Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Programma del corso – Modalità dell'esame orale

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11
Docente: Corrado Marastoni

(Versione finale del 06/12/2010)

• **Programma del corso.** Le sigle [a], [b] e [c] sono per l'esame orale di teoria (vedi più sotto), e vanno intese come riferite a tutto ciò che è contenuto nella frase tra i due punti in cui esse appaiono. Per il contenuto preciso delle nozioni richieste si fa comunque riferimento alle note pubblicate nella pagina web del corso `http://www.math.unipd.it/~maraston/Analisi1`, note di cui il seguente programma rappresenta un elenco degli argomenti e risultati trattati.

<u>Preliminari e teoria degli insiemi</u>. Geometria analitica piana. Trigonometria. Proprietà di base delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi, trigonometriche e inverse) e risoluzione di equazioni e disequazioni. Teoria elementare degli insiemi (rappresentazione, relazioni e operazioni; insieme delle parti; prodotto cartesiano; cenni alla cardinalità etc.). Relazioni: equivalenze e ordini. Funzioni e relative nozioni ((co)dominio, (anti)immagine, composizione, iniettività e suriettività, fibra, etc.); metodo della fibra per il calcolo di immagini e antiimmagini. Cenni di logica matematica e strutture algebriche fondamentali (gruppo, anello, corpo). Induzione matematica.

<u>Numeri reali</u>. I numeri reali $\mathbb{R}$ come corpo commutativo totalmente ordinato e completo: assioma di completezza [a]. Intervalli [a]. Limitatezza [a]. Massimo e minimo [a]. Estremo superiore e inferiore, loro esistenza e proprietà caratteristiche [a]. Classi contigue, unicità dell'elemento separatore [b]. Archimedeità dei reali [c]. Densità dei razionali e degli irrazionali nei reali [c].

<u>Topologia della retta reale estesa</u>. Intervalli aperti di $\mathbb{R}$; palle aperte e chiuse in $\mathbb{R}$ [a]. Sottoinsiemi aperti, chiusi, compatti di $\mathbb{R}$ [a]. Un sottoinsieme è aperto se e solo se contiene una palla centrata in ogni suo punto [a]. Ogni chiuso non vuoto superiormente/inferiormente limitato ammette massimo/minimo [a]. Intorni e base di intorni di un punto [a]. Proprietà della famiglia degli aperti, dei chiusi, degli intorni di un punto rispetto a unione e intersezione [b]. Punto interno, di chiusura, di accumulazione, isolato, di frontiera [b]. L'interno di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è il più grande aperto di $\mathbb{R}$ contenuto nel sottoinsieme; la chiusura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è il più piccolo chiuso di $\mathbb{R}$ contenente il sottoinsieme [c]. Estremo superiore e inferiore sono punti di chiusura [b]. La retta reale estesa $\widetilde{\mathbb{R}}$: intorni e base di intorni per $\mp\infty$ [a]. $\widetilde{\mathbb{R}}$ è uno spazio separato [b]. Estensione a $\widetilde{\mathbb{R}}$ delle nozioni di punto interno, di chiusura etc. [b]. Cenni alla nozione generale di spazio topologico.

<u>Successioni di numeri reali</u>. Limite di una successione, formulazioni equivalenti [a]. Successioni convergenti e divergenti, successioni infinitesime [a]. Unicità del limite [a]. Sottosuccessioni e loro comportamento rispetto al limite [a]. Successioni limitate [b]. Successioni convergenti sono limitate [c]. Permanenza del segno, confronto, carabinieri (due per il caso finito, unico per quello infinito) [b]. Limiti e operazioni [b]. Successioni monotone [b]. Ogni successione monotona ha limite; una successione monotona e limitata è convergente [b]. Ogni successione ammette una sottosuccessione monotona *(no dim)*; ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente [b]. L'esponenziale naturale: definizione come limite di successione e sue proprietà principali (positività; reciproco; proprietà di omomorfismo; disuguaglianza fondamentale; stretta crescenza) [c]. Logaritmo e potenza si possono definire a partire dall'esponenziale naturale; loro proprietà principali [c]. Successioni e topologia: punti di chiusura, punti di accumulazione [c]. Compattezza e compattezza sequenziale [c]. Limiti di successioni in forma indeterminata: criterio del rapporto e altre tecniche di calcolo.

