Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Seconda Prova Parziale ed Esame Scritto (09/12/2008)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO SF / SA

Questa prova viene svolta come:	☐ P = 2a Prova Parziale	☐ S = Esame Scritto

1. $\boxed{\text{S}}$ Descrivere $A = \{x < 0 : 6 \arcsin(2x + \frac{1}{3}) < \pi\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \log(x-1) \in \mathbb{Z}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; di quali punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ è intorno; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. $\boxed{\text{S}}$ Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione $a_n = \frac{n(1-n)+n^\alpha}{\alpha^{-n}-n}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. $\boxed{\text{S}}$ Calcolare i limiti $\lim\limits_{0^+,\,1,\,+\infty} \frac{\alpha x + \sin x}{1+2x^\alpha - e^{x-2x^2}}$ per $\alpha = 1$ usando l'analisi del comportamento locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...). Discutere poi eventualmente il caso generale in cui $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (a) $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{P}}$ Studiare l'andamento di $f(x) = |3 \log|x| - 1| - x$ e tracciarne il grafico.

(b) $\boxed{\text{P}}$ Sviluppare $f(x)$ in -1, 0^+ e $+\infty$, con tre termini significativi, rispetto a opportune scale di confronto.

5. (a) $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{P}}$ Disegnare $K = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi\,,\ y \le x \cos \frac{x}{2}\,,\ |x-y| \le \pi\}$ e calcolarne l'area.

(b) $\boxed{\text{P}}$ Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x^2 \log|x| - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ (se $x \ne 0$) e $f(0) = 0$, dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ ha senso l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, impostandone il calcolo.[(1)]

6. $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{P}}$ Discutere il carattere della serie numerica $\sum n \log(n^x + 1)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

7. (a) $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{P}}$ Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $8z^6 + (1+8i)z^3 + i = 0$.

(b) $\boxed{\text{P}}$ Data la funzione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $g(z) = z^2 + 3\bar{z}$, calcolare la fibra $g^{-1}(10)$, l'immagine di $A = i\mathbb{R}$ (l'asse immaginario) e l'antiimmagine di $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

[(1)] Sarà utile ricordare l'identità $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = (\operatorname{sign} x) \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $x \ne 0$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Seconda Prova Parziale ed Esame Scritto (10/12/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

Questa prova viene svolta come:	☐ P = 2a Prova Parziale	☐ S = Esame Scritto

1. $\boxed{\text{S}}$ Descrivere $A = \{x > 0 : 2\cos(\frac{1}{x}) \geq 1\} \cup \{1 - (1 + \frac{2}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; di quali punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ è intorno; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. $\boxed{\text{S}}$ Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite della successione $a_n = \dfrac{\exp(\alpha n) - n^\alpha + 1}{\alpha - \log(n^\alpha + 2)}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. $\boxed{\text{S}}$ Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{-\infty, 0, +\infty} \frac{x^2 + 2\cos(\alpha x) - 2e^{x^3}}{\log|1 + 2x^3| - |x|^{4\alpha}}$ per $\alpha = 1$ usando l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...). Discutere poi eventualmente il caso generale in cui $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (a) $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{P}}$ Studiare l'andamento di $f(x) = \log(x - 2\sqrt{|x|} + 2)$ e tracciarne il grafico.[1]

(b) $\boxed{\text{P}}$ Sviluppare $f(x)$ in 0, 1 e $+\infty$ con due termini significativi, usando una scala opportuna.

5. (a) $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{P}}$ Calcolare le primitive per $x \geq 0$ della funzione $f(x)$ dell'esercizio 4. Disegnare poi con cura l'insieme $K = \{(x, y) : |x - 2| - 1 \leq y \leq f(x),\ y - 1 \leq x \leq 3\}$ e calcolarne l'area.

(b) $\boxed{\text{P}}$ Detta $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $g_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{se } x < 0 \\ f(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ (ove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro), descrivere la funzione integrale di g_α di punto iniziale 1, ovvero $G_\alpha(x) = \int_1^x g_\alpha(t)\, dt$.

6. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{P}}$ Discutere il carattere della serie numerica $\sum(\operatorname{arctg}(x^n) + 3n^{x-1})$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

7. (a) $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{P}}$ Trovare le soluzioni dell'equazione $2z^3 + (2 - i)z^2 + (2 + i)z + (1 - i) = 0$, sapendo che una di esse ha parte reale negativa ed è radice quarta di -4.

(b) $\boxed{\text{P}}$ Data $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $g(z) = 1 - i\, e^z$, calcolare e disegnare nel piano di Gauss la fibra $g^{-1}(-7)$, l'immagine del rettangolo $A = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1,\ -1 < \operatorname{Im} z < 3\}$ e l'antiimmagine del semiasse reale $B = [0, +\infty[$.

---

[1] Non è necessario procedere con lo studio della convessità.

Soluzioni

Analisi Matematica I – 2a Prova Parziale ed Esame Scritto (09/12/2008) – Soluzioni.

