Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)
Esercizi di ricapitolazione n. 2

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

giovedì 2 dicembre 2010

Questi esercizi sono proposti come ricapitolazione della seconda parte del corso. La loro risoluzione verrà pubblicata giovedì 09/12.

---

1. (a) Trovare possibilmente in due modi (con la formula di Taylor, e con gli sviluppi già noti dalla prima parte del corso) lo sviluppo asintotico, con due termini significativi, delle seguenti funzioni nel punto indicato:

$$\text{(i)}\ \ f(x) = \log(3-\cos 4x) \quad \text{in } 0\,; \qquad \text{(ii)}\ \ g(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+3}} \quad \text{in } -1\,; \qquad \text{(iii)}\ \ h(x) = x\sin x + \operatorname{tg}\frac{x}{3} \quad \text{in } \pi\,.$$

Calcolare poi in due modi (usando quanto appena trovato, e con de l'Hôpital) i seguenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{(i)}\ \ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\alpha}{|x|^\alpha}\,; \qquad \text{(ii)}\ \ \lim_{x\to -1}\frac{g(x)}{\log|x+\alpha|}\,; \qquad \text{(iii)}\ \ \lim_{x\to\pi}\frac{h(x)-\sqrt{3}}{(1+\cos x)^\alpha}\,.$$

(b) Descrivere il luogo geometrico ℓ dei punti del piano cartesiano equidistanti dal punto $(2,2)$ e dalla retta $x+2y=2$; determinare poi il punto di ℓ più vicino alla retta $x+y=1$.[(1)]

(c) Studiare l'andamento delle seguenti funzioni, e tracciarne il grafico:

$$\text{(i)}\ \ \phi(x) = \log\left|(\sqrt{2}\,|\cos x| - x)\right|\,; \qquad \text{(ii)}\ \ \psi(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2-x}{|x|-2}\,; \qquad \text{(iii)}\ \ \eta(x) = \sqrt{\frac{x^3-x^2}{x-2}}\,.$$

2. (a) Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\text{(i)}\ \ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos x}\, + x)|\sin x|\,dx\,; \qquad \text{(ii)}\ \ \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}\,dx\,; \qquad \text{(iii)}\ \ \int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt[3]{\log x+2}}\,dx\,;$$

$$\text{(iv)}\ \ \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}\,dx\,; \qquad \text{(v)}\ \ \int_\alpha^{\pi} \frac{\sin 2x\,\cos x}{1-\cos^3 x}\,dx\,; \qquad \text{(vi)}\ \ \int_0^{-1} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

(iv): (discutere α; porre poi $\alpha = 0$) (v): (discutere α; porre poi $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

(b) Disegnare con precisione le seguenti zone limitate del piano cartesiano, e calcolarne l'area:

(i) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2(1-x) \le y \le 1+\cos^3 x\,,\ y\sin 2 + 2\sin x \ge 0\,,\ x\le\pi\}$;

(ii) $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \alpha|x| \le y \le \sqrt{\beta^2-x^2}\}$ (con $\alpha,\,\beta>0$);

(iii) $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|-1 \le y \le \sqrt{|x+y|}+1\,,\ x\le(y-1)^2\}$.

---

(1) Questo esercizio, risolubile con i mezzi di questo corso (si ricorda che la distanza di (x_0,y_0) da $ax+by+c=0$ è $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$), getta comunque un ponte verso il corso di Analisi 2, che fornirà i mezzi più idonei alla sua risoluzione.

3. Studiare il carattere delle seguenti serie $\sum_n a_n$, al variare dei parametri presenti:

(a) $\displaystyle\sum \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt[3]{n^2-2n+2}}$; (b) $\displaystyle\sum \left(\frac{n+x}{2nx-1}\right)^n$; (c) $\displaystyle\sum \frac{x^n n^x}{1+|x|^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+5}}{n\sqrt[3]{n}}$;

(e) $\displaystyle\sum (\pi - 2\operatorname{arctg} n)^x$; (f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(3\sin x+1)^n}{\log(1+n)}$; (g) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^p \log^q n}$; (h) $\displaystyle\sum n^{2x} \sin(x^n)$. (con $x \leq 1$)

4. (a) Risolvere le seguenti equazioni nella variabile complessa z:

(i) $\dfrac{z+1}{2-\bar{z}} = z$; (ii) $3z^2 - 4(1-i)z - 5 = 0$; (iii) $2z^5 - 3z^4 + z^3 + 9z^2 - 9z = 0$. (una soluzione è $z = 1 - \sqrt{2}\,i$)

(b) (i) Si consideri l'equazione $\varphi(z) = z^4 - 2(2-i)z^3 - (1+3i)z^2 + \alpha = 0$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ vi sono soluzioni multiple? Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ vi sono soluzioni reali?

(ii) Si consideri l'equazione $f(z) = 2z^6 - 4z^3 + k = 0$, ove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Senza risolverla, determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ vi sono soluzioni reali. Descrivere poi le soluzioni dell'equazione $f(z) = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(iii) Il polinomio $g(z) = z^3 - 6az^2 + 9a^2z + 1$ dipende dal parametro $a \in \mathbb{R}$. Dire quante sono, e che segno hanno, le soluzioni reali di $g(z) = 0$ al variare di a.

(c) Si consideri la funzione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $g(z) = i\bar{z}^4$.

(i) Posto $w = 3 + 2i$, calcolare $g(w)$ e le fibre $g^{-1}(-i)$ e $g^{-1}(w)$.

(ii) Risolvere l'equazione $g(\frac{2-z}{3i+2z}) = 16i$.

(iii) Disegnare i sottoinsiemi $A = \{z : |z| < 2, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ e $B = \{z : \operatorname{Im} z > \sqrt{3}|\operatorname{Re} z|\}$ nel piano di Gauss. La restrizioni di g rispettivamente a A ed a B sono iniettive? Se sì, calcolare la funzione inversa.

(iv) Calcolare immagine e antiimmagine della semiretta $s = \{t(i\sqrt{3} - 1) : t > 0\}$ tramite g.

Soluzioni.

1. (a) (i) $\boxed{f(x)=\log(3-\cos 4x) \ \text{ in } 0}$ Si ha $f'(x)=\frac{4\sin 4x}{3-\cos 4x}$ e $f''(x)=\frac{16(3\cos 4x-1)}{(3-\cos 4x)^2}$, da cui per Taylor si ha $f(x)=\log 2+0(x-0)+\frac{1}{2}\,8(x-0)^2+o_0(x^2)=\log 2+4x^2+o_0(x^2)$. Alternativamente, in $x=0$ la funzione ha parte principale $f(0)=\log 2$; si ha poi $f(x)-\log 2=\log(\frac{3-\cos 4x}{2})=\log(1+\frac{1}{2}(1-\cos 4x))\sim_0 \frac{1}{2}(1-\cos 4x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(4x)^2+o_0(x^3))=4x^2+o_0(x^3)$, dunque $f(x)=\log 2+4x^2+o_0(x^3)$. • Visto lo sviluppo precedente, in $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\alpha}{|x|^\alpha}$ il numeratore è finito per $\alpha\neq-\log 2$, dunque se $\alpha<0$ (con $\alpha\neq-\log 2$) il limite vale 0^σ (ove $\sigma:=\operatorname{sign}(\alpha+\log 2)$); se $\alpha=0$ vale $\log 2$; e se $\alpha>0$ vale $+\infty$. Nel caso particolare $\alpha=\log 2$ il numeratore è infinitesimo di ordine 2 mentre il denominatore è infinitesimo di ordine $\log 2\ \sim 0{,}7<2$, dunque il limite vale 0^+ (con de l'Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(|x|^{\log 2})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4\sin 4x}{3-\cos 4x}}{(\operatorname{sign} x)(\log 2)\,|x|^{\log 2-1}}=0^+$).

