

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (15/12/2010)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema A

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : \arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}) < \frac{1}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{Q} : 4 \arctg(x + 2\pi) + \pi \geq 0\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in \mathbb{R} e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in \mathbb{R} ; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di \mathbb{R} e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. Determinare il limite della successione $a_n = \frac{(n+2)^{3\alpha} - (\alpha+2)^{3n}}{2\sqrt[3]{n} - \sin(n^\alpha - \alpha^n)}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).
3. Calcolare $\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{x^2 \sqrt[3]{|\log x|} - \sin \pi x}{x^\alpha |x^2 - 1|^{1-\alpha}}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...), al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \log(e^x + 2\sqrt{|x|}) - |x|$, e tracciarne il grafico.⁽²⁾
(b) Sviluppare asintoticamente $f(x)$ in $-\infty, 0^+, +\infty$ con almeno due termini significativi.
5. (a) Calcolare le primitive di $\varphi(x) = \frac{x^5}{x^4 - 8}$. Studiato poi brevemente l'andamento e disegnato il grafico di φ , disegnare e calcolare l'area di $K = \{(x, y) : |x - 3| \leq \min\{1, y\}, y \leq \varphi(x)\}$.
(b) Si può parlare di funzione integrale di $(\text{sign } x)|\cos x|$ di punto iniziale π ? Se sì, calcolarla.
6. Discutere il carattere delle seguenti serie numeriche al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
(a) $\sum_n \frac{(e^\alpha - 2)^n}{n^\alpha + \sqrt{n} + 1}$, (b) $\sum_n (\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{1}{n^{\alpha+1}}) - \arctg(n^{2\alpha}))$.
7. Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $z_\alpha = \alpha(-1 + i)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}^\times$, e trovarne le radici cubiche. Dire poi per quale $w \in \mathbb{C}$ il polinomio $p(z) = z^3 - iz^2 + iz + w$ ha z_1 tra le sue radici, trovando tutte le altre.

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o_0(x^6)$; $\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

⁽²⁾Non è richiesto lo studio della convessità.