<u>Funzioni reali di una variabile reale: limiti e continuità</u>. Generalità sulle funzioni reali di una variabile reale (operazioni; ordine; dominio; grafico; calcolo di (anti)immagini; parità; periodicità; crescenza ed estremi; limitatezza; riflessioni, traslazioni, omotetìe; etc.). Nozione di limite, e formulazioni equivalenti (nei casi particolari, e con l'uso delle successioni) [a]. Unicità del limite [a]. Limite delle restrizioni; limiti destro e sinistro [b]. Limiti delle funzioni monotone [b]. Permanenza del segno, confronto, carabinieri [b]. Limiti e operazioni [b]. Cambio di variabile nei limiti [c]. Funzione continua in un punto, formulazioni equivalenti [a]. Continuità delle funzioni elementari [b]. Funzioni continue in un punto: continuità e operazioni [b]. Funzioni continue in un punto: permanenza del segno [b]. Limite di funzioni composte e composizione di funzioni continue [b]. Restrizioni di funzioni continue [b]. Funzioni continue in tutto il loro dominio: antiimmagini di aperti/chiusi sono aperti/chiusi nella topologia relativa del dominio; aperti

e chiusi del dominio definiti da equazioni e/o disequazioni; principio di identità [c]. Immagini continue di intervalli sono intervalli; teorema degli zeri (o "di tutti i valori") [c]. Una funzione monotona su un intervallo è continua se e solo se la sua immagine è un intervallo [c]. Immagini continue di compatti sono compatti; teorema di Weierstrass [c]. Funzioni lipschitziane; una funzione lipschitziana è continua [b]. Tipi di discontinuità, estensione per continuità [b]. Omeomorfismo [b]. Una funzione continua su un intervallo è iniettiva se e solo se è strettamente monotona, e in tal caso induce un omeomorfismo con l'immagine [c]. Limiti in forma indeterminata: risoluzione di alcuni casi classici. Funzioni iperboliche $\cosh x$ e $\sinh x$, e loro inverse. Comportamento locale: relazioni di trascurabilità ("*o piccolo*") e asintoticità, criteri di verifica [a]. Rapporti di trascurabilità e asintoticità con le composizioni [b]. Sostituzione di un fattore asintotico e eliminazione di un addendo trascurabile nel calcolo dei limiti [a]. Sviluppo asintotico rispetto a una scala di confronto, applicazioni al calcolo dei limiti [c].

<u>Funzioni reali di una variabile reale: derivazione e studio dell'andamento</u>. Funzione derivabile in un punto [a]. Derivata sinistra e destra [a]. Funzione derivata [a]. Derivabilità implica continuità [a]. Derivate e parità [b]. Derivate delle funzioni elementari [b]. Regole di derivazione: linearità, prodotto (Leibniz), quoziente e reciproco, composizione (regola della catena), funzione inversa [b]. Retta tangente e perpendicolare al grafico. Diffeomorfismo [b]. Derivata ed estremi locali [b]. Teorema di Rolle [b]. Teorema di Lagrange (del valor medio) [b]. Teorema di Cauchy (degli incrementi finiti) [c]. Derivata e costanza [c]. Derivata e monotonia locale [b]. Derivata e monotonia globale [b]. Problemi di massimo e minimo. Regola di de l'Hôpital *(no dim)* [b]. Limite della derivata e derivabilità [c]. Funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ e $\mathcal{C}^\infty$ [b]. Formula di Taylor con resto di Peano [c]. Formula di Taylor con resto di Lagrange. Natura di un punto stazionario e derivate successive [c]. Serie di Taylor e funzioni analitiche. Asintoto in un punto: nozione generale e casi particolari [c]. Derivata seconda, convessità e flessi [c]. Studio dell'andamento grafico di una funzione.