(ii) $\boxed{g(x)=\frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+3}} \ \text{ in } -1}$ Si noti che g è infinitesima in $x=-1$, dunque per trovare due termini significativi si dovrà sviluppare almeno fino al secondo ordine. Essendo $g'(x)=\frac{4x+7}{3(2x+3)\sqrt[3]{2x+3}}$ e $g''(x)=-\frac{4(2x+5)}{9(2x+3)^2\sqrt[3]{2x+3}}$, da Taylor si ricava $g(x)=0+1(x+1)+\frac{1}{2}(-\frac{4}{3})(x+1)^2+o_{-1}((x+1)^2)=(x+1)-\frac{2}{3}(x+1)^2+o_{-1}((x+1)^2)$. Alternativamente: posto $x=-1+t$ si ha $g(t)=\frac{t}{\sqrt[3]{1+2t}}=t(1-\frac{2}{3}t+o_0(t))=t-\frac{2}{3}t^2+o_0(t^2)=(x+1)-\frac{2}{3}(x+1)^2+o_0((x+1)^2)$. • Nel limite $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{\log|x+\alpha|}$ il numeratore è infinitesimo (è $\sim_{-1}(x+1)$), mentre il denominatore lo è se solo se $|-1+\alpha|=1$, ovvero $\alpha=0$ oppure $\alpha=2$: pertanto se $\alpha\neq 0,2$ il limite vale 0. Se $\alpha=0$ si ha $\log|x|=\log(-x)=\log(1+(-x-1))\sim_{-1}-(x+1)$, dunque il limite vale -1 (de l'Hôpital: $\lim_{x\to-1}\frac{g'(x)}{(\log|x|)'}=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{4x+7}{3(2x+3)\sqrt[3]{2x+3}}}{1/x}=-1$); se invece $\alpha=1$ si ha $\log|x+2|=\log(2+x)=\log(1+(x+1))\sim_{-1}(x+1)$, dunque il limite vale 1 (de l'Hôpital: $\lim_{x\to-1}\frac{g'(x)}{(\log|x+2|)'}=\lim_{x\to-1}\frac{g'(x)}{(\log(x+2))'}=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{4x+7}{3(2x+3)\sqrt[3]{2x+3}}}{1/(x+2)}=1$).

(iii) $\boxed{h(x)=x\sin x+\operatorname{tg}\frac{x}{3} \ \text{ in } \pi}$ Essendo $h'(x)=\sin x+x\cos x+\frac{1}{3\cos^2\frac{x}{3}}$, per Taylor si trova $h(x)=\sqrt{3}+(-\pi+\frac{4}{3})(x-\pi)+o_\pi(x-\pi)$. Alternativamente, posto $x=\pi+t$ si ha $h(x)=(\pi+t)\sin(\pi+t)+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}+\frac{t}{3})=-(\pi+t)\sin t+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{t}{3}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{t}{3}}$. Determiniamo lo sviluppo della frazione col metodo dei coefficienti a cascata: ricordando che $\operatorname{tg}\frac{t}{3}=\frac{t}{3}+o_0(t)$, posto $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{t}{3}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{t}{3}}=a+bt+o_0(t)$ si ottiene $\sqrt{3}+\frac{t}{3}+o_0(t)=(a+bt+o_0(t))(1-\frac{\sqrt{3}}{3}t+o_0(t))=a+(b-\frac{\sqrt{3}}{3}a)t+o_0(t)$, da cui $a=\sqrt{3}$ e $b-\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{1}{3}$ ovvero $b=\frac{4}{3}$. Tornando allo sviluppo iniziale, si ha dunque nuovamente $h(x)=-(\pi+t)(t+o_0(t))+(\sqrt{3}+\frac{4}{3}t+o_0(t))=-\pi t+o_0(t)+t^2+o_0(t^2)+\sqrt{3}+\frac{4}{3}t+o_0(t)=\sqrt{3}+(-\pi+\frac{4}{3})t+o_0(t)=\sqrt{3}+(-\pi+\frac{4}{3})(x-\pi)+o_\pi(x-\pi)$. • Essendo $h(x)-\sqrt{3}\sim_\pi(-\pi+\frac{4}{3})(x-\pi)$ e $1+\cos x\sim^\pi\frac{1}{2}(x-\pi)^2$, il limite $\lim_{x\to\pi\mp}\frac{h(x)-\sqrt{3}}{(1+\cos x)^\alpha}$ vale $\pm\infty$ per $\alpha>\frac{1}{2}$, vale $\pm\sqrt{2}(\pi-\frac{4}{3})$ per $\alpha=\frac{1}{2}$ e vale $0^\pm$ per $\alpha<\frac{1}{2}$; de l'Hôpital si può applicare solo nel caso $\alpha=\frac{1}{2}$, ma in questa situazione non è granché utile, anzi (provare per credere).

(b) (Figura 1) Come noto, il luogo geometrico ℓ dei punti del piano cartesiano equidistanti da un dato punto (fuoco) e da una data retta (direttrice) è una parabola; in questo caso l'equazione è $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\frac{|x+2y-2|}{\sqrt{5}}$, ovvero $4x^2-4xy+y^2-16x-12y+36=0$. Il disegno di ℓ mostra chiaramente che esso può essere espresso come grafico di una funzione $y=\phi(x)$ perlomeno nel tratto (inferiore) in cui si troverà il punto cercato di minima distanza dalla retta $x+y=1$: in effetti dall'equazione precedente si ricava $y=\phi(x)=2(x+3-\sqrt{10x})$, definita per $x\geq 0$. La distanza di un punto di tale tratto di ℓ dalla retta $x+y=1$ è $d(x)=\frac{|x+2(x+3-\sqrt{10x})-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(3x-2\sqrt{10x}+5)$: derivando si ottiene $d'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}})$, ed essendo $d'(x)\geq 0$ per $x\geq\frac{10}{9}$ si ha che il punto cercato di ℓ è quello del tratto considerato (grafico di $\phi(x)$) con $x=\frac{10}{9}$, ovvero $(\frac{10}{9},\frac{14}{9})$.

(c) (i) $\boxed{\phi(x)=\log\left|(\sqrt{2}\,|\cos x|-x)\right|}$ (Figura 2) Un confronto grafico tra $\sqrt{2}\,|\cos x|$ e x mostra chiaramente che esiste un punto $a\in]0,1[$ (in realtà a è molto vicino a 1) tale che il dominio di $\phi(x)$ è $\mathbb{R}\setminus\{a\}$; sempre il confronto grafico (stavolta tra $\sqrt{2}\,|\cos x|$ e $x\mp 1$) mostra che esistono altri due punti $b\in]0,a[$ e $c\in]1,\frac{\pi}{2}[$ tali che $\phi(x)\geq 0$ per $x\leq b$ e $x\geq c$. Si noti che $\phi(x)\sim_{\mp\infty}\log|x|$, dunque $\lim_{x\to\mp\infty}\phi(x)=+\infty$ con andamento logaritmico; un altro limite interessante è $\lim_{x\to a}\phi(x)=-\infty$. La funzione è $\mathcal{C}^\infty$ tranne che nei punti $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ in cui a priori è solo continua. Derivando per $x\neq x_k$ si ottiene $\phi'(x)=-\frac{\sqrt{2}\sigma\sin x+1}{\sqrt{2}\,|\cos x|-x}$, ove $\sigma:=\operatorname{sign}(\cos x)$. Nelle zone in cui $\cos x>0$ (ovvero $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, dove $\sigma=1$) si ha

$\phi'(x) = 0$ per $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, e $\phi'(x) > 0$ per $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (se $x < a$, ovvero per $k \leq 0$) oppure per $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (se $x > a$, ovvero per $k \geq 1$): dunque tali punti $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sono di massimo relativo per $k \leq 0$ e di minimo relativo per $k \geq 1$. Analogamente, nelle zone in cui $\cos x < 0$ (ovvero $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, dove $\sigma = -1$) si ha $\phi'(x) = 0$ per $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, e $\phi'(x) > 0$ per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ (se $x < a$, ovvero per $k \leq -1$) oppure per $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (se $x > a$, ovvero per $k \geq 0$): dunque tali punti $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ sono di massimo relativo per $k \leq -1$ e di minimo relativo per $k \geq 0$. I punti x_k sono dunque angolosi (infatti $\phi'_{\mp}(x_k) = \frac{\pm\sqrt{2}+1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$) e sono di minimo (risp. massimo) locale a seconda che $k \leq -1$ (risp. $k \geq 0$).