1. L'insieme A è ottenuto intersecando $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}) < \frac{1}{2}\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} : 4 \operatorname{arctg}(x+2\pi) + \pi \geq 0\}$.
 La disequazione $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}) < \frac{1}{2}$ equivale al sistema tra $|\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}| \leq 1$ e $\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} < \sin \frac{1}{2}$; poiché $\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} > 0$ basta considerare la seconda, che equivale a $|x-1| > \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}} = \frac{2}{1-\cos 1}$, ovvero (considerando che $1 \sim \frac{\pi}{3}$ e dunque $\cos 1 \sim \frac{1}{2}$)
 a $x < x_0 := \frac{-1+\cos 1}{1-\cos 1} \sim -3$ oppure $x > x_1 := \frac{3-\cos 1}{1-\cos 1} \sim 5$. D'altra parte la disequazione $4 \operatorname{arctg}(x+2\pi) + \pi > 0$ equivale a $\operatorname{arctg}(x+2\pi) > -\frac{\pi}{4}$ ovvero $x+2\pi > -1$, cioè $x > -2\pi - 1 \sim -7,3$. Pertanto A è costituito dai punti razionali degli intervalli $[-2\pi - 1, x_0[\cup]x_1, +\infty[$. Si tratta di un insieme solo inferiormente limitato, con $\inf A = -2\pi - 1$ (sono evidentemente soddisfatte le due proprietà caratteristiche) ma senza minimo perché $-2\pi - 1$ è irrazionale; non è né aperto (non è intorno di alcuno dei suoi punti) né chiuso (ha punti di accumulazione che non gli appartengono, ad esempio $-2\pi - 1$), né compatto né discreto; è privo di punti interni e di punti isolati; tutti i punti di $[-2\pi - 1, x_0[\cup]x_1, +\infty[$ sono di aderenza, di accumulazione e di frontiera per A .
2. Nella successione $a_n = \frac{(n+2)^{3\alpha} - (\alpha+2)^{3n}}{2^{\frac{3}{\sqrt[3]{n}} - \sin(n^\alpha - \alpha^n)}}$ il denominatore tende a $+\infty$ con andamento dato dall'addendo $2^{\frac{3}{\sqrt[3]{n}}}$ (infatti $\frac{\sin(n^\alpha - \alpha^n)}{2^{\frac{3}{\sqrt[3]{n}}}}$, limitata su infinita, è infinitesima). Al numeratore, se $|\alpha+2|^3 > 1$, ovvero se $\alpha < -3$ oppure $\alpha > -1$, si tende a ∞ come l'esponenziale $(\alpha+2)^{3n}$ (infatti $\frac{(n+2)^{3\alpha}}{|\alpha+2|^{3n}}$ è infinitesima per il criterio del rapporto); quando invece $-3 < \alpha < -1$ il numeratore è infinitesimo, mentre per $\alpha = -3$ o $\alpha = -1$ esso diventa rispettivamente $(-1)^{n+1}$ o -1 . Pertanto, ricordando che se $|a| > 1$ allora $\frac{a^n}{n^\beta}$ tende a ∞ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto), possiamo concludere che se $\alpha < -3$ oppure $\alpha > -1$ la successione diverge a ∞ (in particolare diverge a $-\infty$ quando $\alpha > -1$); mentre invece per $-3 \leq \alpha \leq -1$ essa è infinitesima.
3. Sia $f(x) = \frac{x^2 \sqrt[3]{|\log x| - \sin \pi x}}{x^\alpha |x^2 - 1|^{1-\alpha}}$. • In 0^+ si ha $\sin \pi x \sim_0^* x$ e dunque, essendo $\lim_0^+ \frac{x^2 \sqrt[3]{|\log x|}}{x} = 0$, si ha $f(x) \sim_0 \frac{-\pi x}{x^\alpha} = -\pi x^{1-\alpha}$, perciò il limite vale $-\infty$ (se $\alpha < 1$), vale $-\pi$ (se $\alpha = 1$) e vale 0^- (se $\alpha > 1$). • In 1, posto $t = x - 1$ si ha $\lim_0 \frac{(1+t)^2 \sqrt[3]{|\log(1+t)| + \sin \pi t}}{|t|^{1-\alpha} (1+t)^\alpha (2+t)^{1-\alpha}}$. Poiché $\sqrt[3]{|\log(1+t)|} \sim_0 \sqrt[3]{|t|}$ e $\sin \pi t \sim_0^* t$ il numeratore è $\sim_0 \sqrt[3]{|t|}$ mentre il denominatore è $\sim_0 (2|t|)^{1-\alpha}$, pertanto il limite diventa $\lim_0 2^{\alpha-1} |t|^{\alpha-\frac{2}{3}}$, e dunque vale 0^+ (se $\alpha > \frac{2}{3}$), vale $2^{-\frac{1}{3}}$ (se $\alpha = \frac{2}{3}$) e vale $+\infty$ (se $\alpha < \frac{2}{3}$). • Infine, in $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^2 \sqrt[3]{\log x}}{x^\alpha (x^2)^{1-\alpha}} = x^\alpha \sqrt[3]{\log x}$, dunque il limite vale $+\infty$ (se $\alpha \geq 0$) e vale 0^+ (se $\alpha < 0$).
