Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Prima Prova Parziale (05/11/2008)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

1. Descrivere $A = \{\alpha^n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \big(\{x \in \mathbb{R} : 1 + \operatorname{tg} 3x \le 0\} \cap [\frac{1}{2}, 2]\big)$ al variare di $\alpha \ge 0$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; di quali punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ è intorno; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare (se esiste, eventualmente in più modi e al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$) il limite delle successioni

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n^2 + 3\operatorname{arctg} n}{2n^\alpha - \operatorname{arctg}(n^{-\alpha})}\ , \qquad\qquad \text{(b)} \quad b_n = \sqrt[n]{3n + |\alpha|^n} - 3^{n\alpha}$$

usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Determinare dominio, zeri e segno di $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x$; individuarne i limiti interessanti in $\widetilde{\mathbb{R}}$, e calcolarli dopo aver trovato la parte principale di g in tali punti. Calcolare la fibra di g nel punto generico $y \in \mathbb{R}$, e usare quanto trovato per dire se g è iniettiva e/o suriettiva, e per invertirla dopo averla opportunamente (co)ristretta.

4. (a) Calcolare i seguenti limiti usando l'analisi del comportamento locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{0^+,\,+\infty} \frac{x^2 + \alpha \cos x - 2e^{-x^3}}{x^{\alpha+1}}\ , \qquad\qquad \lim_{-\infty,\,1^+} \sqrt{x^2 - x}\ \log^\alpha |x|\ .$$

(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, e sia $A \subset \mathbb{R}$. Se A è un aperto di $\mathbb{R}$, è vero che $f(A)$ e $f^{-1}(A)$ sono sempre degli aperti di $\mathbb{R}$? Stesse domande con A chiuso, A limitato, A compatto.[(1)]

[(1)] Se la risposta è "sì", suffragarla enunciando con precisione (senza ridimostrarli) dei risultati trattati a lezione; se la risposta è "no", mostrare un opportuno controesempio.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Prima Prova Parziale (04/11/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ____ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO SF / SA

1. Descrivere i seguenti insiemi e dire (giustificando le risposte) se sono superiormente/inferiormente limitati determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se sono aperti e/o chiusi, compatti, discreti; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera:

(a) $A = \{(-\frac{1}{3})^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2|x-1| < x\}$, (b) $B = \{\mathrm{arctg}\,(x^2+2x) : x \in]-3, 0] \,\cap\, \mathbb{Q}\}$.

2. (a) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione $a_n = \dfrac{n^{\alpha n} - 2|\alpha|^n}{\sqrt{\cosh(e^{-n})}} - (-1)^n \dfrac{n+1}{2n}$ usando tecniche e risultati specifici (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

(b) Sia x_n una successione di numeri reali che abbia una sottosuccessione x_{n_k} convergente a un certo $\ell \in \mathbb{R}$. Dire, per ognuna delle seguenti affermazioni, se è vera o falsa.[1]

(i) Per ogni $M > 0$ si ha $|x_n - \ell| < \exp(-M)$ per infiniti indici n.
(ii) Se esiste un intorno di ℓ in cui x_n entra definitivamente, allora anche x_n converge a ℓ.
(iii) ℓ è di accumulazione per l'insieme $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(iv) Di certo la successione $\exp(x_n)$ ammette una sottosuccessione convergente.
(v) Di certo x_n è limitata.
(vi) L'insieme $K = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ è compatto.

3. (a) Data $f(x) = \log|2 - e^x| + x$, determinarne dominio, zeri, segno, limiti interessanti, gli sviluppi in $-\infty$, 0 e $+\infty$ con due termini significativi (o almeno la parte principale).

(b) Calcolare le fibre di f, e usare quanto trovato per trovarne un'inversa dopo averla opportunamente ristretta e coristretta.

4. Calcolare i seguenti limiti usando i limiti notevoli e l'analisi del comportamento locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...) :

(a) $\displaystyle\lim_{0,1,+\infty} \frac{\log(x^2 - x + 1) - \sin(\pi x)}{x(x^3 - 3x + 2)}$, (b) $\displaystyle\lim_{-\infty,0,+\infty} x^2 \left(\frac{x}{x+1} - e^{-\frac{1}{x}}\right) \mathrm{arctg}\, x$.

[1] Se la risposta è "vero", dimostrarlo citando risultati visti a lezione; se la risposta è "falso", esibire un controesempio.