(ii) $\boxed{\psi(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{x^2-x}{|x|-2}}$ (Figura 3) Il dominio è dato da $x \neq \mp 2$; si ha $\psi(x) = 0$ per $x = 0, 1$, e $\psi(x) > 0$ per $x < -2$, $0 < x < 1$ oppure $x > 2$. La funzione è chiaramente limitata (infatti $|\psi| < \frac{\pi}{2}$). I limiti notevoli sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty} = \frac{\pi}{2}^-$, $\lim_{x\to-2^\mp} = \pm\frac{\pi}{2}^\mp$ e $\lim_{x\to 2^\mp} = \mp\frac{\pi}{2}^\pm$. La funzione è $\mathcal{C}^\infty$ tranne che in $x = 0$, dove a priori è solo continua; derivando per $x \neq 0$ si ha $\psi'(x) = \frac{1}{1+(\frac{x^2-x}{|x|-2})^2}\frac{(2x-1)(|x|-2)-(\mathrm{sign}\,x)(x^2-x)}{(|x|-2)^2} = \frac{x^2\mathrm{sign}\,x-4x+2}{(x^2-x)^2+(|x|-2)^2}$, e il confronto grafico tra $x^2\mathrm{sign}\,x$ e $4x-2$ mostra che esistono tre punti $a \in]-5,-4[$, $b \in]0,1[$ e $c \in]3,4[$ tali che $\psi'(x) = 0$ per $x = a, b, c$, e $\psi'(x) > 0$ per $a < x < -2$, $-2 < x < b$ e $x > c$, dunque a e c sono punti di minimo locale e b di massimo locale.

(iii) $\boxed{\eta(x) = \sqrt{\frac{x^3-x^2}{x-2}}}$ (Figura 4) Il dominio è dato da $x \leq 1$ oppure $x > 2$; la funzione è a priori solo continua nei punti in cui si annulla il radicando (ovvero in $x = 0$ e $x = 1$) e in cui si annulla anch'essa; negli altri punti del dominio è $\mathcal{C}^\infty$ e positiva. Vale $\lim_{x\to 2^+}\eta(x) = +\infty$; essendo $\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x-2}} \sim_{\mp\infty} |x|$ si ha $\lim_{x\to\mp\infty}\eta(x) = +\infty$, ed è assai probabile un asintoto obliquo da ambo i lati: in effetti vale $\lim_{x\to\mp\infty}(\eta(x) - |x|) = \lim_{x\to\mp\infty}|x|(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - 1) = \lim_{x\to\mp\infty}|x|(\sqrt{1+\frac{1}{x-2}} - 1) = \lim_{x\to\mp\infty}|x|(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x-2} + o_{\mp\infty}(\frac{1}{x}) - 1) = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{|x|}{2(x-2)} = \mp\frac{1}{2}$, e dunque $y = \mp(x+\frac{1}{2})$ è asintoto obliquo a $\mp\infty$. Derivando per $x \neq 0$ si ha $\eta'(x) = \frac{1}{2}\frac{x(2x^2-7x+4)}{(x-2)^2}(\frac{x^3-x^2}{x-2})^{-\frac{1}{2}}$, dunque nel dominio si ha $\eta'(x) = 0$ per $x = \frac{7-\sqrt{17}}{4} \sim 0{,}7$ e $x = \frac{7+\sqrt{17}}{4} \sim 2{,}8$; si ha poi $\eta'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{7-\sqrt{17}}{4}$ e $x > \frac{7+\sqrt{17}}{4}$. Pertanto $x = \frac{7-\sqrt{17}}{4}$ è di massimo locale, e $x = \frac{7+\sqrt{17}}{4}$ di minimo locale; si noti anche che $\lim_{x\to 0}\eta'(x) = \lim_{x\to 0^\mp}\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{sign}\,x)(2x^2-7x+4)}{(x-2)^2}(\frac{x-1}{x-2})^{-\frac{1}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$, dunque $x = 0$ è effettivamente un punto angoloso, di minimo.

2. (a) (i) $\boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\cos x} + x)|\sin x|\,dx}$ L'integrale può essere decomposto a seconda del segno di $\sin x$: poiché $\int(\sqrt{\cos x} + x)\sin x\,dx = -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + \sin x - x\cos x + k$, si ha $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\cos x} + x)|\sin x|\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\sqrt{\cos x} + x)(-\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\cos x} + x)\sin x\,dx = -(-\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + \sin x - x\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + (-\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + \sin x - x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(-\frac{2}{3}) + (-1) + (1) - (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$.

(ii) $\boxed{\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}\,dx}$ Usando il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$, ovvero $x = t^2$, da cui $dx = 2t\,dt$, si ottiene $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}\,dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t\,e^t}2t\,dt = 2\int_1^2(t^2+1)e^{-t}\,dt$. Integrando due volte per parti, si ottiene $\int(t^2+1)e^{-t}\,dt = (t^2+1)(-e^{-t}) - \int 2t(-e^{-t})\,dt = -(t^2+1)e^{-t} + 2\int te^{-t}\,dt = -(t^2+1)e^{-t} + 2(t(-e^{-t}) - \int 1(-e^{-t})\,dt) = -(t^2+1)e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + k = -(t^2+2t+3)e^{-t} + k$. Se ne ricava $\int_1^2(t^2+1)e^{-t}\,dt = (-(t^2+2t+3)e^{-t}]_1^2 = -11e^{-2} - (-6e^{-1}) = \frac{6e-11}{e^2}$. Pertanto il nostro integrale iniziale risulta $2\frac{6e-11}{e^2} \sim 1{,}4$.

(iii) $\boxed{\int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt[3]{\log x+2}}\,dx}$ Notiamo la presenza di x al denominatore, che richiama la derivata di $\log x$. Ponendo dunque $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\,dx$, si ricava $\int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt[3]{\log x+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt[3]{t+2}}\,dt$. Ponendo ulteriormente $u = t+2$, da cui $du = dt$, si ricava $\int_2^3 \frac{u-2}{\sqrt[3]{u}}\,du = \int_2^3 \frac{u-2}{\sqrt[3]{u}}\,du = \int_2^3(\sqrt[3]{u^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{u}})\,du = (\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} - 3u^{\frac{2}{3}}]_2^3 = (\frac{3}{5}\sqrt[3]{u^2}(u-5)]_2^3 = \frac{3}{5}(3\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4}) \sim 0{,}36$.

(iv) $\boxed{\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}\,dx}$ La funzione integranda $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ è definita e continua (in particolare, localmente integrabile) su ogni intervallo del tipo $]k\pi, \pi + k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$; notiamo però che nei punti del tipo $2k\pi$ il limite è finito e vale 0 (dunque la funzione è prolungabile per continuità in essi con tale valore), mentre in quelli del tipo $\pi + 2k\pi$ è infinito. Dunque l'integrale proposto ha senso quando $\alpha \in]-\pi, \pi[$ (ovviamente, per gli $\alpha \leq 0$ si intende di aver prima prolungato la funzione per continuità in $x = 0$, ponendola uguale a 0). Per il calcolo, posto $\alpha = 0$ possiamo procedere in due modi diversi. (1) Ricordando le formule di bisezione e duplicazione, posto $t = \frac{x}{2}$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,t\,dt = 2(-\log|\cos t|]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(-\log\frac{\sqrt{2}}{2}) = \log 2$. (2) Posto $u = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ (da cui $x = 2\mathrm{arctg}\,u$ e $dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$) e usando le formule parametriche $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ e

$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ si ottiene $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}\,du = (\log(1+u^2)]_0^1 = \log 2$.