4. (a) (Figura 1) La funzione $f(x) = \log(e^x + 2\sqrt{|x|}) - |x|$ ha dominio tutto \mathbb{R} ed è \mathcal{C}^∞ tranne che in 0 dove (a causa della radice del modulo) è continua ma probabilmente con un punto cuspidale. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $e^x + 2\sqrt{|x|} = e^{|x|}$: per $x \geq 0$ ciò equivale a $\sqrt{x} = 0$ che dà $x = 0$, mentre per $x < 0$ dà $e^x + 2\sqrt{|x|} = e^{-x}$, ovvero $\sqrt{|x|} = -\sinh x$, e un facile confronto grafico mostra con chiarezza l'esistenza di un punto $x_0 \in]-1, 0[$ (in realtà si ha $x_0 \sim -0,8$) tale che ciò vale per $x = x_0$. In modo analogo si prova che $f(x) > 0$ quando $x_0 < x < 0$ oppure $x > 0$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$: sviluppando in $-\infty$ si ha $f(x) = \log(2\sqrt{|x|}(1 + \frac{e^x}{2\sqrt{|x|}})) - (-x) = x + \log 2 + \log(\sqrt{|x|}) + \log(1 + \frac{e^x}{2\sqrt{|x|}}) = x + \frac{1}{2} \log |x| + \log 2 + o_{-\infty}(1)$, dunque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (ma, visto lo sviluppo, senza asintoto lineare); sviluppando invece in $+\infty$ si ha $f(x) = \log(e^x(1+2e^{-x}\sqrt{x})) - x = \log(e^x) + \log(1+2e^{-x}\sqrt{x}) - x = x + 2e^{-x}\sqrt{x} - \frac{1}{2}(2e^{-x}\sqrt{x})^2 + o_{+\infty}((2e^{-x}\sqrt{x})^2) - x = 2\sqrt{x}e^{-2x} - 2xe^{-2x} + o_{+\infty}(xe^{-2x})$, da cui $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Derivando per $x \neq 0$, posto $\sigma := \operatorname{sign} x$ si ottiene $f'(x) = \frac{e^x + \sigma \frac{1}{\sqrt{|x|}}}{e^x + 2\sqrt{|x|}} - \sigma = \frac{(1-\sigma)\sqrt{|x|}e^x - 2x + \sigma}{e^x + 2\sqrt{|x|}}$: pertanto per $x > 0$ si ha $f'(x) \geq 0$ per $0 < x \leq \frac{1}{2}$ (con massimo locale stretto $f(\frac{1}{2}) = \log(\sqrt{e} + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \sim 0,6$), mentre per $x < 0$ si ha $f'(x) = \frac{2\sqrt{|x|}e^x - 2x - 1}{\sqrt{|x|}(e^x + 2\sqrt{|x|})}$ da cui $f'(x) \geq 0$ quando $e^x \geq \frac{2x+1}{2\sqrt{|x|}}$, e un altro confronto grafico mostra che esiste un punto $x_1 \in]x_0, 0[$ (in realtà si ha $x_1 \sim -0,2$) tale che ciò accade per $x < x_1$. Notiamo anche che, come previsto, $\lim_{x \rightarrow 0^\mp} f'(x) = \mp\infty$.
- (b) Gli sviluppi di $f(x)$ in $\mp\infty$ sono già stati fatti durante lo studio. Quanto a 0^+ , si ha $f(x) = \log(e^x + 2\sqrt{x}) - x = \log(1+t) - x$ con l'infinitesimo $t = e^x + 2\sqrt{x} - 1 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) + 2\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x} + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$, dunque $f(x) = (2\sqrt{x} + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)) - \frac{1}{2}(2\sqrt{x} + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2))^2 + o_0(2\sqrt{x})^2 - x = 2\sqrt{x} + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) - \frac{1}{2}(4x + x^2 + 4x\sqrt{x} + o_0(x^2)) + o_0(x) - x = 2\sqrt{x} - 2x + o_0(x)$.
5. (a) Posto $x^2 = t$, da cui $2x dx = dt$, si ottiene $\int \frac{x^5}{x^4 - 8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{t^2 - 8} dt = \frac{1}{2} \int (1 + \sqrt{2}(\frac{1}{t-2\sqrt{2}} - \frac{1}{t+2\sqrt{2}})) dt = \frac{1}{2}(t + \sqrt{2} \log|\frac{t-2\sqrt{2}}{t+2\sqrt{2}}|) + k = \frac{1}{2}(x^2 + \sqrt{2} \log|\frac{x^2-2\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}}|) + k$. L'andamento di $\varphi(x)$ è di facile studio (dispari, definita per $x \neq \pm\sqrt[4]{8}$, si annulla per $x = 0$ ed è positiva per $-\sqrt[4]{8} < x < 0$ e $x > \sqrt[4]{8} \sim 1,7$, asintoto lineare bilatero $y = x$, minimo locale in $\sqrt[4]{40} \sim 2,5$ che vale $\varphi(\sqrt[4]{40}) = \frac{5\sqrt[4]{40}}{4} \sim 3,1$); la condizione $|x-3| \leq \max\{1, y\}$ equivale poi al sistema tra $|x-3| \leq 1$ e $|x-3| \leq y$, dunque l'insieme K è quello rappresentato in Figura 2 e la sua area è $\int_2^4 \varphi(x) dx + \int_4^3 (x-3) dx + \int_3^2 (3-x) dx = 5 + \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} \sim 6$.