1. L'insieme A è ottenuto unendo i punti di $A_1 = \{x < 0 : 6\arcsin(2x + \frac{1}{3}) < \pi\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : \log(x-1) \in \mathbb{Z}\}$. La condizione $6\arcsin(2x+\frac{1}{3}) < \pi$, ovvero $\arcsin(2x+\frac{1}{3}) < \frac{\pi}{6}$, equivale a $-1 \le 2x + \frac{1}{3} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, da cui $-\frac{2}{3} \le x < \frac{1}{12}$; prendendo poi i soli $x < 0$ si ottiene $A_1 = [-\frac{2}{3}, 0[$. La condizione $\log(x-1) \in \mathbb{Z}$ significa $x - 1 = e^n$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$, ovvero $A_2 = \{x_n := 1 + e^n : n \in \mathbb{Z}\}$: si tratta di una famiglia di punti che per $n < 0$ tende da sopra a 1 senza raggiungerlo, mentre per $n \ge 0$ crescono da 2 verso $+\infty$. Pertanto A è limitato solo inferiormente, con $\min A = -\frac{2}{3}$; non è aperto (non è intorno di $x_0 = 2$) ne' chiuso (0 è di accumulazione ma non vi sta), non compatto, non discreto; è intorno dei punti di $]-\frac{2}{3}, 0[$; i punti di aderenza sono tutti i suoi più 0, 1 e $+\infty$, quelli di accumulazione sono tutti quelli di $[-\frac{2}{3}, 0]$ più 1 e $+\infty$, mentre gli x_n sono isolati; infine, i punti di frontiera sono $-\frac{2}{3}$, 0, 1, tutti gli x_n, e $+\infty$.

2. Nella successione $a_n = \frac{n(1-n)+n^\alpha}{\alpha^{-n}-n}$ si intende che $\alpha \ne 0$. • Se $|\alpha| < 1$, ovvero se $|\frac{1}{\alpha}| > 1$, si ha $a_n = \frac{n^2(-1+\frac{1}{n}+n^{\alpha-2})}{(\frac{1}{\alpha})^n(1-\frac{n}{(\frac{1}{\alpha})^n})}$ da cui (notando che $\alpha - 2 < -1$ e ricordando che se $|y| > 1$ allora $\lim \frac{n^x}{y^n} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) si ha che il limite di a_n è 0. • Se $|\alpha| > 1$ con $\alpha \ne 2$, si ha che α^{-n} tende a 0, dunque (raccogliendo al numeratore la potenza più grande tra n^2 e n^α, e al denominatore n) il limite di a_n è $+\infty$ se $\alpha < 2$, oppure $-\infty$ se $\alpha > 2$. • Infine, nel caso $\alpha = 2$ si ottiene $a_n = \frac{n}{2^{-n}-n} = \frac{1}{-1+\frac{2^{-n}}{n}} =$, che tende a -1.

3. Sia $f_\alpha(x) := \frac{\alpha x + \sin x}{1+2x^\alpha - e^{x-2x^2}}$: i tre punti 0, 1 e $+\infty$ sono di accumulazione per il suo dominio, dunque i limiti richiesti hanno senso per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuteremo da subito il caso generale $\alpha \in \mathbb{R}$, lasciando $\alpha = 1$ come caso particolare. • Iniziamo da 0^+. Se $\alpha \ne -1$ il numeratore è asintotico a $(\alpha+1)x$, mentre se $\alpha = -1$ è asintotico a $-\frac{1}{6}x^3$; quanto al denominatore, notando che $1 - e^{x-2x^2} \sim_0 -(x - 2x^2) \sim_0 -x$, si ha che se $\alpha < 0$ esso tende a $+\infty$, se $\alpha = 0$ tende a 2, se $0 < \alpha < 1$ è asintotico a $2x^\alpha$, se $\alpha = 1$ è asintotico a $2x - x = x$ mentre se $\alpha > 1$ è asintotico a $-x$. Pertanto $\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x)$ vale 0 se $\alpha < 1$ (più precisamente vale 0^- se $\alpha \le -1$ e vale 0^+ se $-1 < \alpha < 1$); vale 2 se $\alpha = 1$; e vale $-(\alpha+1)$ se $\alpha > 1$. • Passiamo a 1. Il numeratore tende a $\alpha + \sin 1$, mentre il denominatore tende a $3 - \frac{1}{e}$: dunque $\lim_{x\to 1} f_\alpha(x) = \frac{e(\alpha+\sin 1)}{3e-1}$. • Infine vediamo in $+\infty$. Se $\alpha \ne 0$ il numeratore è asintotico a αx, mentre se $\alpha = 0$ esso diventa $\sin x$; d'altra parte il denominatore tende a 1 (se $\alpha < 0$), a 3 (se $\alpha = 0$) oppure è asintotico a $2x^\alpha$ (se $\alpha > 0$). Pertanto $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$ vale $-\infty$ (se $\alpha < 0$), non esiste (se $\alpha = 0$), vale $+\infty$ (se $0 < \alpha < 1$), vale $\frac{1}{2}$ (se $\alpha = 1$) e vale 0^+ (se $\alpha > 1$).

4. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = |3\log|x| - 1| - x$ è dato da $x \ne 0$, e in esso la funzione è continua, anzi di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti tali che $3\log|x| - 1 \ne 0$, ovvero per $x \ne \pm\sqrt[3]{e} \sim \pm 1{,}4$ (invece per $x = \pm\sqrt[3]{e}$ sono attesi dei punti angolosi, ma per la conferma di ciò vedremo più tardi). Essendo $\log x = o_{+\infty}(x)$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$ sono determinati e valgono entrambi $+\infty$. È altresì immediato vedere che, nonostante f abbia parte principale $-x$ a $\mp\infty$, essa non ha asintoti lineari a $\mp\infty$ (infatti $f(x) - (-x)$, che ha parte principale $3\log|x|$, ha crescita logaritmica). Si ha $f(x) = 0$ quando $|3\log|x| - 1| = x$, che nell'ipotesi $x \ge 0$ equivale a $3\log x - 1 = \mp x$, ovvero $\log x = \frac{1+x}{3}$ (mai) oppure $\log x = \frac{1-x}{3}$, che dà $x = 1$. Si ha poi $f(x) > 0$ quando $|3\log|x| - 1| > x$: se $x < 0$ ciò è sempre vero, mentre se $x \ge 0$ equivale a $|3\log x - 1| > x$, ovvero $3\log x - 1 > x$ oppure $3\log x - 1 < -x$, ovvero $\log x > \frac{1+x}{3}$ (mai) oppure $\log x < \frac{1-x}{3}$, che dà $0 < x < 1$. Derivando per $x \ne \pm\sqrt[3]{e}$ si ottiene $f'(x) = \sigma\frac{3}{x} - 1$ con $\sigma = \operatorname{sign}(3\log|x| - 1)$ (dunque $\sigma = \pm 1$ a seconda che $|x| \gtrless \sqrt[3]{e}$). Se allora $|x| > \sqrt[3]{e}$ si ha $f'(x) = \frac{3}{x} - 1$, da cui $f'(x) = 0$ per $x = 3$ (accettabile) e $f'(x) > 0$ per $\sqrt[3]{e} < x < 3$, mentre se $|x| < \sqrt[3]{e}$ si ha $f'(x) = -\frac{3}{x} - 1$, da cui $f'(x) = 0$ per $x = -3$ (non accettabile) e $f'(x) > 0$ per $-\sqrt[3]{e} < x < 0$: pertanto $x = 3$ è un punto di massimo locale regolare (con $f(3) = 3\log 3 - 4 \sim -0{,}7$), mentre $x = \mp\sqrt[3]{e}$ sono di minimo locale singolare con $f(\mp\sqrt[3]{e}) = \pm\sqrt[3]{e} \sim \pm 1{,}4$ (si noti che $f'_-(\pm\sqrt[3]{e}) = -\frac{3}{\sqrt[3]{e}} - 1 \sim -3{,}1$ e $f'_+(\pm\sqrt[3]{e}) = \frac{3}{\sqrt[3]{e}} - 1 \sim 1{,}1$, dunque si tratta effettivamente di due punti angolosi). Infine, derivando ancora si ha $f''(x) = -\sigma\frac{3}{x^2}$, dunque f non ha flessi regolari, ed è convessa quando $\sigma = -1$ (cioè per $|x| < \sqrt[3]{e}$) e concava quando $\sigma = 1$ (cioè per $|x| > \sqrt[3]{e}$).

(b) • In -1, usando la scala delle potenze e ricordando che $\log(1+t) \sim_0 t$, posto $t = -(x+1)$ si ha $f(x) = |3\log|x| - 1| - x = 1 - 3\log(-x) - x = 2 - 3\log(1 + (-(x+1))) - (x+1) = 2 - 3\log(1+t) + t = 2 - 3(t - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)) + t = 2 - 2t + \frac{3}{2}t^2 + o_0(t^2) = 2 + 2(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 + o_{-1}((x+1)^2)$. • Usando la scala delle potenze con i logaritmi si ha già lo sviluppo cercato, in quanto $f(x) = |3\log|x| - 1| - x = 1 - 3\log x - x = -3\log x + 1 - x + o_0(x)$. • Ancora una volta, usando la scala delle potenze con i logaritmi si ha già lo sviluppo cercato, ovvero $f(x) = |3\log|x| - 1| - x = 3\log x - 1 - x = -x + 3\log x - 1 + o_{+\infty}(1)$.

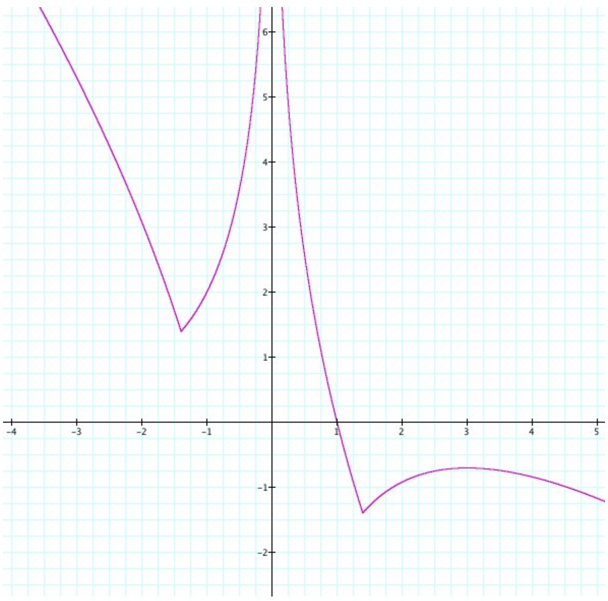
5. (a) (Figura 2) Nell'intervallo $[0, \pi]$, il solo che ci interessa ai fini del disegno di K, la funzione $\phi(x) = x\cos\frac{x}{2}$ si annulla in $x = 0$ e in $x = \pi$ ed è positiva altrove; la derivata $\phi'(x) = \cos\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ è nulla quando (posto $t = \frac{x}{2}$) si ha $\operatorname{cotg} t = t$, il che accade per un certo $t_0 \sim 0{,}9$, ovvero per un certo $x_0 = 2t_0 \sim 1{,}8$ in cui $f(x_0) = x_0\cos\frac{x_0}{2} \sim 1{,}1$; si ha poi $\phi'(x) > 0$ quando $0 \le t < t_0$, ovvero per $0 \le x < x_0$, dunque si tratta di un massimo locale; la derivata seconda $\phi''(x) = -\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$ si annulla solo in $x = 0$ in cui c'è un flesso, ed è < 0 in $]0, \pi[$ dove dunque f è concava. D'altra parte, la condizione $|x - y| \leq \pi$ indica la striscia obliqua di piano compresa tra le rette $y = x \mp \pi$. Ne deduciamo che l'area di K vale $\int_0^\pi x\cos\frac{x}{2}\,dx + \int_\pi^0 (x-\pi)\,dx = (2x\sin\frac{x}{2}]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin\frac{x}{2}\,dx + (\frac{1}{2}x^2 - \pi x]_\pi^0 = (2\pi) - (0) - [-4\cos\frac{x}{2}]_0^\pi + (0) - (-\frac{1}{2}\pi^2) = \frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi - 4 \sim 7{,}2$.