Soluzioni

Analisi Matematica I – Prima Prova Parziale (05/11/2008) – Soluzioni.

1. La condizione $1 + \operatorname{tg} 3x \leq 0$ dà $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 3x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ovvero $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < x \leq -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ (con $k \in \mathbb{Z}$): intersecando questa condizione con $[\frac{1}{2}, 2]$ si ottiene $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \cup]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}]$. Vediamo poi $\{\alpha^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$: se $\alpha = 0$ (risp. se $\alpha = 1$) c'è il solo punto -1 (risp. 0); se $0 < \alpha < 1$ si tratta di una successione di punti negativi che converge a -1 da sopra; se $\alpha > 1$ è una successione di punti positivi che tende a $+\infty$. Dunque: • Se $\alpha = 0$ l'insieme A è limitato con $\min A = -1$ e $\max A = \frac{7\pi}{12}$; ne' aperto ne' chiuso ne' compatto ne' discreto; la sua chiusura è $\{-1\} \cup [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}]$, e tutti questi punti sono anche di accumulazione tranne -1 che è isolato; i punti interni sono quelli di $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}[$; i punti di frontiera sono -1, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{12}$. • Se $0 < \alpha < 1$ l'insieme A è limitato con $\inf A = -1$ (ma non è minimo) e $\max A = \frac{7\pi}{12}$; ne' aperto ne' chiuso ne' compatto ne' discreto; i punti di chiusura sono tutti i suoi punti più -1, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$, e sono tutti punti di accumulazione tranne gli α^n che sono isolati; come prima i punti interni sono quelli di $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}[$; i punti di frontiera sono -1, tutti gli α^n, e poi ancora $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{12}$. • Se $\alpha = 1$ tutto è come per $\alpha = 0$ a patto di rimpiazzare il punto -1 con 0. • Se infine $\alpha > 1$ l'insieme A è inferiormente limitato con $\inf A = \min\{\alpha - 1, \frac{\pi}{6}\} > 0$ (e quando $\inf A = \alpha - 1$, il che accade quando $\alpha - 1 \leq \frac{\pi}{6}$ ovvero per $1 < \alpha \leq 1 + \frac{\pi}{6}$, tale inf è anche minimo), ed è superiormente illimitato; ne' aperto ne' chiuso ne' compatto ne' discreto; i punti di chiusura sono tutti i suoi punti più $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$, e sono tutti punti di accumulazione tranne gli α^n che sono isolati (tranne il caso in cui siano interni a uno dei due intervalli); i punti interni sono ancora quelli di $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}[$; i punti di frontiera sono tutti gli α^n (sempre tranne il caso in cui siano interni a uno dei due intervalli), e anche $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{12}$.

2. (a) $\boxed{a_n = \frac{n^2 + 3\operatorname{arctg} n}{2n^\alpha - \operatorname{arctg}(n^{-\alpha})}}$ • Se $\alpha > 0$ si ha $a_n = \frac{1 + \frac{3\operatorname{arctg} n}{n^2}}{2 - \frac{\operatorname{arctg}(n^{-\alpha})}{n^\alpha}} n^{2-\alpha}$: le successioni $\frac{3\operatorname{arctg} n}{n^2}$ e $\frac{\operatorname{arctg}(n^{-\alpha})}{n^\alpha}$ sono infinitesime, dunque la frazione tende a $\frac{1}{2}$, e perciò il limite vale 0^+ se $\alpha > 2$, vale $\frac{1}{2}$ se $\alpha = 2$ e vale $+\infty$ se $0 < \alpha < 2$. • Se $\alpha = 0$ il numeratore tende a $+\infty$ (infatti n^2 tende a $+\infty$ mentre $3\operatorname{arctg} n$ è (inferiormente) limitata), mentre il denominatore è $2 - \frac{\pi}{4} > 0$: dunque il limite vale $+\infty$. • Se $\alpha < 0$ il numeratore tende ancora a $+\infty$ mentre il denominatore tende a $-\frac{\pi}{2}$ (infatti n^α è infinitesima mentre $\operatorname{arctg}(n^{-\alpha})$ tende a $\frac{\pi}{2}$ perché $n^{-\alpha}$ tende a $+\infty$ e arctg è continua), pertanto il limite vale $-\infty$.