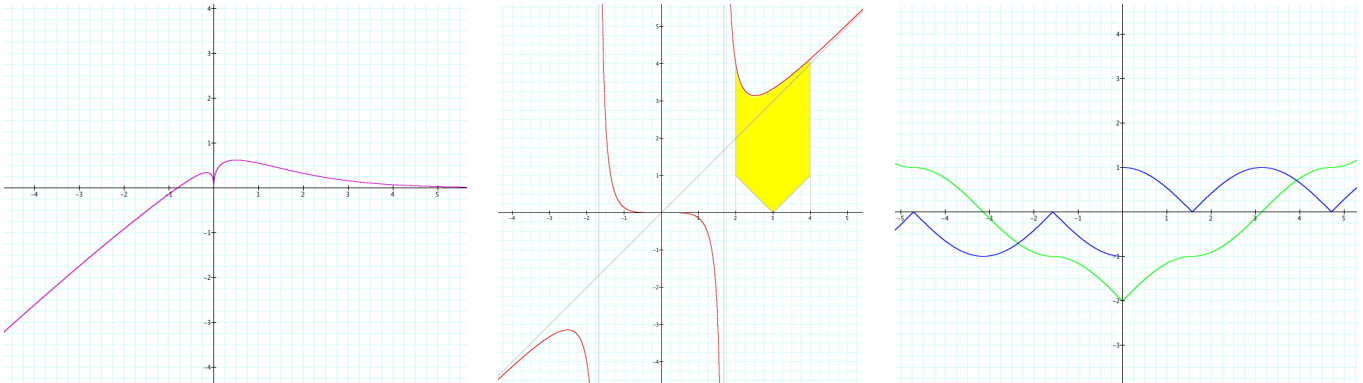
(b) (Figura 3) Ha certamente senso parlare di funzione integrale $\Psi(x)$ di $\psi(x) := (\text{sign } x)|\cos x|$ di punto iniziale π , perché $\psi(x)$ ha un solo punto di salto in $x = 0$ (con $\psi(0^+) = \mp 1$) e dunque è localmente integrabile; sappiamo anche che $\Psi(x)$ sarà derivabile per $x \neq 0$ e continua in 0, che sarà pari (infatti $\psi(x)$ è dispari) e che $\Psi(\pi) = 0$. Dovendo essere $\Psi'(x) = \psi(x)$ per $x \neq 0$, di certo su ogni intervallo $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ con $k \geq 1$ si avrà $\Psi(x) = (-1)^k \sin x + c_k$ per una certa costante c_k ; il fatto che $\Psi(\pi) = 0$ unito alla continuità di Ψ nei punti di passaggio dà $c_k = 2(k-1)$. Otteniamo dunque che su $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ con $k \geq 1$ vale $\Psi(x) = (-1)^k \sin x + 2(k-1)$; tale definizione in realtà vale anche quando $k = 0$ per $x \geq 0$ — ovvero in $[0, \frac{\pi}{2}]$ — con la precisazione che $\Psi(0) = -2$, ed estendendo poi anche su $]-\infty, 0[$ per parità.