<u>Funzioni reali di una variabile reale: integrazione</u>. Primitive, integrale indefinito [a]. Integrale di una funzione $\mathcal{C}^k$ su un intervallo [a]. Integrali immediati [a]. Linearità dell'integrale indefinito [a]. Metodi di integrazione indefinita per sostituzione e per parti [a]. Integrazione di funzioni razionali fratte: casi col denominatore con grado alpiù 2. Integrazione di funzioni razionali fratte: caso generale (metodo di Hermite); integrali binomi. Funzione caratteristica [b]. Funzioni semplici (o a scalino) [b]. Supporto di una funzione [b]. Integrale di funzioni semplici a supporto compatto e sue proprietà [b]. Somma superiore e inferiore [b]. Funzione integrabile, e suo integrale [b]. Integrale di funzioni che differiscono su un numero finito di punti [c]. Integrabilità implica limitatezza e supporto compatto [b]. Proprietà dell'integrale [b]. Funzione integrabile su un intervallo [b]. Integrale su un intervallo, e sue proprietà [b]. Funzione localmente integrabile [b]. Le funzioni con alpiù discontinuità di salto sono localmente integrabili *(no dim)*; le funzioni monotone e le funzioni continue sono localmente integrabili [c]. Integrale orientato [b]. Funzione integrale di una funzione localmente integrabile [b]. Continuità della funzione integrale [b]. Derivabilità della funzione integrale di una funzione continue (teorema di Torricelli) [c]. Teorema della media integrale [c]. Ogni funzione continua su un intervallo ammette primitive [c]. Teorema fondamentale del calcolo [c]. Metodi di integrazione definita per sostituzione e per parti. Formula di Taylor con resto integrale. Misura positiva su un insieme; misura di Lebesgue nella retta e nel piano. Sottoinsiemi quadrabili del piano, e loro area. Trapezoide di una funzione localmente integrabile, e sua relazione con l'integrale. Area di sottoinsiemi del piano delimitati da grafici di funzioni.

<u>Serie numeriche reali</u>. Serie numeriche, ridotte [a]. Serie convergente e sua somma [a]. Serie divergente, serie indeterminata [a]. Serie geometrica, serie armonica [a]. Il termine generale di una serie convergente è infinitesimo [a]. Definitività del carattere di una serie [b]. Linearità della somma di una serie convergente [b]. Carattere determinato di una serie a termini positivi [b]. Criteri del confronto e di asintoticità [b]. Criterio di condensazione di Cauchy. Assoluta convergenza implica convergenza [b]. Criteri del rapporto e della radice [c]. Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno [c].

<u>Numeri complessi</u>. Il corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi: operazioni e loro visualizzazione sul piano di Gauss [a]. I numeri reali $\mathbb{R}$ come sottocorpo di $\mathbb{C}$ [a]. Forma algebrica, parte reale e immaginaria [a]. Coniugato, modulo [a]. Reciproco [a]. Radici quadrate [b]. Forma polare e trigonometrica [a]. Il sottogruppo moltiplicativo dei numeri complessi unitari [b]. Formule di de Moivre per le potenze intere e le radici [b]. Esponenziale, logaritmo e potenze nel campo complesso. Equazioni algebriche nel campo complesso: teorema fondamentale dell'algebra *(no dim)*, soluzioni di equazioni a coefficienti reali [c].

• Modalità dell'esame orale.

— La prova orale, facoltativa, si può sostenere solo dopo aver superato la prova scritta (con voto $S \geq 18$), e *solo nella sessione in cui si è superato lo scritto*, ovvero: • uno studente che supera lo scritto in uno dei due appelli invernali di dicembre 2010 e gennaio 2011 potrà sostenere l'orale solo entro l'ultimo appello di gennaio 2011; • uno studente che supera lo scritto nell'appello di luglio 2011 potrà sostenere solo l'orale che verrà tenuto subito dopo lo scritto; • uno studente che supera lo scritto in uno dei due appelli di agosto-settembre 2011 potrà sostenere l'orale solo entro l'ultimo appello di settembre 2011.