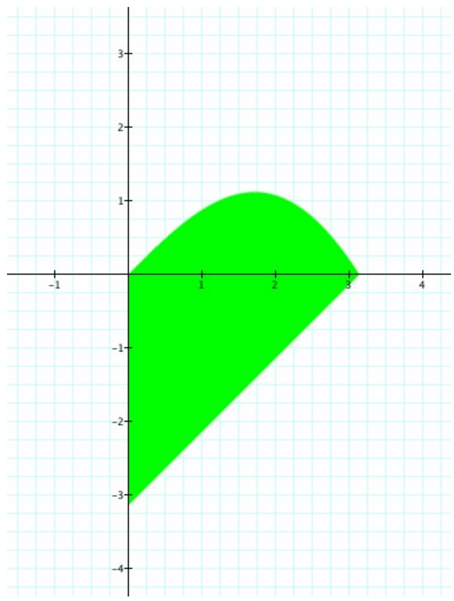
(b) L'integrale di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x^2\log|x| - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ (se $x \neq 0$) e $f(0) = 0$ si può fare su ogni intervallo compatto $[a, b]$ —in altre parole, f è localmente integrabile su tutto $\mathbb{R}$— perché f ha solo una discontinuità di salto in $x = 0$ (si noti che $f_\mp(0) = \lim_{x\to 0^\mp} f(x) = \pm\pi$). Si ha $\int 3x^2\log|x|\,dx = x^3\log|x| - \int x^3\frac{1}{x}\,dx = x^3(\log|x| + \frac{1}{3})$; su ognuno dei due intervalli $x \gtrless 0$ si ha poi $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = (\operatorname{sign} x)\frac{\pi}{2}x - \int \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{2}|x| + x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + k$. Dunque le funzioni integrali di $f(x)$ su $x \gtrless 0$ sono date da $F_\pm(x) = x^3(\log|x| + \frac{1}{3}) - \pi|x| - 2x\operatorname{arctg} x + \log(x^2+1) + k_\pm$ con costanti k_- e k_+ indipendenti tra loro; tuttavia, scegliendo tali costanti uguali tra loro (ad esempio entrambe nulle) le funzioni $F_\pm(x)$ possono essere incollate in una funzione $F(x)$ continua su tutto $\mathbb{R}$ dando a $F(0)$ tale valore comune, e l'integrale cercato sarà allora $\int_a^b f(x)\,dx = (F(b) - F(0)) + (F(0) - F(a)) = F(b) - F(a)$.

6. Si noti che la serie $\sum n\log(n^x + 1)$ è a termini positivi, dunque è determinata (convergerà a una somma positiva, o divergerà a $+\infty$). • Se $x \geq 0$ il termine generale $a_n = n\log(n^x+1)$ tende a $+\infty$ (in particolare non è infinitesimo), dunque la serie diverge a $+\infty$. • Se invece $x < 0$ allora n^x è infinitesimo, dunque (ricordando che $\log(1+t) \sim_0 t$) si ha che $a_n \sim n\,n^x = n^{x+1}$: pertanto (ricordando che la serie armonica $\sum n^t$ converge se e solo se $t < -1$) si ha che per $x + 1 \geq -1$ (cioè per $x \geq -2$) la serie diverge a $+\infty$, mentre converge per $x + 1 < -1$ (cioè per $x < -2$).

7. (a) È facile notare che $p(z) = 8z^6 + (1+8i)z^3 + i$ si scompone come $p(z) = (8z^3+1)(z^3+i)$, e dunque l'equazione $p(z) = 0$ equivale a $z^3 = -\frac{1}{8}$ oppure $z^3 = -i$ (in alternativa, posto $w := z^3$ si ha $8w^2 + (1+8i)w + i = 0$, da cui $w = \frac{-(1+8i)\pm\sqrt{(-(1+8i))^2 - 32i}}{16} = \frac{-(1+8i)\pm(1-8i)}{16}$, ovvero $w_1 = -i$ oppure $w_2 = -\frac{1}{8}$): si tratta dunque di trovare due famiglie di radici cubiche. Applicando de Moivre, la prima equazione $z^3 = -i$ dà $z_1 = i$, $z_2 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ e $z_3 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$, mentre la seconda $z^3 = -\frac{1}{8}$ dà $z_4 = \frac{1+\sqrt{3}i}{4}$, $z_5 = -\frac{1}{2}$ e $z_6 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}$.

