

Indice

- 0 Presentazione
- 1 Insiemi, gruppi, numeri reali
- 2 Topologia e successioni
- 3 Limiti e continuità
- 4 Calcolo differenziale
- 5 Calcolo integrale
- 6 Serie numeriche e numeri complessi**

Numeri complessi e Teorema Fond. dell'Algebra

Un'equazione polinomiale a coefficienti reali **può non avere soluzioni reali**.

Esempi. $x^4 - 4 = 0$ e $x^2 - 2x - 5 = 0$ **ne hanno due ciascuna**, mentre $x^4 + 4 = 0$ e $x^2 - 2x + 5 = 0$ **non ne hanno**.

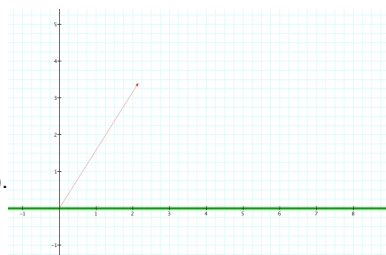
Per ovviare al problema, **si allarga il corpo \mathbb{R} a un corpo \mathbb{C} algebricamente chiuso**.

TFA: un'equazione polinomiale di grado n a coefficienti in \mathbb{C} **ammette esattamente n soluzioni in \mathbb{C}** (se contate con la loro molteplicità).

Sorgono naturalmente i seguenti problemi.

- 1 **Come sono fatti** i numeri complessi? Come **riconoscere, tra essi, i vecchi reali**?
- 2 Definire in \mathbb{C} **operazioni $+$, \cdot** che lo rendano **corpo** e non **stravolgano quelle di \mathbb{R}** .
- 3 **Dimostrare effettivamente la chiusura algebrica di \mathbb{C}** .

1. Un numero complesso è $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ (*parte reale e immaginaria*). I vecchi numeri reali sono i numeri complessi con parte immaginaria $b = 0$.
2. Le operazioni in \mathbb{C} sono $\begin{cases} (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \\ (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \end{cases}$ (come i polinomi, con $i^2 = -1$). • Su \mathbb{R} esse coincidono con quelle di prima.
3. Non dimostreremo il TFA. Tuttavia vedremo che ogni numero complesso $w \neq 0$ ha n radici n -esime distinte (è come risolvere l'equazione $z^n - w = 0$, di grado n).
 - Le quattro soluzioni di $x^4 \mp 4 = 0$ sono risp. $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$ e $\{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$ (ovvero le quattro radici quarte di 4 e di -4 !)
 - Le soluzioni di $x^2 - 2x \mp 5 = 0$ sono $\{1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}\}$ e $\{1 + 2i, 1 - 2i\}$.



Numeri complessi: da Erone a Gauss

- Di **radici quadrate di numeri negativi** si parla da tempo: già lo fece **Erone di Alessandria** (I sec. aC), per il volume di sezioni di piramidi.
- Nel seguito esse tornarono come **utili ma misteriosi artifici di conto**. Tale uso disinvolto raggiunse però livelli imbarazzanti nel XVI sec. con la scoperta (attribuibile a **Dal Ferro**, **Tartaglia**, **Cardano**) della **formula di risoluzione per radicali delle equazioni di terzo grado**, da cui ne discende una per il quarto (dal quinto in poi una tale formula non esiste, come provato da **Abel** e **Galois** verso il 1830).
- Lo stupore per l'intrattabilità della formula proprio nel caso "amico" di tre radici reali distinte (Cardano, di fronte a un **enigmatico** $\sqrt{\Delta}$ con $\Delta < 0$, chiama questo caso **irriducibile**) causò uno sforzo di comprensione dell'**oggetto misterioso** $i = \sqrt{-1}$. Dopo le intuizioni di **Bombelli** sull'algebra di $\pm i$ e la lenta digestione del XVII secolo (**Cartesio** usa per primo il termine *numeri immaginari*), è nel XVIII sec. con **de Moivre** e **Eulero** che si inizia a sistematizzare la teoria. Nel 1799, dopo vari tentativi (Eulero, Lagrange, Laplace...), **Gauss** **dimostra il TFA**; ma è solo dopo la **rappresentazione geometrica**, completata da **Argand** e divulgata da **Gauss** (1832), **Cauchy** e **Abel** che i complessi vengono accettati dalla comunità matematica.



La soluzione per radicali delle equazioni di terzo grado

- Si abbia l'equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ove $a, b, c \in \mathbb{R}$ (o da subito $\in \mathbb{C}$).
- Con $x = t - \frac{1}{3}a$ si ha $t^3 + 3pt - 2q = 0$, ove $(p, q) = (-\frac{a^2 - 3b}{9}, -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54})$.

Formula di risoluzione delle equazioni di terzo grado

Le soluzioni di $t^3 + 3pt - 2q = 0$ sono $\sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}}$, ove $\Delta = q^2 + p^3$.

- Cerchiamo di spiegare il procedimento, e con esso il significato della formula.

1. Cercare le tre radici cubiche u_1, u_2, u_3 di $q + \sqrt{\Delta}$ e le tre v_1, v_2, v_3 di $q - \sqrt{\Delta}$ (ove $\sqrt{\Delta}$ è una radice quadrata di Δ);
2. Esistono esattamente tre coppie (u_{j_ℓ}, v_{k_ℓ}) tali che $u_{j_\ell} v_{k_\ell} = -p$; le soluzioni sono $t_\ell = u_{j_\ell} + v_{k_\ell}$ (con $\ell = 1, 2, 3$).

Ebbene, il caso di tre soluzioni t_1, t_2, t_3 reali e distinte è quello in cui $\Delta < 0$: pur essendo un problema reale con soluzioni reali, si deve passare per \mathbb{C} !

Esempio. Le soluzioni di $t^3 - 12t = 0$ sono chiaramente $t_1 = 0, t_2 = 2\sqrt{3}$ e $t_3 = -2\sqrt{3}$ (tutte reali). Dalla formula si ha $(p, q) = (-4, 0)$, $\Delta = -64$ e $\pm\sqrt{\Delta} = \pm 8i$. Le radici cubiche di $8i$ sono $\{u_1 = \sqrt{3} + i, u_2 = -\sqrt{3} + i, u_3 = -2i\}$, quelle di $-8i$ sono $\{v_1 = 2i, v_2 = -\sqrt{3} - i, v_3 = \sqrt{3} - i\}$; le tre coppie (u, v) il cui prodotto dà $-p = 4$ sono (u_1, v_3) , (u_2, v_2) e (u_3, v_1) , e si ritrova $u_1 + v_3 = t_2, u_2 + v_2 = t_3$ e $u_3 + v_1 = t_1$.