(b) $\boxed{b_n = \sqrt[n]{3n + |\alpha|^n} - 3^{n\alpha}}$ Esaminiamo separatamente gli addendi $b'_n = \sqrt[n]{3n + |\alpha|^n}$ e $b''_n = -3^{n\alpha}$. • Per b'_n, se $|\alpha| \leq 1$ si ha che $b'_n = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{3 + \frac{|\alpha|^n}{n}}$ tende a 1 (infatti $\sqrt[n]{n}$ tende a 1 mentre $\frac{|\alpha|^n}{n}$ è infinitesima e dunque, essendo definitivamente $\sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{3 + \frac{|\alpha|^n}{n}} \leq \sqrt[n]{4}$, anche $\sqrt[n]{3 + \frac{|\alpha|^n}{n}}$ tende a 1); mentre se $|\alpha| > 1$ si ha che $b'_n = |\alpha|\sqrt[n]{3\frac{n}{|\alpha|^n} + 1}$ tende a $|\alpha|$ (infatti $\frac{n}{|\alpha|^n}$ è infinitesima per il criterio del rapporto). • Invece $b''_n = -3^{n\alpha}$ tende a 0^- se $\alpha < 0$, è -1 se $\alpha = 0$ e tende a $-\infty$ se $\alpha > 0$. • Ricapitolando, la successione b_n tende a $|\alpha|$ se $\alpha < -1$; tende a 1 se $-1 \leq \alpha < 0$; tende a 0 se $\alpha = 0$; e tende a $-\infty$ se $\alpha > 0$.

3. (Vedi figura) Il dominio di $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x$ è $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$. Gli zeri sono dati da $g(x) = 0$, ovvero $\sqrt{x^2 + 2x} = -x$, che nell'ipotesi $x \leq 0$ equivale a $x^2 + 2x = x^2$, da cui $x = 0$. Si ha poi $g(x) > 0$ quando $\sqrt{x^2 + 2x} > -x$: se $-x < 0$ (ovvero se $x > 0$) ciò è sempre vero, mentre se $-x \geq 0$ (ovvero se $x \leq 0$) equivale a $x^2 + 2x > x^2$, priva di soluzioni accettabili: pertanto $g(x) > 0$ per $x > 0$. La funzione è continua nel suo dominio, dunque i limiti interessanti sono in $\mp\infty$: in essi si ha $g(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x = |x|(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x} + o_{\mp\infty}(\frac{1}{x})) + x$, dunque (essendo $|x| = \mp x$ all'intorno di $\mp\infty$) si ha $g(x) \sim_{-\infty} 1$ (dunque $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$) e $g(x) \sim_{+\infty} 2x$ (dunque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$).[(2)] Dato poi $y \in \mathbb{R}$, l'equazione $g(x) = y$ equivale a $\sqrt{x^2 + 2x} = y - x$, che richiede $y \geq x$; in tale ipotesi essa equivale a $x^2 + 2x = (y - x)^2$, da cui si ricava $x(y) = \frac{y^2}{2(y+1)}$, e imponendo che $y \geq x(y)$ si ha la condizione $-2 \leq y < -1$ oppure $y \geq 0$: perciò $g^{-1}(y) = \begin{cases} \{x(y) = \frac{y^2}{2(y+1)}\} & \text{se } (y \geq 0) \vee (-2 \leq y < -1) \\ \varnothing & \text{altrimenti.} \end{cases}$ La funzione g è dunque iniettiva; restringendo ad esempio il dominio a $x > 0$ essa è suriettiva su $y > 0$, dunque biettiva con inversa $x(y) : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.

4. (a) • Quando $x \to 0^+$, se $\alpha \neq 2$ il numeratore è finito (tende a $\alpha - 2 \neq 0$), dunque il limite è deciso dal denominatore: se $\alpha < -1$ vale 0^-; se $\alpha = -1$ vale $\alpha - 2 = -3$; se infine $\alpha > -1$ (ma $\alpha \neq 2$) vale $(\operatorname{sign}(\alpha - 2))\infty$. Nel caso $\alpha = 2$ il numeratore è infinitesimo, e si ha $x^2 + 2\cos x - 2e^{-x^3} = x^2 + 2(1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3)) - 2(1 + (-x^3) + o_0(x^3)) = 2x^3 + o_0(x^3) \sim_0 2x^3$, dunque il limite è uguale a $\lim_{x\to0^+} \frac{2x^3}{x^3} = 2$. Quando invece $x \to +\infty$ al numeratore si ha $\alpha\cos x - 2e^{-x^3} = o_{+\infty}(x^2)$, dunque il limite è uguale a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha}$, che vale 0^+ se $\alpha > 1$, vale 1 se $\alpha = 1$ e vale $+\infty$ se $\alpha < 1$. • Quando $x \to -\infty$ si ha $\sqrt{x^2 - x}\log^\alpha|x| \sim_{-\infty} |x||\log|x||^\alpha$, dunque il limite vale $+\infty$ per ogni α. Quando invece