— **Se non si sostiene l'orale.** Rinunciando all'orale, il voto finale F dell'esame sarà il minimo tra S e 21 (ventuno).

— **Se si sostiene l'orale.** Gli studenti che avranno iniziato a sostenere la prova orale perderanno il diritto a registrare il voto dello scritto secondo la modalità precedente: il voto finale F uscirà da una valutazione complessiva delle prove scritta e orale. Lo studente che decide di sostenere la prova orale è invitato nel suo interesse, oltre che a presentarsi con una preparazione adeguata (l'orale non è affatto una formalità ma un vero esame, per certi versi più impegnativo e imprevedibile dello scritto), anche a tener presente i seguenti punti.

- Il voto finale F sarà al massimo $S + 3$, intendendo $30L$ come 31 (eccezione: se $S = 26$ può essere $F \leq 30$) ma non vi sono limiti per il minimo: lo studente potrebbe avere un voto F molto ridotto rispetto a S, o venir invitato a ripetere la prova orale con voto S ribassato, o addirittura venir invitato a ripetere la prova scritta (voto S annullato). In caso di rifiuto da parte dello studente del voto finale F, il docente si riserva la possibilità di decidere se annullare l'intera prova d'esame sostenuta (che in tal caso andrà ripetuta da capo, a partire dallo scritto) o se proporre allo studente di ripetere la sola prova orale, eventualmente con un voto S ribassato.
- La prova orale di teoria potrà essere svolta secondo tre modalità (ma si ricordi che sarà comunque $F \leq S + 3$ a parte l'eccezione). Dei vari argomenti che lo studente dovrà preparare per la prova (proposizioni, formule, definizioni equivalenti etc.) potranno venir chieste anche le dimostrazioni, tranne il caso in cui sia specificato altrimenti (scrivendo "*(no dim)*").

  * Prova orale ridotta (voto finale $F \leq 24$): una domanda su argomenti di tipo [a].
  * Prova orale intermedia (voto finale $F \leq 27$): due domande, di cui una su argomenti di tipo [a] e una di tipo [b].
  * Prova orale completa (voto finale $F \leq 30L$): tre domande, di cui una di tipo [a], una [b] e una [c].

  A titolo di esempio, vediamo tre situazioni-tipo. • Se lo studente Tizio ha $S = 30$ e decide di sostenere una prova orale ridotta egli otterrà comunque $F \leq 24$ (nelle sua situazione, Tizio dovrebbe sostenere un orale completo: scegliendo di affrontare un orale ridotto, chiaramente egli spreca gran parte delle possibilità dategli dallo scritto). • Se lo studente Caio ha $S = 19$ e decide di sostenere una prova orale intermedia o completa egli otterrà comunque $F \leq 19 + 3 = 22$ (avendo una speranza di voto finale inferiore a 24, la decisione di Caio di sostenere un orale più difficile di quello ridotto è tecnicamente sbagliata: se egli ambisce ad un voto alto, l'unica via è di rifare il suo scritto per cercare di migliorarlo e poi sostenere la prova orale con altre prospettive). • Lo studente Sempronio che ha $S = 23$ potrà sostenere un orale ridotto (con la speranza di arrivare a 24) o un orale intermedio (con la speranza di arrivare a 26); sostenere un orale completo è per lui inutile, così come lo era per Caio.

Nota bene. Si intende che quanto scritto nel presente documento pdf sostituisce quanto detto e scritto in precedenti occasioni che risulti eventualmente in contrasto con quanto appare qui. Questo vale ad esempio per alcune cose riguardo al voto finale degli esami scritte nella versione del file pdf "Informazioni generali sul corso (NOTE)" pubblicato il 13/10, file che è stato ripubblicato in versione aggiornata al 18/11.