $\sum a_k$, la nozione usata da Gauss e Cauchy in poi è:

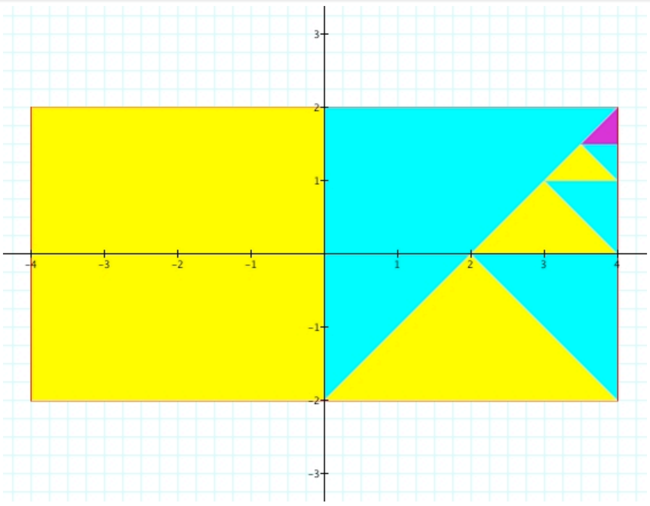
La successione delle somme parziali $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ ha limite?

- Se sì, tale limite si dirà somma della serie (convergente o divergente).
- Se no, la serie si dirà indeterminata.

- $\sum 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots \longrightarrow +\infty$ (infatti $s_n = n$)
- $\sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - \cdots \longrightarrow$ indeterminata (infatti $s_{2k-1} = 1$, $s_{2k} = 0$)
- Geometrica: $\sum q^n = 1 + q + q^2 + \cdots \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indet.} & \text{se } q \leq 1 \end{cases}$ (è $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$)
- Armonica: $\sum \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \cdots \longrightarrow \begin{cases} \text{conv.} & \text{se } x > 1 \\ \text{div. } +\infty & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ ($s_n = ?$; è la *Zeta di Riemann* $\zeta(x)$ Esempio: $\zeta(2) = \pi^2/6$ (Eulero))
- Leibniz: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \longrightarrow \log 2$ (e $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots \to \frac{\pi}{4}$)
- Mengoli: $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \cdots \longrightarrow 1$ (infatti $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; è "telescopica")

In generale non si può sperare di calcolare s_n (dunque la somma).

Ad esempio, vediamo quel'è la **somma della serie geometrica** per $q = \frac{1}{2}$ ...



risulta $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots = 2$