[(2)] Si noti che $g(x) = 2x + 1 + o_{+\infty}(1) \sim_{+\infty} 2x + 1$: in altre parole, come vedremo nella terminologia successiva, $y = 2x + 1$ è asintoto lineare a $+\infty$.

$x \to 1^+$ si può cambiare variabile come al solito (ponendo $x = 1 + t$ con $t \to 0^+$) oppure notare che si ha $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{x}\sqrt{x-1} \sim_{1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}}$ e $\log^\alpha x \sim_{1^+} (x-1)^\alpha$, dunque $\sqrt{x^2 - x}\, \log^\alpha x \sim_{1^+} (x-1)^{\alpha + \frac{1}{2}}$: pertanto il limite vale 0^+ se $\alpha > -\frac{1}{2}$, vale 1 se $\alpha = -\frac{1}{2}$ e vale $+\infty$ se $\alpha < -\frac{1}{2}$.

(b) Come detto a lezione, data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se A è aperto/chiuso di $\mathbb{R}$ allora $f^{-1}(A)$ è aperto/chiuso di $\mathbb{R}$, e se A è compatto (cioè chiuso e limitato) anche $f(A)$ è compatto. Inoltre, se A è limitato anche l'immagine $f(A)$ è limitata: infatti se A è limitato esiste $r > 0$ tale che $A \subset \overline{B_0(r)}$ (palla chiusa), dunque $f(A) \subset f(\overline{B_0(r)})$, ma essendo $\overline{B_0(r)}$ compatta anche l'immagine $f(\overline{B_0(r)})$ è compatta, in particolare limitata, dunque anche $f(A)$ è limitata in quanto sottoinsieme di un limitato. Invece le altre affermazioni sono false in generale: ad esempio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è continua, $A = \mathbb{R}$ è sia aperto che chiuso ma $h(A) = [0, \frac{\pi}{2}[$ non è ne' aperto ne' chiuso, $B = [0, 2]$ è compatto (in particolare limitato) ma $h^{-1}(B) = \mathbb{R}$ non è compatto (e nemmeno limitato).

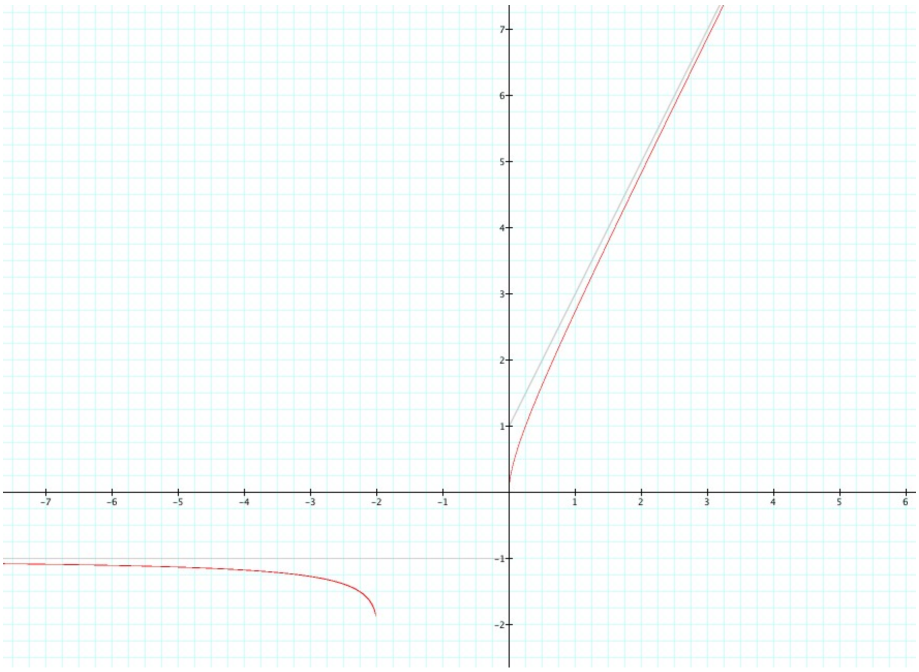


Grafico della funzione $g(x)$ dell'esercizio 3.