(v) $\boxed{\int_\alpha^\pi \frac{\sin 2x\,\cos x}{1-\cos^3 x}\,dx}$ La funzione integranda $\frac{\sin 2x\,\cos x}{1-\cos^3 x}$ è definita e continua (in particolare, localmente integrabile) su ogni intervallo del tipo $]2k\pi, 2\pi+2k\pi[$ con $k\in\mathbb{Z}$, e negli estremi dell'intervallo ha limite infinito: dunque l'integrale proposto ha senso quando $\alpha \in]0,2\pi[$. Per il calcolo poniamo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e usiamo il cambio $\cos x = t$, da cui $-\sin x\,dx = dt$: essendo $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ si ricava $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin 2x\,\cos x}{1-\cos^3 x}\,dx = \int_0^{-1} \frac{2t^2}{1-t^3}\,(-dt) = \int_0^{-1} \frac{2t^2}{t^3-1}\,dt = (\frac{2}{3}\log|t^3-1|]_0^{-1} = \frac{2}{3}\log 2 \sim 0{,}46$.

(vi) $\boxed{\int_0^{-1} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}$ Calcoliamo l'integrale in due modi diversi. (1) Usando il cambio di variabile $x = \operatorname{tg} t$ si ha $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$; se $x=0$ si ha $t=0$, e se $x=-1$ si ha $t = -\frac{\pi}{4}$, dunque (essendo la funzione pari) si ricava $\int_0^{-1} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x}{(\cos^2 t+\sin^2 t)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt = (\frac{t+\sin t\cos t}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} = -(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}{2}) - (0) = -\frac{\pi+2}{8}$. (2) Il metodo di Hermite dice che esistono costanti $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ tali che $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + (\frac{Cx+D}{x^2+1})' = \frac{Ax^3+(B-C)x^2+(A-2D)x+(B+C)}{(x^2+1)^2}$, da cui si ricava $A = B-C = A-2D = 0$ e $B+C=1$, ovvero $A=D=0$ e $B=C=\frac{1}{2}$: perciò $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2+1} + (\frac{1}{x^2+1})')$, da cui $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}(\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{x^2+1}) = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1}) + k$. Dunque si ricava nuovamente $\int_0^{-1} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = (\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1})]_0^{-1} = -\frac{\pi+2}{8}$.

(b) (i) $\boxed{A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2(1-x)\le y\le 1+\cos^3 x\,,\ y\sin 2+2\sin x\ge 0\,,\ x\le\pi\}}$ (Figura 5) Notiamo che la funzione $\varphi(x) = 1+\cos^3 x$ ha periodo 2π, pari, positiva, e si annulla solo in $x=\pi$; la derivata è $\varphi'(x) = -3\sin x\cos^2 x$, dunque nel tratto $[0,\pi]$ la funzione decresce dal massimo 2 in $x=0$ al minimo 0 in $x=\pi$, e ha un flesso orizzontale in $x=\frac{\pi}{2}$. Il grafico di $\varphi(x)$ interseca la retta $y=2(1-x)$ in $x=0$, e quest'ultima interseca in $x=2$ la sinusoide $y = -\frac{2}{\sin 2}\sin x$, che a sua volta interseca il grafico di $\varphi(x)$ tra l'altro in $x=\pi$. Pertanto $\text{Area}(A) = \int_0^\pi (1+\cos^3 x)\,dx + \int_\pi^2 (-\frac{2}{\sin 2}\sin x)\,dx + \int_2^0 (2(1-x))\,dx = (x+\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x]_0^\pi - \frac{2}{\sin 2}(-\cos x]_\pi^2 + (2x-x^2]_2^0 = (\pi)-(0) - \frac{2}{\sin 2}((-\cos 2)-(1)) + (0)-(0) = \pi + 2\sin 2(1+\cos 2) \sim 4{,}2$.

(ii) $\boxed{B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \alpha|x|\le y\le\sqrt{\beta^2-x^2}\}}$ (Figura 6) Si tratta di un settore circolare; intersecando la retta $y=\alpha x$ con la semicirconferenza $y=\sqrt{\beta^2-x^2}$ si ottiene $x_{\alpha,\beta} := \beta/\sqrt{\alpha^2+1}$: dunque per simmetria vale $\text{Area}(B) = 2(\int_0^{x_{\alpha,\beta}} \sqrt{\beta^2-x^2}\,dx + \int_{x_{\alpha,\beta}}^0 \alpha x\,dx) = 2(\frac{1}{2}(\beta^2\arcsin\frac{x}{\beta} + x\sqrt{\beta^2-x^2}]_0^{x_{\alpha,\beta}} + \frac{\alpha}{2}(x^2]_{x_{\alpha,\beta}}^0) = (\beta^2\arcsin\frac{x}{\beta} + x\sqrt{\beta^2-x^2}]_0^{x_{\alpha,\beta}} + \alpha(x^2]_{x_{\alpha,\beta}}^0) = \beta^2\arcsin\frac{1}{\alpha^2+1}$. Si noti che, detto $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$ la misura in radianti della metà dell'angolo al vertice del settore C, si ha $\alpha = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\theta) = \operatorname{cotg}\theta$ e dunque $\frac{1}{\alpha^2+1} = \sin\theta$, da cui l'area trovata si scrive anche come $\beta^2\theta$, cosa già nota.

(iii) $\boxed{C = \{(x,y) : |x|-1\le y\le\sqrt{|x+y|}+1\,,\ x\le(y-1)^2\}}$ (Figura 7) La condizione $|x|-1\le y$ individua i punti che stanno sopra $y=|x|-1$, mentre $x\le(y-1)^2$ dà i punti a sinistra del grafico $x=(y-1)^2$ (parabola); infine la condizione $y\le\sqrt{|x+y|}+1$, ovvero $\sqrt{|x+y|}\ge y-1$, è sempre soddisfatta quando $y<1$, mentre per $y\ge 1$ equivale a $|x+y|\ge(y-1)^2$, ovvero $x+y\ge(y-1)^2$ (cioè $x\ge y^2-3y+1$, punti a destra della parabola) oppure $x+y\le-(y-1)^2$ (cioè $x\le -y^2+y-1$, punti a sinistra della parabola). L'insieme che ne risulta, come si può osservare, sembra essere meglio descrivibile tramite grafici di funzioni di y: fatti i calcoli dei punti di intersezione, si ha $\text{Area}(C) = \int_{-1}^0 (y+1)\,dy + \int_0^3 (y-1)^2\,dy + \int_3^4 (y+1)\,dy + \int_4^1 (y^2-3y+1)\,dy + \int_1^2 (-y^2+y-1)\,dy + \int_2^{-1} (-y-1)\,dy = (\frac{y^2}{2}+y]_{-1}^0 + (\frac{(y-1)^3}{3}]_0^3 + (\frac{y^2}{2}+y]_3^4 + (\frac{y^3}{3}-\frac{3y^2}{2}+y]_4^1 + (-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}-y]_1^2 + (-\frac{y^2}{2}-y]_2^{-1} = (0)-(-\frac{1}{2}) + (\frac{8}{3})-(-\frac{1}{3}) + (12)-(\frac{15}{2}) + (-\frac{1}{6})-(\frac{4}{3}) + (-\frac{8}{3})-(-\frac{5}{6}) + (\frac{1}{2})-(-4) = \frac{55}{6} \sim 9{,}2$.

3. (a) $[\sum \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt[3]{n^2-2n+2}}]$ Se $x=0$ la serie è nulla, dunque banalmente convergente. Se $x>0$ essa è a termini positivi: vale $a_n \sim^* \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2n+2}} \sim^* \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, dunque essa diverge a $+\infty$. Se $x<0$ essa è a termini negativi; poiché la sua opposta è $\sum(-\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt[3]{n^2-2n+2}}) = \sum \frac{\operatorname{arctg}(n(-x))}{\sqrt[3]{n^2-2n+2}}$, che come visto diverge a $+\infty$, essa diverge a $-\infty$.

(b) $[\sum(\frac{n+x}{2nx-1})^n]$ Criterio della radice: poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |\frac{n+x}{2nx-1}|$ tende a $\frac{1}{2|x|}$ (se $x\ne 0$) e a $+\infty$ (se $x=0$), ne deduciamo che la serie converge assolutamente quando $\frac{1}{2|x|}<1$ (ovvero per $|x|>\frac{1}{2}$) e non converge quando $\frac{1}{2|x|}>1$ (ovvero per $|x|<\frac{1}{2}$). Per $x=\frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum(\frac{2n+1}{2(n-1)})^n = \sum(1+\frac{3/2}{n-1})^n$, a termini positivi, che diverge a $+\infty$ perché il termine generale non è infinitesimo (tende a $e^{\frac{3}{2}}$); per $x=-\frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum(-\frac{2n-1}{2(n+1)})^n = \sum(-1)^n(1+\frac{-3/2}{n+1})^n$, che non converge per lo stesso motivo (infatti il suo valore assoluto tende a $e^{-\frac{3}{2}}$).