(b) Denotiamo $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$. Data la funzione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $g(z) = z^2 + 3\bar{z}$, calcolare la fibra $g^{-1}(10)$ equivale a risolvere l'equazione $z^2 + 3\bar{z} = 10$ che equivale a $x^2 - y^2 + 2ixy + 3x - 3iy = 10$, ovvero al sistema dato da $x^2 - y^2 + 3x = 10$ e da $y(2x-3) = 0$. Dalla seconda si ricava che $y = 0$ oppure $x = \frac{3}{2}$: se $y = 0$ dalla prima si ha $x^2 + 3x - 10 = 0$, ovvero $x = -5$ oppure $x = 2$; se $x = \frac{3}{2}$, dalla prima si ha $-y^2 = \frac{13}{4}$, priva di soluzioni reali. Dunque $g^{-1}(10) = \{-5, 2\}$. L'immagine dell'asse immaginario $A = i\mathbb{R}$ è $g(A) = \{z = (it)^2 + 3\overline{it} : t \in \mathbb{R}\} = \{z = -t^2 - 3it : t \in \mathbb{R}\}$: sostituendo il parametro $t = -\frac{1}{3}y$ nell'altra equazione $x = -t^2$ si ottiene nel piano di Gauss il luogo $x = -\frac{1}{9}y^2$, una parabola avente l'asse reale come asse di simmetria. Infine, se $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ si ha $g^{-1}(B) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} g(z) > 0\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y(2x-3) > 0\}$: si tratta dei due quadranti traslati fatti dai numeri con $x > \frac{3}{2}$ e $y > 0$, oppure con $x < \frac{3}{2}$ e $y < 0$.





1. Grafico di $f(x) = |3\log|x| - 1| - x$ dell'Ex. 4. **2.** L'insieme S dell'Ex. 5.

Analisi Matematica I – 2a Prova Parziale ed Esame Scritto (10/12/2009) – $\boxed{\text{Tema A}}$ – Soluzioni.

1. L'insieme A è ottenuto unendo i punti di $A_1 = \{x > 0 : 2\cos(\frac{1}{x}) \geq 1\}$ e $A_2 = \{1 - (1 + \frac{2}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$. La condizione $2\cos(\frac{1}{x}) \geq 1$, ovvero $\cos(\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{2}$, con $x > 0$ dà $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{3}$ oppure $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \geq 1$, ovvero $\frac{3}{6k\pi+\pi} \leq x \leq \frac{3}{6k\pi-\pi}$ con $k \geq 1$ (una famiglia di intervalli che si accumula su 0^+) oppure $x \geq \frac{3}{\pi}$ (semiretta illimitata). Quanto a A_2, la successione $(1+\frac{2}{n})^n$ converge crescendo a e^2, dunque $1-(1+\frac{2}{n})^n$ converge decrescendo a $1 - e^2 \sim -6{,}3$. Pertanto A è limitato solo inferiormente, con $\inf A = 1 - e^2$; non è aperto (non è intorno di $\frac{3}{\pi}$) ne' chiuso (0 è di accumulazione ma non vi sta), non compatto, non discreto; è intorno dei punti di A_1 tranne quelli di bordo; i punti di aderenza sono tutti i suoi più 0, $1 - e^2$ e $+\infty$, quelli di accumulazione sono tutti quelli di A_1 più $1 - e^2$ e $+\infty$, mentre gli elementi di A_2 sono isolati; infine, i punti di frontiera sono tutti gli estremi di A_1, tutti i punti di A_2, 0, $1 - e^2$ e $+\infty$.

2. Sia $a_n = \frac{\exp(\alpha n)-n^\alpha+1}{\alpha-\log(n^\alpha+2)}$. • Se $\alpha > 0$, notando che $\log(n^\alpha + 2) = \log(n^\alpha(1 + \frac{2}{n^\alpha})) = \log(n^\alpha) + \log(1 + \frac{2}{n^\alpha}) = \alpha\log n + \log(1 + \frac{2}{n^\alpha})$ si ha $a_n = \frac{\exp(\alpha n)}{\log n}\frac{1-\frac{n^\alpha}{\exp(\alpha n)}+\frac{1}{\exp(\alpha n)}}{-\alpha+\frac{\alpha}{\log n}-\frac{\log(1+2/n^\alpha)}{\log n}}$, che tende a $-\infty$. • Se $\alpha = 0$, a_n è la costante $\frac{1}{-\log 3} = -\frac{1}{\log 3}$. • Se $\alpha < 0$ il numeratore tende a 1, il denominatore a $\alpha - \log 2$: dunque a_n tende a $\frac{1}{\alpha-\log 2}$.

3. Iniziamo dal caso particolare richiesto, ovvero $\alpha = 1$: sia $f(x) = \frac{x^2+2\cos x-2e^{x^3}}{\log(1+2x^3)-x^4}$. • In $-\infty$ si ha $2\cos x - 2e^{x^3} = o_{-\infty}(x^2)$ e $\log|1 + 2x^3| = o_{-\infty}(x^4)$, dunque il limite vale $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^4} = 0^-$. • In 0 il limite è in forma $\frac{0}{0}$. Al numeratore si ha $x^2+2(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^5))-2(1+x^3+o_0(x^5)) = -2x^3+o_0(x^3)$, mentre al denominatore si ha $2x^3+o_0(x^5)-x^4 = 2x^3+o_0(x^3)$: dunque il limite vale $\lim_{x\to0} \frac{-2x^3}{2x^3} = -1$. • In $+\infty$ si ha $2\cos x+x^2 = o_{+\infty}(-2e^{x^3})$ e $\log(1 + 2x^3) = o_{+\infty}(x^4)$, dunque il limite vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^{x^3}}{-x^4} = 0^+$.