Analisi Matematica I – Prima Prova Parziale (04/11/2009) – $\boxed{\text{Tema A}}$ – Soluzioni.

1. (a) L'insieme $A = \{(-\frac{1}{3})^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2|x-1| < x\}$ è costituito dall'unione dell'insieme discreto $A_1 = \{\dots, 81, -27, 9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots\}$ (illimitato, e con accumulazione in 0) e dell'intervallo $A_2 =]\frac{2}{3}, 2[$. Dunque il sup è $+\infty$, l'inf $-\infty$; non è ne' aperto (non è intorno di 9) ne' chiuso (non contiene l'accumulazione 0), ne' compatto, ne' discreto; i punti interni sono quelli di A_2; quelli di chiusura sono, oltre ai i suoi, anche $\mp\infty$, 0, $\frac{2}{3}$ e 2; i punti isolati sono quelli di A_1 tranne 1, dunque tutti gli altri punti di chiusura sono anche di accumulazione; i punti di frontiera sono tutti quelli di A_1 tranne 1, e anche $\mp\infty$, 0, $\frac{2}{3}$ e 2.

(b) (Vedi Figura 1) L'insieme $B = \{\operatorname{arctg}(x^2+2x) : x \in]-3,0] \cap \mathbb{Q}\}$ è costituito dall'immagine dei punti razionali di $]-3,0]$ tramite la funzione continua $\phi(x) := \operatorname{arctg}(x^2+2x)$: si tratterà di un sottoinsieme denso dell'immagine $\phi(]-3,0])$,(2) che andiamo ora a determinare col metodo della fibra. L'equazione $\phi(x) = y$ impone, per cominciare, che $|y| < \frac{\pi}{2}$, e in tal caso si trova $x^2+2x = \operatorname{tg} y$, che nell'ipotesi $1 + \operatorname{tg} y \geq 0$ (ovvero $y \geq -\frac{\pi}{4}$) dà $x_\mp(y) = -1 \mp \sqrt{1+\operatorname{tg} y}$ (si noti che $x_-(y) = x_+(y) = -1$ se e solo se $y = -\frac{\pi}{4}$): ricapitolando, la fibra di $\phi^{-1}(y)$ è vuota se $y < -\frac{\pi}{4}$ oppure $y \geq \frac{\pi}{2}$, è $\{-1\}$ se $y = -\frac{\pi}{4}$, ed è $\{x_-(y), x_+(y)\}$ se $-\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}$. Imponendo che $-3 < x_-(y) \leq 0$ si trova $y < \operatorname{arctg} 3 \sim 1{,}2$, imponendo che $-3 < x_+(y) \leq 0$ si trova $y \leq 0$: unendo le due e ricordando che $y \geq -\frac{\pi}{4}$ si ha che l'immagine cercata $\phi(]-3,0])$ è $[-\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 3[$. Come detto, il nostro B è un sottoinsieme denso di tale immagine, e si noti che contiene l'estremo $-\frac{\pi}{4} = \phi(-1)$ (infatti $-1 \in \mathbb{Q}$): dunque il sup è $\operatorname{arctg} 3$ (non è max), il min è $-\frac{\pi}{4}$; non è ne' aperto ne' chiuso, ne' compatto ne' discreto; i punti di aderenza, che sono tutti di accumulazione e anche di frontiera, sono quelli di $[-\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 3]$.

2. (a) Si ha $a_n = a_n' - a_n''$ con $a_n' = \frac{n^{\alpha n} - 2|\alpha|^n}{\sqrt{\cosh(e^{-n})}}$ e $a_n'' = (-1)^n \frac{n+1}{2n}$. Converrà forse allora studiare separatamente le successioni a_n' e a_n'', per poi vedere che ne è della loro differenza. • Iniziamo con a_n': il denominatore tende per continuità a 1, dunque il limite coinciderà con quello del numeratore, che se $\alpha < -1$ tende a $-\infty$, se $\alpha = -1$ tende a -2, se $-1 < \alpha < 0$ tende a 0, se $\alpha = 0$ è 1, e se $\alpha > 0$ tende a $+\infty$ (per il criterio del rapporto si ha che $b_n := \frac{2|\alpha|^n}{n^{\alpha n}}$ tende a zero, in quanto $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{|\alpha|}{(n+1)^\alpha}(\frac{n}{n+1})^{\alpha n} = \frac{|\alpha|}{+\infty}(\frac{1}{e})^\alpha = 0$). • È poi chiaro che il limite di a_n'' non esiste, in quanto a_{2k}'' (termini pari) tende a $\frac{1}{2}$ mentre a_{2k-1}'' (termini dispari) tende a $-\frac{1}{2}$; tuttavia a_n'' è limitata, in quanto $|a_n''| < 1$ per ogni n. • Ricapitolando, per $a_n = a_n' - a_n''$ la situazione è chiara: essa tende a $-\infty$ se $\alpha < -1$ e tende a $+\infty$ se $\alpha > 0$, mentre negli altri casi è indeterminata (non ha limite).