(c) $[\sum \frac{x^n n^x}{1+|x|^n}]$ Se $x=0$ la serie è nulla, e converge banalmente; per $x\ne 0$ iniziamo usando il criterio del rapporto. Si ha $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|(1+\frac{1}{n})^x\frac{1+|x|^n}{1+|x|^{n+1}}$: notiamo che $|x|(1+\frac{1}{n})^x$ tende sempre a $|x|$, mentre $\frac{1+|x|^n}{1+|x|^{n+1}}$ tende a

1 se $|x| \le 1$ e a $\frac{1}{|x|}$ se $|x| > 1$, dunque $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ tende a $|x|$ se $|x| \le 1$ e a 1 se $|x| > 1$. Possiamo dunque affermare che la serie converge assolutamente se $|x| < 1$, mentre restiamo ancora nel dubbio se $|x| \ge 1$. D'altra parte, se $|x| > 1$ si ha che $|a_n| = \frac{|x|^n n^x}{1+|x|^n} \sim n^x = \frac{1}{n^{-x}}$: dunque se $x \ge 1$ il termine $|a_n| = a_n$ non è infinitesimo, e la serie diverge a $+\infty$; invece se $x < -1$ si ha $-x > 1$, dunque la serie converge assolutamente (per asintoticità con la serie armonica). Resta da esaminare solo il caso $x = -1$, in cui si ottiene la serie di Leibniz $\sum \frac{(-1)^n n^{-1}}{1+|-1|^n} = \sum \frac{(-1)^n}{2n}$, che converge semplicemente ma non assolutamente. Ricapitolando, la serie converge assolutamente se $x < -1$ oppure $-1 < x < 1$; converge solo semplicemente se $x = -1$; e diverge a $+\infty$ se $x \ge 1$.

(d) [$\sum_{n\ge1} \frac{x^{2n+5}}{n\sqrt[3]{n}}$] Se $x = 0$ la serie è nulla, e converge banalmente; per $x \ne 0$ usiamo il criterio del rapporto. Si ha $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|^2(\frac{n}{n+1})^{\frac{4}{3}}$, che tende a $|x|^2$: dunque se $|x|^2 < 1$ (ovvero se $|x| < 1$) la serie converge assolutamente, se $|x|^2 > 1$ (ovvero se $|x| > 1$) la serie non converge (più precisamente, diverge a $+\infty$ se $x > 1$). Se infine $|x| = 1$ si ha $|a_n| = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, che converge: dunque la serie è assolutamente convergente anche per $x = \pm1$.

(e) [$\sum (\pi - 2\operatorname{arctg} n)^x$] Si tratta di una serie a termini positivi. La quantità positiva $\pi - 2\operatorname{arctg} n$ è infinitesima per $n \to +\infty$, ma infinitesima di che tipo? Usando de l'Hôpital, si calcola $\lim_{t\to+\infty} \frac{\pi-2\operatorname{arctg} t}{1/t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\frac{2}{1+t^2}}{-1/t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^2}{1+t^2} = 2$, dunque $\pi - 2\operatorname{arctg} t \sim^* \frac{1}{t}$: ne ricaviamo che $a_n \sim^* \frac{1}{n^x}$, pertanto la serie converge per $x > 1$ e diverge a $+\infty$ per $x \le 1$.

(f) [$\sum_{n\ge1} \frac{(3\sin x+1)^n}{\log(1+n)}$] Poniamo $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$ e $\beta = \arcsin \frac{2}{3}$. Se $3\sin x + 1 = 0$ (ovvero se $x = -\alpha + 2k\pi$ oppure $x = \pi + \alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) la serie è nulla, dunque banalmente convergente. Negli altri casi usiamo il criterio del rapporto: poiché $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ tende a $|3\sin x + 1|$, la serie converge assolutamente quando $|3\sin x + 1| < 1$ (ovvero quando $-\frac{2}{3} < \sin x < 0$, cioè per $-\pi+2k\pi < x < -\pi+\beta+2k\pi$ oppure $-\beta+2k\pi < x < 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) e non converge quando $|3\sin x + 1| > 1$ (ovvero quando $\sin x < -\frac{2}{3}$, cioè per $-\pi + \beta + 2k\pi < x < -\beta + 2k\pi$, oppure quando $\sin x > 0$, cioè per $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; e in quest'ultimo caso diverge a $+\infty$). Quando $\sin x = 0$ (ovvero per $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) la serie diventa $\sum_{n\ge1} \frac{1}{\log(1+n)}$, che diverge a $+\infty$ perché $\frac{1}{\log(1+n)} \sim \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$; infine, quando $\sin x = -\frac{2}{3}$ (ovvero per $x = -\pi + \beta + 2k\pi$ oppure $x = \beta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) la serie diventa $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)}$, che converge solo semplicemente in base al criterio di Leibniz.

(g) [$\sum_{n\ge2} \frac{(-1)^n}{n^p \log^q n}$] Si tratta di una serie a segno alterno in cui compaiono potenze di n e di $\log n$. Sarà il caso di ricordare che $\lim_{x\to+\infty} x^a \log^b x$ vale 0 per $a < 0$ e b qualunque, oppure per $a = 0$ e $b < 0$; vale 1 se $a = b = 0$; e vale $+\infty$ per $a = 0$ e $b > 0$, oppure per $a > 0$ e b qualunque.
Iniziamo studiando la convergenza assoluta, ovvero la convergenza della serie $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^p \log^q n}$ che generalizza $\sum \frac{1}{n \log n}$ (serie divergente, come già visto in precedenza). Col criterio di condensazione di Cauchy ci possiamo ridurre allo studio della serie $\sum 2^k a_{2^k} = \sum 2^k \frac{1}{(2^k)^p \log^q(2^k)} = \sum \frac{1}{(\log 2)^q} \frac{(2^{1-p})^k}{k^q}$, in cui il fattore positivo $\frac{1}{(\log 2)^q}$ non influenza il carattere. Posto allora $b_k = \frac{(2^{1-p})^k}{k^q}$, si ha $\frac{b_{k+1}}{b_k} = 2^{1-p}(\frac{k}{k+1})^q$, che per $k \to +\infty$ tende a 2^{1-p}: dunque se $2^{1-p} < 1$ (ovvero se $p > 1$) la serie $\sum b_k$ converge, mentre se $2^{1-p} > 1$ (ovvero se $p < 1$) la serie $\sum b_k$ diverge a $+\infty$. Infine, se $p = 1$ la serie $\sum b_k$ diventa $\sum \frac{1}{k^q}$, che converge se e solo se $q > 1$. Ricapitolando, la nostra serie di partenza converge assolutamente solo nei seguenti casi: (a) $p > 1$ e q qualunque; (b) $p = 1$ e $q > 1$.
Veniamo ora ai casi restanti. Se il termine generale $\frac{(-1)^n}{n^p \log^q n}$ non è infinitesimo, la serie non può convergere: ciò accade per $p < 0$ e q qualunque, oppure per $p = 0$ e $q \le 0$. In tutti gli altri casi (ovvero per $p = 0$ e $q > 0$, oppure per $0 < p < 1$ e q qualunque, oppure per $p = 1$ e $q \le 1$) si ha solo convergenza semplice per il criterio di Leibniz.

(h) [$\sum n^{2x} \sin(x^n)$, con $x \le 1$] Se $x = 1$ la serie è $(\sin 1) \sum n^2$, che diverge a $+\infty$. Se $|x| < 1$ vale $|\sin(x^n)| \sim |x|^n$, dunque $|a_n| \sim b_n = n^{2x}|x|^n$, che converge (infatti $\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n+1}{n})^{2x}|x|$ tende a $|x| < 1$). Infine, se $x \le -1$ la serie armonica $\sum n^{2x}$ converge, e si osservi che $|a_n| \le n^{2x}$. Pertanto se $x = 1$ la serie diverge a $+\infty$, mentre se $x < 1$ converge assolutamente.