6. Chiameremo a_n il termine generico della somma.

(a) Il criterio del rapporto dice che se $|e^\alpha - 2| < 1$ (ovvero se $0 < \alpha < \log 3$) c'è convergenza assoluta e che se $\alpha < 0$ oppure $\alpha > \log 3$ la serie non converge nemmeno semplicemente (in particolare se $\alpha > \log 3$ essa, essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$). Vediamo ora i casi dubbi: per $\alpha = 0$ si ottiene $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$, che converge semplicemente (Leibniz) ma non assolutamente (in quanto $|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}| \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, e $\frac{1}{2} < 1$); invece per $\alpha = \log 3$ si ha $\sum \frac{1}{n^{\log 3 + \sqrt{n+1}}}$, serie a termini positivi che converge (in quanto $\sim \frac{1}{n^{\log 3}}$, e $\log 3 > 1$).

(b) La serie $\sum (\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{1}{n^{\alpha+1}}) - \text{arctg}(n^{2\alpha}))$ ha sempre termine generale infinitesimo tranne quando $\alpha = 0$, caso in cui il termine generale è $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{2} - \text{arctg } 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} > 0$ e dunque la serie diverge a $+\infty$. • Quando $\alpha > 0$ il termine $\arcsin(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ è infinitesimo, mentre $\text{arctg}(n^{2\alpha})$ tende a $\frac{\pi}{2}^-$: converrà allora pensare ad $a_n = a'_n - a''_n$ con $a'_n = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(n^{2\alpha})$ e $a''_n = \arcsin(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$. Ricordando che $\frac{\pi}{2} - \text{arctg } x \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ e $\arcsin x \sim_0 x$ si ha $a'_n \sim n^{-2\alpha}$ e $a''_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sim n^{-\alpha}$, così che a_n è definitivamente negativa con $|a_n| \sim n^{-\alpha}$: per confronto con la serie aritmetica si ha che la serie converge se e solo se $-\alpha < -1$, ovvero $\alpha > 1$. • Quando $\alpha < 0$ i ruoli si invertono, nel senso che il termine $\arcsin(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ tende a $\frac{\pi}{2}$ mentre $\text{arctg}(n^{2\alpha})$ è infinitesimo: stavolta converrà pensare ad $a_n = a'_n - a''_n$ con $a'_n = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ e $a''_n = \text{arctg}(n^{2\alpha})$. Ricordiamo che $\text{arctg } x \sim_0 x$; d'altra parte, cercando la parte principale di $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ in $x = 1^-$, se $\gamma > 0$ il limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(1-x)^\gamma}$ è in forma $\frac{0}{0}$, dunque con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\gamma(1-x)^{\gamma-1}}$, che è finito (e vale $\sqrt{2}$) solo quando $\gamma = \frac{1}{2}$, il che significa che $\frac{\pi}{2} - \arcsin x \sim_{1^-} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$. Dunque $a'_n \sim \sqrt{1 - \frac{1}{n^{\alpha+1}}} = \sqrt{\frac{n^\alpha}{n^{\alpha+1}}} \sim n^{\frac{\alpha}{2}}$ e $a''_n \sim n^{2\alpha}$, così che a_n è definitivamente positiva con $a_n \sim n^{\frac{\alpha}{2}}$: e per confronto con la serie aritmetica si ha che la serie converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} < -1$, ovvero $\alpha < -2$. • Ricapitolando, la serie converge se e solo se $\alpha < -2$ o $\alpha > 1$.