(b) (i) <u>Vero</u>: dato un $M > 0$ esiste per ipotesi un $k_M \in \mathbb{N}$ tale che $|x_{n_k} - \ell| < \exp(-M)$ per ogni $k \geq k_M$, e gli infiniti indici sono allora quelli del tipo $n = n_k$ con $k \geq k_M$. (ii) <u>Falso</u>: $\mathbb{R}$ è un intorno di ℓ e x_n vi sta sempre, ma x_n può benissimo non convergere a ℓ. (iii) <u>Falso</u>: se x_n è una successione costante, diciamo $x_n \equiv \tilde{x} \in \mathbb{R}$ per ogni n, allora $\ell = \tilde{x}$ non è di accumulazione per $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{x}\}$. Invece è vero che ℓ è di *chiusura* per l'insieme A: infatti in generale un punto ℓ è di chiusura per un sottoinsieme A se e solo se c'è una successione di punti dentro A che tende a ℓ, e questa è la sottosuccessione x_{n_k}. (iv) <u>Vero</u>: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, e dunque la successione $\exp(x_{n_k})$ tende a $\exp(\ell)$. (v) <u>Falso</u>: la successione $x_n = n + (-1)^n n$ (ovvero $x_{2k-1} = 0$ e $x_{2k} = 2k$) ha la sottosuccessione x_{2k-1} che ovviamente converge a 0 ma x_n non è limitata. (vi) <u>Vero</u>: K è limitato perché x_{n_k} converge, ed è chiuso perché contiene tutti i suoi punti di chiusura (infatti anche il limite ℓ di x_{n_k} vi sta).

3. (a) (Vedi Figura 2) Il dominio di $f(x) = \log|2-e^x| + x$ è dato da $x \neq \log 2$. • Si ha $f(x) \geq 0$ per $\log|2-e^x| \geq -x$, cioè $|2-e^x| \geq e^{-x}$, cioè $2 - e^x \leq -e^{-x}$ oppure $2 - e^x \geq e^{-x}$, cioè $e^{2x} - 2e^x - 1 \geq 0$ oppure $e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0$; la prima dà $e^x \geq 1 + \sqrt{2}$ ovvero $x \geq \log(\sqrt{2}+1)$, mentre la seconda dà $e^x = 1$ ovvero $x = 0$. • I limiti interessanti sono in $-\infty$, $\log 2$ e $+\infty$, e valgono rispettivamente $-\infty$, $-\infty$ e $+\infty$. • In $-\infty$ si ha $f(x) = \log(2-e^x) + x = \log(2(1+\frac{1}{2}e^x)) + x = \log 2 + \log(1+\frac{1}{2}e^x) + x = \log 2 + \frac{1}{2}e^x + o_{-\infty}(e^x) + x = x + \log 2 + o_{-\infty}(1)$. • In 0 si ha $\log|2-e^x| + x = \log(1+(1-e^x)) + x = (1-e^x) - \frac{1}{2}(1-e^x)^2 + \frac{1}{3}(1-e^x)^3 + o_0((1-e^x)^3) + x = (-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)) - \frac{1}{2}(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^2))^2 + \frac{1}{3}(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^2))^3 + o_0(x^3) + x = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o_0(x^3) - \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3) + x = -x^2 - x^3 + o_0(x^3)$. • In $+\infty$ vale $\log|2-e^x| + x = \log(e^x-2) + x = \log(e^x(1-2e^{-x})) + x = \log e^x + \log(1-2e^{-x}) + x = 2x + (-2e^{-x} + o_{+\infty}(-2e^{-x})) = 2x - 2e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})$.(3)