Discutiamo ora il caso generale di $\alpha \in \mathbb{R}$: sia $f_\alpha(x) = \frac{x^2+2\cos(\alpha x)-2e^{x^3}}{\log|1+2x^3|-|x|^{4\alpha}}$. • In $-\infty$, se $\alpha > 0$ ragionando come prima il limite vale $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-|x|^{4\alpha}}$: dunque se $\alpha > \frac{1}{2}$ vale 0^-, se $\alpha = \frac{1}{2}$ vale -1 e se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ vale $-\infty$. Se invece $\alpha \leq 0$ si ha $|x|^{4\alpha} = o_{-\infty}(\log|1+2x^3|)$, dunque il limite vale $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\log|1+2x^3|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3\log|x|} = +\infty$. • In 0 il limite è ancora in forma $\frac{0}{0}$. Se $\alpha \neq \mp1$, al numeratore si ha $x^2 + 2(1 - \frac{1}{2}\alpha^2x^2 + o_0(x^3)) - 2(1 + x^3 + o_0(x^5)) = (1 - \alpha^2)x^2 + o_0(x^3)$, mentre al denominatore si ha $2x^3 + o_0(x^5) - |x|^{4\alpha}$: dunque se $\alpha > \frac{3}{4}$ il limite vale $\lim_{x\to0} \frac{(1-\alpha^2)x^2}{2x^3} = \infty$ e se $\alpha = \frac{3}{4}$ vale $\lim_{x\to0} \frac{(1-\alpha^2)x^2}{2x^3-|x|^3} = \infty$; se invece $\alpha < \frac{3}{4}$ il limite vale $\lim_{x\to0^\mp} \frac{(1-\alpha^2)x^2}{-|x|^{4\alpha}}$, che se $\alpha < \frac{1}{2}$ vale 0, se $\alpha = \frac{1}{2}$ vale $-(1-\alpha^2) = -\frac{3}{4}$ e se $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$ vale ∞. Nel caso particolare $\alpha = -1$ il numeratore è $-2x^3 + o_0(x^3)$ e il denominatore è $\sim_0 -\frac{1}{x^4}$, dunque il limite vale 0. • In $+\infty$ si ha $2\cos(\alpha x) + x^2 = o_{+\infty}(-2e^{x^3})$; il denominatore se $\alpha > 0$ è $\sim_{+\infty} -x^{4\alpha} = o_{+\infty}(e^{x^3})$ (dunque il limite vale $+\infty$), mentre se $\alpha \leq 0$ è $\sim_{+\infty} \log(1 + 2x^3) \sim_{+\infty} 3\log x = o_{+\infty}(e^{x^3})$ (dunque il limite vale $-\infty$).

4. (a) (Vedi Figura 1) Il dominio di $f(x) = \log(x - 2\sqrt{|x|} + 2)$ è dato da $x > 2\sqrt{|x|} - 2$: un confronto grafico tra x e $2\sqrt{|x|} - 2$ (la radice simmetrizzata con pendenza doppia e abbassata di 2) mostra in modo inequivocabile che ciò vale quando $x > \alpha$ per un certo $-1 < \alpha < 0$ (tale α è in realtà calcolabile perché, posto $x = -t^2$, l'equazione $x = 2\sqrt{|x|} - 2$ equivale a $-t^2 = 2t - 2$, ovvero $t^2 + 2t - 2 = 0$, ovvero $t = \sqrt{3} - 1$, da cui $\alpha = -(\sqrt{3} - 1)^2 = -2(2 - \sqrt{3}) \sim -0{,}5$). Nel dominio la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ tranne che eventualmente in $x = 0$ (in cui $f(0) = \log 2 \sim 0{,}7$), ove è certo continua ma probabilmente non derivabile a causa della radice. Vale $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty$; essendo poi $f(x) \sim_{+\infty} \log x$ si ha in particolare $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, con andamento logaritmico. La funzione si annulla quando $x - 2\sqrt{|x|} + 2 = 1$, ovvero $x - 2\sqrt{|x|} + 1 = 0$: per $x > 0$ ciò dà $x = 1$, mentre per $x < 0$, posto $x = -t^2$, si ottiene $t^2 + 2t - 1 = 0$, da cui $t = \sqrt{2} - 1$, da cui $x = \beta := -(3 - 2\sqrt{2}) \sim -0{,}2$. Per il segno, si ha $f(x) > 0$ per $x - 2\sqrt{|x|} + 1 > 0$: per $x > 0$ ciò è sempre vero (tranne che per $x = 1$), mentre per $x \leq 0$ si ottiene $\beta < x < 0$. Derivando per $x > \alpha$ e $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{1-\frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{|x|}}}{x-2\sqrt{|x|}+2}$: se $x < 0$ si ha sempre $f'(x) > 0$, mentre se $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$ per $x > 1$, dunque $x = 1$ è punto di minimo (con $f(1) = 0$). Notiamo altresì che vale $\lim_{x\to0^\mp} f'(x) = \pm\infty$: come previsto, la funzione non è derivabile in $x = 0$.