7. Il numero complesso $z_\alpha = \alpha(-1 + i)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$, ha modulo $|\alpha|\sqrt{2}$ e argomento $\frac{3\pi}{4}$ (se $\alpha > 0$) o $-\frac{\pi}{4}$ (se $\alpha < 0$). Dunque se $\alpha > 0$ si ha $z_\alpha = \alpha\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ con radici cubiche $\sqrt[3]{\alpha\sqrt{2}}e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3})i}$ (dove $k = 0, 1, 2$); mentre se $\alpha < 0$ si ha $z_\alpha = |\alpha|\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ con radici cubiche $\sqrt[3]{|\alpha|\sqrt{2}}e^{(-\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3})i}$ (dove $k = 0, 1, 2$). • Dividendo con Ruffini $p(z) = z^3 - iz^2 + iz + w$ per $z - z_1$ si ottiene quoziente $z^2 - z + 1$ e resto $w - 1 + i$, dunque $p(z)$ ha z_1 tra le sue radici se e solo se $w = 1 - i$, e le altre due soluzioni sono date da $z^2 - z + 1 = 0$, ovvero $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (due radici cubiche di -1).



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$. 2. Ex. 5(a): grafico di $\varphi(x)$ e l'insieme K . 3. Ex. 5(b): grafico di $\psi(x)$ e della funzione integrale $\Psi(x)$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (15/12/2010)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema B

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $B = \{x \in \mathbb{R} : \pi + 4 \operatorname{arctg}(2\pi - x) \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{Q} : \arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x+1|}}) < \frac{1}{2}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in \mathbb{R} e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in \mathbb{R} ; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di \mathbb{R} e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per B .
2. Determinare il limite della successione $b_n = \frac{\cos(n^\alpha - \alpha^n) + 3\sqrt[4]{n}}{(\alpha + 3)^{3n} - (n + 3)^{3\alpha}}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).
3. Calcolare $\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{x^{1-\alpha}|x^2 - 1|^\alpha}{\sin 2\pi x + x^2\sqrt{|\log x|}}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...), al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = |x| - \log(e^{-x} + 2\sqrt{|x|})$, e tracciarne il grafico.⁽²⁾
(b) Sviluppare asintoticamente $f(x)$ in $-\infty$, 0^+ e $+\infty$ con almeno due termini significativi.
5. (a) Calcolare le primitive di $\varphi(x) = \frac{x^5}{x^4 + 6}$. Studiato poi brevemente l'andamento e disegnato il grafico di φ , disegnare e calcolare l'area di $K = \{(x, y) : y \leq \varphi(x), \min\{1, y\} \geq |x - 3|\}$.
(b) Si può parlare di funzione integrale di $(\operatorname{sign} x)(1 + |\sin x|)$ di punto iniziale π ? Se sì, calcolarla.
6. Discutere il carattere delle seguenti serie numeriche al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:
(a) $\sum_n \frac{(3 - e^\alpha)^n}{n + 2n^\alpha + 3}$, (b) $\sum_n (\operatorname{arctg}(n^{-2\alpha}) + \arcsin(\frac{n^\alpha}{n^\alpha + 1}) - \frac{\pi}{2})$.
7. Esprimere il numero complesso $z_\beta = \beta(1 - i)$, ove $\beta \in \mathbb{R}^\times$, in forma trigonometrica e determinarne le radici cubiche. Dire poi per quale $w \in \mathbb{C}$ il polinomio $p(z) = z^3 + iz^2 + iz + w$ ha z_1 tra le sue radici, trovando tutte le altre.

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o_0(x^6)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

⁽²⁾Non è richiesto lo studio della convessità.