(b) (Vedi Figura 2) Calcoliamo le fibre di f. Da $\log|2-e^x| + x = y$ si ricava $|2-e^x| = e^{y-x}$, da cui $|e^{2x} - 2e^x| = e^y$, ovvero $e^{2x} - 2e^x - e^y = 0$ oppure $e^{2x} - 2e^x + e^y = 0$; la prima dà per ogni y la soluzione $e^x = 1 + \sqrt{1+e^y}$

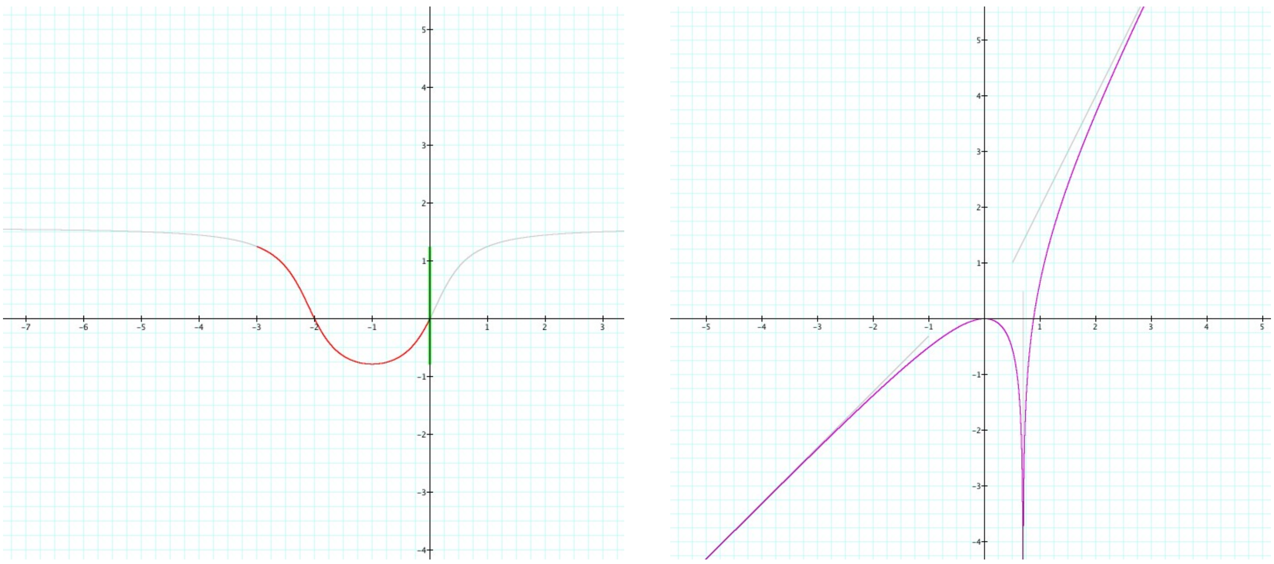
(2) In generale, è facile vedere che se $\phi : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo I e $A \subset I$ è denso in I, allora $\phi(A)$ è denso in $\phi(I)$: preso infatti un elemento $\phi(x) \in \phi(I)$, esiste per ipotesi una successione $x_n \in A$ che converge a x, e dunque per continuità la successione $\phi(x_n) \in \phi(A)$ converge a $\phi(x)$ (altrimenti detto, $\phi(x)$ è di chiusura per $\phi(A)$).

(3) Come vedremo presto, date due funzioni $f(x)$ e $\tilde{f}(x)$ e un punto $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per il dominio di entrambe, si dice che $\tilde{f}(x)$ è un *asintoto per* $f(x)$ *in* c se $f(x) - \tilde{f}(x) = o_c(1)$ (ovvero se $f(x) - \tilde{f}(x)$ è infinitesima in c): da quanto trovato, abbiamo che le funzioni lineari $x + \log 2$ e $2x$ sono un asintoto per $f(x)$ rispettivamente a $-\infty$ e a $+\infty$ (nella scuola superiore si sarebbe detto "un asintoto obliquo").