(b) • In 0 la funzione vale $\log 2$; poi $f(x) - \log 2 = \log(\frac{x-2\sqrt{|x|}+2}{2}) = \log(1 + (-\sqrt{|x|} + \frac{1}{2}x)) \sim_0 -\sqrt{|x|}$, dunque $f(x) = \log 2 - \sqrt{|x|} + o_0(\sqrt{|x|})$. • In 1 la funzione è infinitesima; posto $t = x - 1$ si ha $\log(x - 2\sqrt{|x|} + 2) = \log(t+1-2\sqrt{1+t}+2) = \log(1+(2-2\sqrt{1+t}+t))$; d'altra parte si ha $2-2\sqrt{1+t}+t = 2-2(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o_0(t^3))+t = \frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}t^3+o_0(t^3)$, dunque $\log(1+(2-2\sqrt{1+t}+t)) = (\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}t^3+o_0(t^3))-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}t^3+o_0(t^3))^2+o_0(t^4) = \frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}t^3+o_0(t^3)$, poi basta rimettere $t = x - 1$. • Si è già notato che $f(x) \sim_{+\infty} \log x$; poi $f(x) - \log x = \log(\frac{x-2\sqrt{x}+2}{x}) = \log(1 + (-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x})) \sim_{+\infty} -\frac{2}{\sqrt{x}}$, dunque $f(x) = \log x - \frac{2}{\sqrt{x}} + o_{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

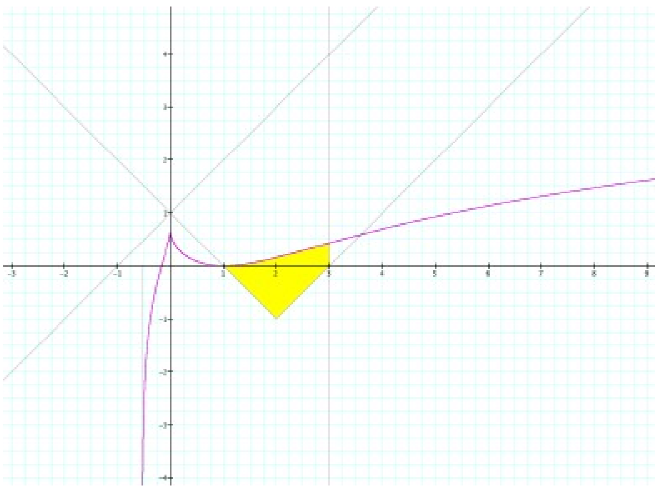
5. (a) Posto $x=t^2$ e poi integrando per parti si ha $\int \log(x-2\sqrt{x}+2)\,dx = \int 2t\log(t^2-2t+2)\,dt = t^2\log(t^2-2t+2) - \int t^2\frac{2(t-1)}{t^2-2t+2}\,dt$: essendo $t^3-t^2=(t^2-2t+2)(t+1)-2$ si ricava $\int \frac{2t^2(t-1)}{t^2-2t+2}\,dt = \int(2t+2-\frac{4}{t^2-2t+2})\,dt = t^2+2t-4\ \mathrm{arctg}\,(t-1)+k$, dunque $\int\log(x-2\sqrt{x}+2)\,dx = x\log(x-2\sqrt{x}+2)-x-2\sqrt{x}+4\ \mathrm{arctg}\,(\sqrt{x}-1)+k$. • (Vedi Figura 1) L'area dell'insieme $K=\{(x,y): |x-2|-1\le y\le f(x)\,,\ y-1\le x\le 3\}$ vale $\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^2(x-3)\,dx + \int_2^1(1-x)\,dx = (x\log(x-2\sqrt{x}+2)-x-2\sqrt{x}+4\ \mathrm{arctg}\,(\sqrt{x}-1)]_1^3 + (\frac{1}{2}x^2-3x]_3^2 + (x-\frac{1}{2}x^2]_2^1 = (3\log(5-2\sqrt{3})-3-2\sqrt{3}+4\ \mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}-1)) - (-3) + (-4) - (-\frac{9}{2}) + (\frac{1}{2}) - (0) = 3\log(5-2\sqrt{3})-2\sqrt{3}+4\ \mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}-1)+1 \sim 1{,}35$.

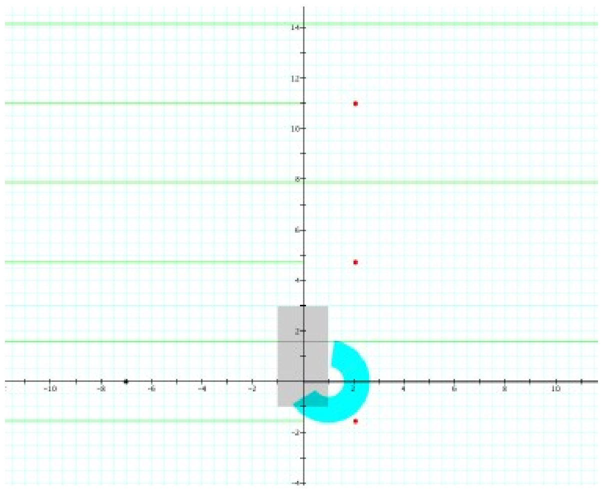
(b) La funzione integrale $G_\alpha(x)=\int_1^x g_\alpha(t)\,dt$ è senz'altro definita per $x\ge 0$ e sarà del tipo $G_\alpha(x)=x\log(x-2\sqrt{x}+2)-x-2\sqrt{x}+4\ \mathrm{arctg}\,(\sqrt{x}-1)+k$: la costante k si determina imponendo che $G_\alpha(1)=0$, ovvero $-1-2+k=0$, che dà $k=3$ (notare che allora $G_\alpha(0)=4\ \mathrm{arctg}\,(-1)+3=3-\pi$). Per poter definire $G_\alpha(x)$ anche per $x<0$ bisognerà che $\lim_{x\to 0^-}|x|^\alpha$ sia finito, e ciò accade solo quando $\alpha\ge 0$: in tal caso, essendo $\int|x|^\alpha\,dx = -\frac{|x|^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k'$, per $x<0$ tale funzione sarà del tipo $G_\alpha(x)=-\frac{|x|^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k'$; e imponendo la continuità in $x=0$ si ha $k'=3-\pi$. Ricapitolando, se $\alpha<0$ la funzione $G_\alpha(x)$ è definita (e $\mathcal{C}^\infty$) solo in $[0,+\infty[$, e vale $x\log(x-2\sqrt{x}+2)-x-2\sqrt{x}+4\ \mathrm{arctg}\,(\sqrt{x}-1)+3$; se $\alpha\ge 0$ è definita anche per $x<0$, con valore $-\frac{|x|^{\alpha+1}}{\alpha+1}+3-\pi$ (poiché per $\alpha\ge 0$ la funzione g_α ha una discontinuità di salto in $x=0$, si ha che $G_\alpha(x)$ è solo continua in $x=0$ e $\mathcal{C}^\infty$ altrove).