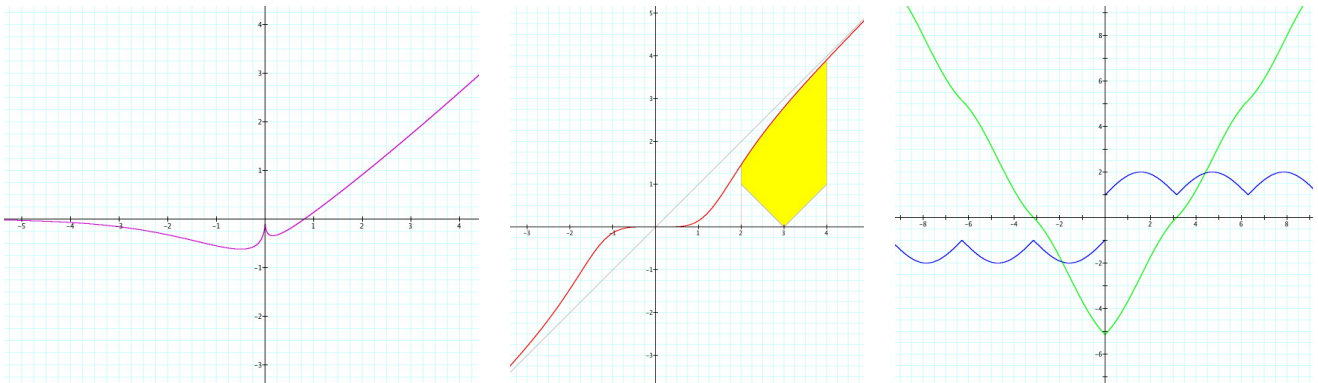
1. L'insieme B è ottenuto intersecando $B_1 = \{x \in \mathbb{Q} : \arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x+1|}}) < \frac{1}{2}\}$ e $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : \pi + 4 \arctg(2\pi - x) \geq 0\}$. La disequazione $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x+1|}}) < \frac{1}{2}$ equivale al sistema tra $|\frac{1}{\sqrt{|x+1|}}| \leq 1$ e $\frac{1}{\sqrt{|x+1|}} < \sin \frac{1}{2}$; poiché $\frac{1}{\sqrt{|x+1|}} > 0$ basta considerare la seconda, che equivale a $|x+1| > \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}} = \frac{2}{1-\cos 1}$, ovvero (considerando che $1 \sim \frac{\pi}{3}$ e dunque $\cos 1 \sim \frac{1}{2}$) a $x < x_0 := \frac{3-\cos 1}{1-\cos 1} \sim -5$ oppure $x > x_1 := \frac{1+\cos 1}{1-\cos 1} \sim 3$. D'altra parte la disequazione $\pi + 4 \arctg(2\pi - x) > 0$ equivale a $\arctg(2\pi - x) > -\frac{\pi}{4}$ ovvero $2\pi - x > -1$, cioè $x < 2\pi + 1 \sim 7,3$. Pertanto B è costituito dai punti razionali degli intervalli $]-\infty, x_0[\cup [x_1, 2\pi + 1[$. Si tratta di un insieme solo superiormente limitato, con $\sup B = 2\pi + 1$ (sono evidentemente soddisfatte le due proprietà caratteristiche) ma senza massimo perché $2\pi + 1$ è irrazionale; non è né aperto (non è intorno di alcuno dei suoi punti) né chiuso (ha punti di accumulazione che non gli appartengono, ad esempio $2\pi + 1$), né compatto né discreto; è privo di punti interni e di punti isolati; tutti i punti di $]-\infty, x_0[\cup [x_1, 2\pi + 1[$ sono di aderenza, di accumulazione e di frontiera per B .
2. Nella successione $b_n = \frac{\cos(n^\alpha - \alpha^n) + 3\sqrt[4]{n}}{(\alpha+3)^{3n} - (n+3)^{3\alpha}}$ il numeratore tende a $+\infty$ con andamento dato dall'addendo $3\sqrt[4]{n}$ (infatti $\frac{\cos(n^\alpha - \alpha^n)}{3\sqrt[4]{n}}$, limitata su infinita, è infinitesima). Al denominatore, se $|\alpha+3|^3 > 1$, ovvero se $\alpha < -4$ oppure $\alpha > -2$, si tende a ∞ come l'esponenziale $(\alpha+3)^{3n}$ (infatti $\frac{(n+3)^{3\alpha}}{|\alpha+3|^{3n}}$ è infinitesima per il criterio del rapporto); quando invece $-4 < \alpha < -2$ il denominatore è infinitesimo, mentre per $\alpha = -4$ o $\alpha = -2$ esso diventa rispettivamente $(-1)^n$ o 1. Pertanto, ricordando che se $|a| > 1$ allora $\frac{a^n}{n^\beta}$ tende a ∞ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto), possiamo concludere che se $\alpha < -4$ oppure $\alpha > -2$ la successione è infinitesima; mentre invece per $-4 \leq \alpha \leq -2$ essa diverge a ∞ (in particolare diverge a $+\infty$ quando $\alpha = -2$, e a $-\infty$ quando $-4 < \alpha < -2$).