(quella col meno è non accettabile, perché l'esponenziale è positivo), ovvero $x_1(y) = \log(1 + \sqrt{1 + e^y})$; la seconda, nell'ipotesi $y \le 0$ dà $e^x = 1 \pm \sqrt{1 - e^y}$, ovvero le soluzioni $x_2(y) = \log(1 + \sqrt{1 - e^y})$ e $x_3(y) = \log(1 - \sqrt{1 - e^y})$ (che, si noti, coincidono tra loro se e solo se $y = 0$, e non coincidono mai con $x_1(y)$). Ricapitolando, vale $f^{-1}(y) = \begin{cases} \{x_1(y),\, x_2(y),\, x_3(y)\} & \text{se } y < 0 \\ \{\log(\sqrt{2} + 1),\, 0\} & \text{se } y = 0 \\ \{x_1(y)\} & \text{se } y > 0. \end{cases}$ Si noti che $-\infty < x_3(y) \le 0 \le x_2(y) < \log 2 < x_1(y) < +\infty$: se ad esempio restringiamo il dominio a $I =]\log 2, +\infty[$, si ottiene una biiezione $f|_I : I \to \mathbb{R}$, con inversa $x_1(y)$. Oppure potremmo restringere e corestringere a $J =]-\infty, 0[$, ottenendo una biiezione $f|_J^J : J \to J$, con inversa $x_3(y)$.

4. (a) Poniamo $\varphi(x) := \frac{\log(x^2-x+1)-\sin(\pi x)}{x(x^3-3x+2)}$. • In 0 siamo in forma $\frac{0}{0}$. Si ha $\log(x^2 - x + 1) = \log(1 + (-x + x^2)) = (-x + x^2) + o_0((-x + x^2)) = -x + o_0(x) \sim_0 -x$ e $\sin(\pi x) = \pi x + o_0(x) \sim_0 \pi x$, dunque il numeratore è $-(\pi+1)x + o_0(x) \sim_0 -(\pi+1)x$; poiché il denominatore è $\sim_0 2x$, si ha $\lim_0 \varphi(x) = \lim_0 \frac{-(\pi+1)x}{2x} = -\frac{\pi+1}{2}$. • Anche in 1 siamo in forma $\frac{0}{0}$. Posto $t = x - 1$, ovvero $x = t + 1$, si ottiene $\lim_{x\to 1^\mp} \varphi(x) = \lim_{t\to 0^\mp} \frac{\log(1+t+t^2)+\sin(\pi t)}{t^2(t+1)(t+3)} = \lim_{t\to 0^\mp} \frac{(t+t^2)+o_0(t+t^2)+\pi t+o_0(t)}{3t^2} = \lim_{t\to 0^\mp} \frac{(\pi+1)t}{3t^2} = \mp\infty$. • In $+\infty$ si ha $\log(x^2 - x + 1) \sim_{+\infty} \log(x^2) = 2\log x$ e perciò (essendo il seno limitato) il numeratore è $\sim_{+\infty} 2\log x$, mentre il denominatore è $\sim_{+\infty} x^4$: dunque il limite vale 0^+.

(b) Passiamo a $\psi(x) := x^2 \left(\frac{x}{x+1} - e^{-\frac{1}{x}}\right) \operatorname{arctg} x$. • In $-\infty$ siamo in forma $\infty\cdot 0$. Posto $t = -x$ si ha $\lim_{x\to-\infty} \psi(x) = \lim_{t\to+\infty} t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - \frac{t}{t-1}\right) \operatorname{arctg} t$. Sviluppando $\frac{t}{t-1}$ in $+\infty$ si ottiene $1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$, mentre $e^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$: perciò la parentesi è $\sim_{+\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}$, e si ha $\lim_{t\to+\infty} t^2(-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2})\operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{4}$. • In 0^+ il limite è determinato e vale 0^+ (per il segno si noti che $e^{-\frac{1}{x}} = o_{0^+}(\frac{x}{x+1})$). Quanto a 0^-, il limite è in forma $0 \cdot \infty$, ed essendo $\frac{x}{x+1} = o_{0^-}(e^{-\frac{1}{x}})$ e $\operatorname{arctg} x \sim_{0^-} x$ esso è uguale a $\lim_{x\to 0^-}(-x^3 e^{-\frac{1}{x}})$ che, posto $u = -\frac{1}{x}$, diventa $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u^3} = +\infty$. • In $+\infty$ siamo in forma $\infty \cdot 0$, e operando in modo simile a $-\infty$ si ha $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2}) - (1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})))\operatorname{arctg} x = \lim_{x\to+\infty} x^2(\frac{1}{2}\frac{1}{x^2})\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$.



(1) L'insieme B dell'esercizio (1.b). **(2)** Grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 3.