6. Interpretiamo la serie data $\sum a_n$ come $\sum(a'_n+a''_n)$, con $a'_n=\mathrm{arctg}\,(x^n)$ e $a''_n=3n^{x-1}$. • La serie $\sum a'_n$ converge assolutamente se $|x|<1$ (in tal caso infatti $|a'_n|=\mathrm{arctg}\,(|x^n|)\sim|x|^n$), diverge a $+\infty$ se $x\ge 1$ (infatti in tal caso a'_n tende a $\frac{\pi}{4}$ o a $\frac{\pi}{2}$) e non converge se $x\le -1$ (infatti in tal caso $|a'_n|$ tende a $\frac{\pi}{4}$ o a $\frac{\pi}{2}$). • Invece la serie $\sum a''_n$ converge se $x-1<-1$ (cioè se $x<0$) e diverge a $+\infty$ se $x-1\ge -1$ (cioè se $x\ge 0$). • Ricapitolando, se $x\ge 0$ senza dubbio la serie $\sum a_n$ diverge a $+\infty$; se $-1<x<0$ la serie converge; e se $x\le -1$ non converge.

7. (a) Le radici quarte di $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$ sono $z_k=\sqrt[4]{4}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})$ (con $k=0,1,2,3$), ovvero $z_0=1+i$, $z_1=-1+i$, $z_2=-1-i$, $z_3=1-i$; di queste, quelle con parte reale negativa sono z_1 e z_2, e delle due solo $z_1=-1+i$ risulta essere soluzione di $p(z)=2z^3+(2-i)z^2+(2+i)z+(1-i)=0$: in effetti, dividendo (ad esempio con Ruffini) $p(z)$ per $(z-z_1)$ si ottiene $p(z)=(z-z_1)(2z^2+iz+1)$, dunque le altre due soluzioni si trovano da $2z^2+iz+1=0$, ovvero $z=\frac{1}{4}(-i\pm\sqrt{-1-8})=\frac{1}{4}(-i\pm 3i)=\{\frac{1}{2}i,\,-i\}$.

(b) (Vedi Figura 2) In generale, notiamo che calcolare $g(z)=1-i\,e^z$ significa prima calcolare l'esponenziale e^z, poi ruotarlo in senso orario di $\frac{\pi}{2}$ (la moltiplicazione per $-i$) e infine traslarlo verso destra di 1 (l'addizione di 1). Per i calcoli, possiamo anche notare che $g(z)=w$ significa $e^z=i(w-1)$; inoltre, se $z=x+iy$ si ha $g(z)=1-i\,e^xe^{iy}=1+e^xe^{i(y-\frac{\pi}{2})}=(1+e^x\sin y)+i(-e^x\cos y)$. • La fibra $g^{-1}(-7)$ è data da $g(z)=1-i\,e^z=-7$, ovvero $e^z=-8i$: si tratta dunque del logaritmo complesso di $-8i=8e^{-\frac{\pi}{2}i}$, ovvero $g^{-1}(-7)=\{\log 8+i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi): k\in\mathbb{Z}\}$. • L'immagine del rettangolo $A=\{z=x+iy\in\mathbb{C}: |x|<1,\ -1<y<3\}$ tramite l'esponenziale è $\exp(A)=\{e^x(\cos y+i\sin y): |x|<1,\ -1<y<3\}$ (si tratta del "ventaglio" dei numeri complessi con modulo compreso tra $\frac{1}{e}$ e e e argomento compreso tra -1 e 3 radianti); pertanto, per quanto detto prima, l'immagine di A tramite $g(z)=1-i\,e^z$ è tale ventaglio ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario e poi traslato verso destra di 1. • L'antiimmagine del semiasse reale $B=[0,+\infty[$ è $g^{-1}(B)=\{z\in\mathbb{C}: g(z)\in B\}=\{z=x+iy: 1+e^x\sin y\ge 0,\ -e^x\cos y=0\}=\{z=x+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi): x\in\mathbb{R}\}\cup\{z=x+i(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi): x\le 0\}$.





(1) Grafico di $f(x)$ dell'esercizio 4, e insieme K dell'esercizio 5. **(2)** I luoghi del piano di Gauss dell'esercizio (7.b).