4. (a) (i) L'equazione $\frac{z+1}{2-\bar{z}} = z$ ha senso quando $2 - \bar{z} \ne 0$, cioè $\bar{z} \ne 2$, cioè $z \ne 2$. Da $\frac{z+1}{2-\bar{z}} = z$ si ricava allora $z + 1 = z(2 - \bar{z})$, cioè $z - 1 = z\bar{z} = |z|^2$. Posto $z = x + iy$, ciò significa $(x - 1) + iy = x^2 + y^2$, ovvero il sistema $\begin{cases} x - 1 = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases}$: inserendo la seconda equazione nella prima si ottiene $x^2 - x + 1 = 0$, che non ha soluzioni reali. Dunque l'equazione è impossibile.

(ii) Usando la formula classica di risoluzione delle equazioni di secondo grado, da $3z^2 - 4(1 - i)z - 5 = 0$ si ottiene $z = \frac{2(1-i)\pm\sqrt{4(1-1-2i}+15}{3} = \frac{2(1-i)\pm\sqrt{15-8i}}{3}$. Le radici quadrate $x + iy$ di $15 - 8i$ devono soddisfare $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$, che dà le soluzioni $(x, y) = (\pm4, \mp1)$, dunque $x + iy = \pm(4 - i)$: si ottiene allora $z = \frac{2(1-i)\pm(4-i)}{3}$, da cui $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = -\frac{2+i}{3}$.

(iii) Una radice di $p(z) = 2z^5 - 3z^4 + z^3 + 9z^2 - 9z = 0$ è chiaramente $z_1 = 0$; inoltre, grazie al suggerimento, ne conosciamo altre due (il polinomio è reale) che sono $z_2 = \alpha := 1 - \sqrt{2}\,i$ e $z_3 = \overline{\alpha} = 1 + \sqrt{2}\,i$. Pertanto $p(z)$ è divisibile per $z(z-\alpha)(z-\overline{\alpha}) = z(z^2-2z+3)$, e la divisione dà in effetti $p(z) = z(z^2-2z+3)(2z^2+z-3)$, dunque le altre due radici sono date da $2z^2+z-3=0$, ovvero $z_4 = 1$ e $z_5 = -\frac{3}{2}$.

(b) (i) Il polinomio $\varphi(z) = z^4 - 2(2-i)z^3 - (1+3i)z^2 + \alpha$ ha derivata $\varphi'(z) = 4z^3 - 6(2-i)z^2 - 2(1+3i)z = z(4z^2 - 6(2-i)z - 2(1+3i))$. Come noto, l'equazione $\varphi(z) = 0$ ha soluzioni multiple se e solo se ha soluzioni comuni con l'equazione derivata $\varphi'(z) = 0$, e quest'ultima ha soluzioni $z = 0$ e $z = \frac{3(2-i)\pm\sqrt{35-12i}}{4} = \frac{3(2-i)\pm(6-i)}{4}$, ovvero $z = 0$, $z = 3-i$ e $z = -\frac{i}{2}$. Si ha $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(3-i) = 2(7+i)+\alpha$ e $\varphi(-\frac{i}{2}) = -\frac{3}{16} + i + \alpha$: pertanto le soluzioni multiple si hanno per $\alpha = 0$, $\alpha = -2(7+i)$ oppure $\alpha = \frac{3}{16} - i$. • Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $t \in \mathbb{R}$ una soluzione reale: si ha allora $t^4 - 2(2-i)t^3 - (1+3i)t^2 + \alpha = (t^4 - 4t^3 - t^2 + \alpha) + i(2t^3 - 3t^2) = 0$, da cui $\begin{cases} t^4 - 4t^3 - t^2 + \alpha = 0 \\ 2t^3 - 3t^2 = 0 \end{cases}$. La seconda equazione ha soluzioni $t = 0$ e $t = \frac{3}{2}$, che risolvono la prima per $\alpha = 0$ o $\alpha = \frac{171}{16}$.

(ii) Se $x \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x) = 2x^6 - 4x^3 + k$ ha derivata $f'(x) = 12x^2(x^3-1)$: essendo $f'(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$, e $f'(x) > 0$ per $x > 1$, la funzione $f(x)$ ha minimo assoluto $f(1) = k-2$ in $x = 1$. Pertanto, in base al Teorema degli Zeri, si hanno soluzioni reali se e solo se $k - 2 \le 0$, ovvero per $k \le 2$. • Da $f(z) = 2z^6 - 4z^3 + k = 0$ si trova $z^3 = \frac{2\pm\sqrt{4-2k}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-\frac{k}{2}}$, e si distinguono tre casi. (a) Se $k = 2$ si ottiene la condizione doppia $z^3 = 1$, dunque l'equazione ha le tre radici cubiche di 1 come soluzioni doppie (delle quali una è reale, cioè $z = 1$, e due sono non reali coniugate, cioè $z = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$). (b) Se $k < 2$ il discriminante è > 0, e le sei soluzioni z saranno le radici cubiche dei due numeri reali $1 \pm \sqrt{1-\frac{k}{2}}$ (dunque vi saranno sei soluzioni distinte, delle quali due soluzioni reali, e quattro non reali a due a due coniugate). (c) Se invece $k > 2$ il discriminante è < 0, e le sei soluzioni z saranno le radici cubiche dei due numeri complessi coniugati $1 \pm i\sqrt{\frac{k}{2}-1}$ (dunque vi saranno ancora sei soluzioni distinte, tutte non reali a due a due coniugate).

(iii) Poiché il polinomio $g(z)$ ha coefficienti reali e grado dispari, già sappiamo in partenza che le sue soluzioni saranno o tutte e tre reali, oppure una reale e due non reali e coniugate fra loro. Cerchiamo ora di capire quale di queste due possibilità si verifica al variare di $a \in \mathbb{R}$. • Se x è una variabile reale, la funzione reale $g(x) = x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 1$ è una cubica che tende a $\mp\infty$ quando x tende a $\mp\infty$, e vale $g(0) = 1$: il Teorema degli Zeri ci dice allora che l'equazione $g(x) = 0$ avrà senz'altro una soluzione reale negativa. La derivata $g'(x) = 3(x^2 - 4ax + 3a^2)$ ha discriminante $\Delta = 12a^2$: se $a = 0$ si ha $g'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tranne che per $x = 0$ in cui si annulla, dunque $g(x) = x^3 + 1$ è strettamente crescente, e perciò $g(x) = 0$ ha come sola soluzione reale quella citata in precedenza; se invece $a \neq 0$ si ha $\Delta > 0$, da cui $g'(x) \ge 0$ per valori esterni a $x = a$ e $x = 3a$, e la situazione richiede più attenzione. Iniziamo col notare che $g(3a) \equiv 1 > 0$, e che $g(a) = 4a^3 + 1 \ge 0$ per $a \ge -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Se $a > 0$, la funzione $g(x)$ avrà un massimo relativo in $x = a$ e un minimo relativo in $x = 3a$: poiché tali estremi relativi sono entrambi > 0, l'equazione $g(x) = 0$ non avrà soluzioni reali oltre a quella già citata. Se invece $a < 0$, la funzione $g(x)$ avrà un massimo relativo in $x = 3a$ e un minimo relativo in $x = a$: pertanto se $a < -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ l'equazione $g(x) = 0$ avrà tre soluzioni reali negative ξ, η, ζ con $\zeta < 3a < \eta < a < \xi < 0$ (sempre in base al Teorema degli Zeri, ricordando che $a < 0$ e che $g(0) = 1 > 0$); se $a = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ si avrà $\zeta < 3a < \eta = a = \xi < 0$, con la soluzione reale $\xi = \eta = a$ di molteplicità 2; infine, se $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a < 0$ gli estremi relativi sono entrambi nuovamente > 0, così non vi saranno altre soluzioni reali oltre a quella già citata. Ricapitolando, l'equazione $g(z) = 0$: (a) per $a < -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ha tre soluzioni reali distinte ξ, η, ζ con $\zeta < 3a < \eta < a < \xi < 0$; (b) per $a = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ha due soluzioni reali negative distinte ξ, ζ con $\zeta < 3a < \xi = a < 0$ e $\xi = a$ soluzione doppia; (c) per $a > -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ha una sola soluzione reale $\zeta < 0$.

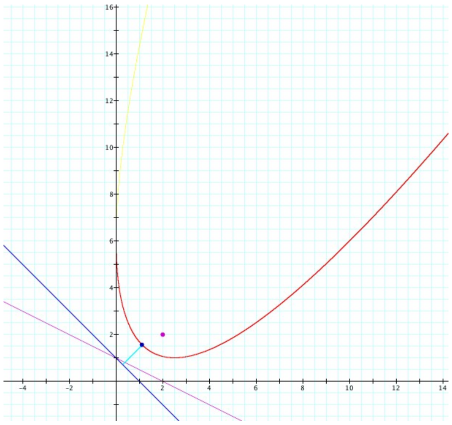
(c) (i) Usando il binomio di Newton si trova $g(w) = i\overline{w}^4 = i(3-2i)^4 = i(3^4 + 4(3)^3(-2i) + 6(3)^2(-2i)^2 + 4(3)(-2i)^3 + (-2i)^4) = i(81 - 216i - 216 + 96i + 16) = 120 - 119i = 169\,e^{i\theta}$ con $\cos\theta = \frac{120}{169}$ e $\sin\theta = -\frac{119}{169}$, dunque ad esempio $\theta = -\arcsin\frac{119}{169}$; alternativamente, ricorrendo alla forma trigonometrica, si ha $w = 3 + 2i = \sqrt{13}(\frac{3}{\sqrt{13}} + i\frac{2}{\sqrt{13}}) = \sqrt{13}e^{i\psi}$ con $\psi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$: pertanto $g(w) = i\overline{w}^4 = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (\sqrt{13})^4 e^{-4i\psi} = 169\,e^{i(\frac{\pi}{2} - 4\psi)}$. [2] • Si ha $g^{-1}(-i) = \{z \in \mathbb{C} : g(z) = -i\} = \{z \in \mathbb{C} : i\overline{z}^4 = -i\} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z}^4 = -1\} = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = -1\}$, dunque la fibra è costituita dalle radici quarte di $-1 = e^{i\pi}$, che sono $e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ per $k = 0,1,2,3$, da cui $g^{-1}(-i) = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\}$. Analogamente, si ha $g^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} : g(z) = w\} = \{z \in \mathbb{C} : i\overline{z}^4 = w\} = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z}^4 = -iw = 2 - 3i\} = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = 2 + 3i\}$: la fibra è costituita dalle radici quarte di $2 + 3i = \sqrt{13}\,e^{i\varphi}$ (con $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$), ovvero $g^{-1}(w) = \{\sqrt[8]{13}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{4}} : k = 0,1,2,3\}$.

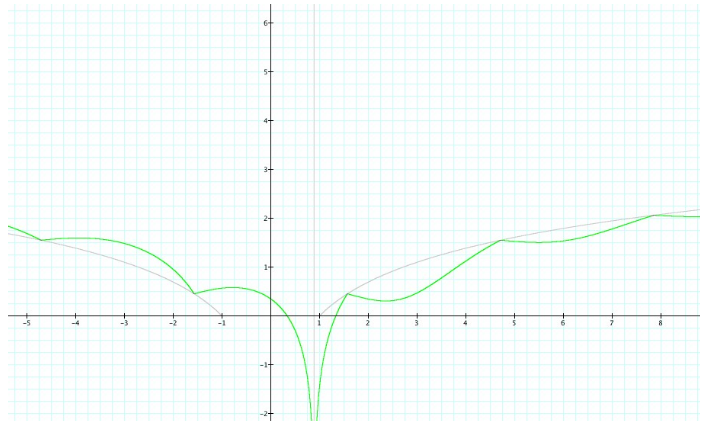
[2] Si noti che, confrontando le due espressioni trovate, si ha $\theta = \frac{\pi}{2} - 4\psi + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: in effetti, calcolando il seno di ambo i membri si ha $-\frac{119}{169} = \sin(\frac{\pi}{2} - 4\psi) = \cos(4\psi) = 1 - 2\sin^2(2\psi) = 1 - 8\sin^2(\psi)\cos^2(\psi) = 1 - 8(\frac{2}{\sqrt{13}})^2(1 - (\frac{2}{\sqrt{13}})^2) = 1 - 8\frac{4}{13}\frac{9}{13} = 1 - \frac{288}{169} = -\frac{119}{169}$.

(ii) L'equazione ha senso per $3i+2z \neq 0$, ovvero $z \neq -\frac{3}{2}i$. Posto $w = \frac{2-z}{3i+2z}$ si ha $g(w) = i\overline{w}^4 = 16i$, da cui $\overline{w}^4 = 16$, ovvero $w^4 = 16$: poiché le radici quarte di 16 sono ± 2 e $\pm 2i$, l'equazione si decompone nelle quattro equazioni $w = \pm 2$ e $w = \pm 2i$. (a) Da $\frac{2-z}{3i+2z} = 2$ si ottiene $2 - z = 6i + 4z$, da cui $z = \frac{2}{5}(1-3i)$. (b) Da $\frac{2-z}{3i+2z} = -2$ si ottiene $2-z = -6i-4z$, da cui $z = -\frac{2}{3}(1+3i)$. (c) Da $\frac{2-z}{3i+2z} = 2i$ si ottiene $2-z = -6+4iz$, da cui $z = \frac{8}{1+4i} = \frac{8}{17}(1-4i)$. (c) Infine, da $\frac{2-z}{3i+2z} = -2i$ si ottiene $2-z = 6-4iz$, da cui $z = \frac{-4}{1-4i} = -\frac{4}{17}(1+4i)$. Si hanno dunque le quattro soluzioni accettabili $\frac{2}{5}(1-3i)$, $-\frac{2}{3}(1+3i)$, $\frac{8}{17}(1-4i)$ e $-\frac{4}{17}(1+4i)$.

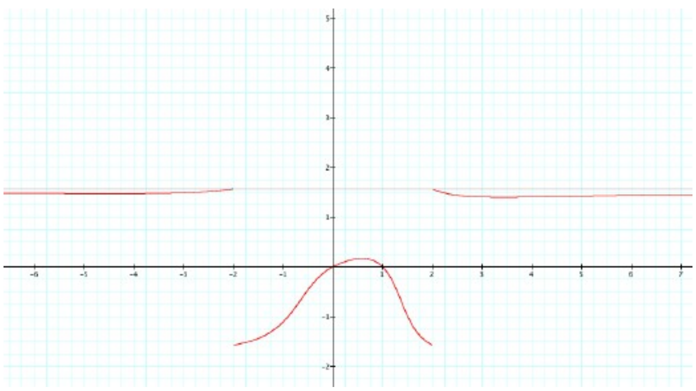
(iii) Nel piano di Gauss, $A = \{z : |z| < 2, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ è costituito dai numeri che distano meno di 2 da 0 e che hanno parte immaginaria ≥ 0 (si tratta del semidisco superiore di centro 0 e raggio 2, circonferenza esclusa e diametro incluso), mentre $B = \{z : \operatorname{Im} z > \sqrt{3}|\operatorname{Re} z|\}$ è lo spicchio convesso di piano compreso tra le semirette (escluse) $y = \sqrt{3}\,x$ e $y = -\sqrt{3}\,x$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z > 0$. • In generale, l'uguaglianza $g(z_1) = g(z_2)$ equivale a $i\overline{z_1}^4 = i\overline{z_2}^4$, da cui $\overline{z_1}^4 = \overline{z_2}^4$, da cui $z_1^4 = z_2^4$, ovvero z_1 e z_2 sono radici quarte del medesimo numero: come sappiamo, ciò accade se e solo se $|z_1| = |z_2|$ e gli argomenti di z_1 e z_2 differiscono per multipli dell'angolo retto $\frac{\pi}{2}$. Nell'insieme A ciò può evidentemente succedere (ad esempio $z_1 = 1+i$ e $z_1 = -1+i$ stanno in A, e $g(z_1) = g(z_2) = -16i$); invece nell'insieme B ciò è impossibile (è uno spicchio centrato in 0 e di ampiezza $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$). Dunque solo la restrizione di g a B è iniettiva: notando che in forma trigonometrica si ha $B = \{r\,e^{i\theta} : r > 0, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$, l'immagine di B è $g(B) = \{g(z) : z \in B\} = \{i(\overline{re^{i\theta}})^4 : r > 0, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}\} = \{e^{i\frac{\pi}{2}} r^4 e^{-4i\theta} : r > 0, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}\} = \{r^4 e^{i(\frac{\pi}{2} - 4\theta)} : r > 0, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$; posto $\rho = r^4$ e $\psi = \frac{\pi}{2} - 4\theta$, da $r > 0$ e $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ si ha $\rho > 0$ e $-\frac{13\pi}{6} < \psi < -\frac{5\pi}{6}$, dunque $g(B) = \{\rho e^{i\psi} : \rho > 0, -\frac{13\pi}{6} < \psi < -\frac{5\pi}{6}\} = \{\rho e^{i\psi} : \rho > 0, -\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{7}{6}\}$: si tratta dello spicchio concavo di piano sopra le semirette (escluse) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x$ con $y = \operatorname{Im} z < 0$. Posto $C = g(B)$, la funzione inversa $g^{-1} : C \to B$ si ricava come al solito: dato $w \in C$, si cerca l'unica soluzione $z \in B$ dell'equazione $g(z) = w$. In dettaglio, se $z = r\,e^{i\theta}$ e $w = \rho\,e^{i\psi} \in C$ con $-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{7\pi}{6}$, da $g(z) = w$ si ricava $r^4 e^{i(\frac{\pi}{2} - 4\theta)} = \rho e^{i\psi}$, da cui $r^4 = \rho$ e $\frac{\pi}{2} - 4\theta = \psi + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: si ricava perciò $r = \sqrt[4]{\rho}$ e $\theta = \frac{\frac{\pi}{2} - \psi + 2k\pi}{4}$. Essendo $-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{7\pi}{6}$ si ha $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$: per entrare in B l'unica possibilità è di scegliere $k = 1$. Pertanto, se $w = \rho\,e^{i\psi} \in C$ con $-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{7\pi}{6}$ si ha $z = g^{-1}(w) = \sqrt[4]{\rho}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{2} - \psi + 2\pi}{4}} = \sqrt[4]{\rho}\,e^{i\frac{5\pi - 2\psi}{8}}$.

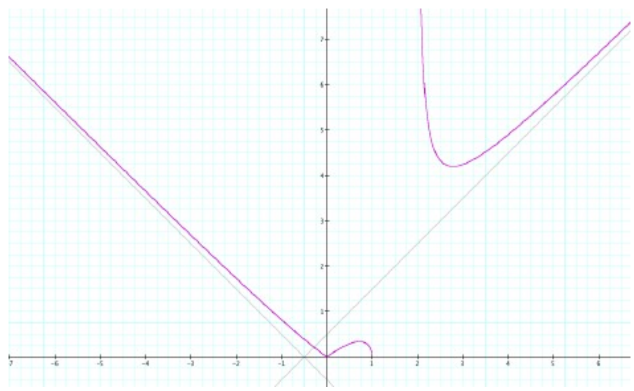
(iv) In forma trigonometrica, la semiretta $s = \{t(i\sqrt{3} - 1) : t > 0\}$ si scrive $s = \{r\,e^{i\frac{2\pi}{3}} : r > 0\}$. L'immagine di s è $g(s) = \{g(z) : z \in s\} = \{i(\overline{r\,e^{i\frac{2\pi}{3}}})^4 : r > 0\} = \{e^{i\frac{\pi}{2}}\,r^4\,e^{-i\frac{8\pi}{3}} : r > 0\} = \{\rho\,e^{-i\frac{13\pi}{6}} : \rho > 0\} = \{\rho\,e^{-i\frac{\pi}{6}} : \rho > 0\}$: dunque $g(s)$ è la semiretta $\{t(\sqrt{3} - i) : t > 0\}$. Quanto all'antiimmagine $g^{-1}(s) = \{z \in \mathbb{C} : g(z) \in s\}$, notiamo che 0 non vi appartiene (infatti $g(0) = 0 \notin s$); possiamo dunque porre $z = r\,e^{i\theta}$. La condizione "$g(z) \in s$" diventa $i(\overline{r\,e^{i\theta}})^4 = e^{i\frac{\pi}{2}} r^4 e^{-4i\theta} = r^4\,e^{i(\frac{\pi}{2} - 4\theta)} \in s$, ovvero $r > 0$ libero e $\frac{\pi}{2} - 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. La condizione è perciò $\theta = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: per evitare ripetizioni, si ha dunque $\theta_1 = -\frac{\pi}{24}$, $\theta_2 = \frac{11\pi}{24}$, $\theta_3 = \frac{23\pi}{24}$ e $\theta_4 = \frac{35\pi}{24}$. L'antiimmagine $g^{-1}(s)$ è dunque formata dall'unione delle quattro semirette (poste a distanza di angoli retti l'una dall'altra) di argomenti θ_j per $j = 1, 2, 3, 4$.



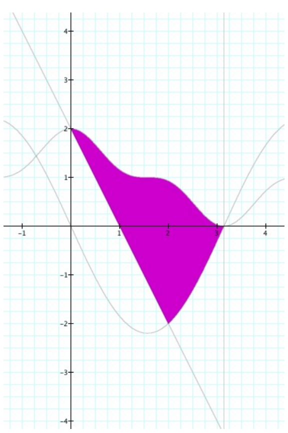


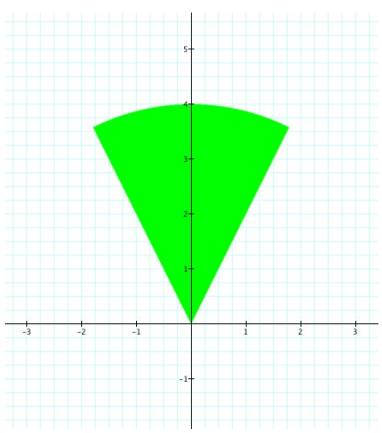
(1) Il luogo ℓ (parabola) dell'Ex. (2.b); in rosso il tratto che è grafico di $\phi(x)$, in blu il punto di minima distanza dalla retta $x+y=1$ (blu). **(2)** La funzione $\phi(x) = \log\left|(\sqrt{2}\,|\cos x| - x)\right|$ dell'Ex. (1.c).

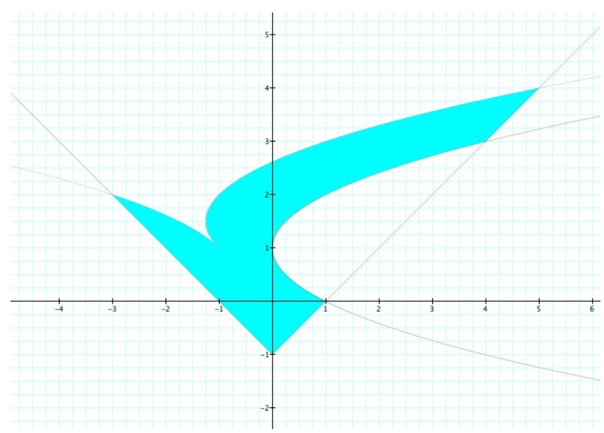




(3) La funzione $\psi(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2-x}{|x|-2}$ dell'Ex. (1.c). **(4)** La funzione $\eta(x) = \sqrt{\frac{x^3-x^2}{x-2}}$ dell'Ex. (1.c).







Gli insiemi dell'Ex. 2: **(5)** $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2(1-x) \le y \le 1 + \cos^3 x\,,\ y \sin 2 + 2 \sin x \ge 0\,,\ x \le \pi\}$ **(6)** $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha|x| \le y \le \sqrt{\beta^2 - x^2}\}$ **(7)** $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 1 \le y \le \sqrt{|x+y|} + 1\,,\ x \le (y-1)^2\}$.