3. Sia $f(x) = \frac{x^{1-\alpha}|x^2-1|^\alpha}{\sin 2\pi x + x^2\sqrt{|\log x|}}$. • In 0^+ si ha $\sin 2\pi x \sim_0^* x$ e dunque, essendo $\lim_0^+ \frac{x^2\sqrt{|\log x|}}{x} = 0$, si ha $f(x) \sim_0 \frac{x^{1-\alpha}}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}x^{-\alpha}$, perciò il limite vale $+\infty$ (se $\alpha > 0$), vale $\frac{1}{2\pi}$ (se $\alpha = 0$) e vale 0^+ (se $\alpha < 0$). • In 1, posto $t = x - 1$ si ha $\lim_0 \frac{|t|^\alpha(1+t)^{1-\alpha}(2+t)^\alpha}{\sin 2\pi t + (1+t)^2\sqrt{|\log(1+t)|}}$. Poiché $\sqrt{|\log(1+t)|} \sim_0 \sqrt{|t|}$ e $\sin 2\pi t \sim_0^* t$ il denominatore è $\sim_0 \sqrt{|t|}$ mentre il numeratore è $\sim_0 (2|t|)^\alpha$, pertanto il limite diventa $\lim_0 2^\alpha |t|^{\alpha-\frac{1}{2}}$, e dunque vale 0^+ (se $\alpha > \frac{1}{2}$), vale $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (se $\alpha = \frac{1}{2}$) e vale $+\infty$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$). • Infine, in $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^{1-\alpha}(x^2)^\alpha}{x^2\sqrt{\log x}} = x^{\alpha-1}(\log x)^{-\frac{1}{2}}$, dunque il limite vale $+\infty$ (se $\alpha > 1$) e vale 0^+ (se $\alpha \leq 1$).
4. (a) (Figura 1) La funzione $f(x) = |x| - \log(e^{-x} + 2\sqrt{|x|})$ ha dominio tutto \mathbb{R} ed è C^∞ tranne che in 0 dove (a causa della radice del modulo) è continua ma probabilmente con un punto cuspidale. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $e^{|x|} = e^{-x} + 2\sqrt{|x|}$: per $x \leq 0$ ciò equivale a $\sqrt{x} = 0$ che dà $x = 0$, mentre per $x > 0$ dà $e^x = e^{-x} + 2\sqrt{x}$, ovvero $\sinh x = \sqrt{x}$, e un facile confronto grafico mostra con chiarezza l'esistenza di un punto $x_0 \in]0, 1[$ (in realtà si ha $x_0 \sim 0,8$) tale che ciò vale per $x = x_0$. In modo analogo si prova che $f(x) > 0$ quando $x > x_0$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$: sviluppando in $+\infty$ si ha $f(x) = x - \log(2\sqrt{x}(1 + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}})) = x - \log 2 - \log(\sqrt{x}) - \log(1 + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}) = x - \frac{1}{2}\log|x| - \log 2 + o_{+\infty}(1)$, dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ma, visto lo sviluppo, senza asintoto lineare); sviluppando invece in $-\infty$ si ha $f(x) = -x - \log(e^{-x}(1 + 2e^x\sqrt{|x|})) = -x - \log(e^{-x}) - \log(1 + 2e^x\sqrt{|x|}) = -x - (-x) - 2e^x\sqrt{|x|} + \frac{1}{2}(2e^x\sqrt{|x|})^2 + o_{-\infty}((2e^x\sqrt{|x|})^2) = -2\sqrt{|x|}e^x + 2|x|e^{2x} + o_{-\infty}(|x|e^{2x})$, da cui $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Derivando per $x \neq 0$, posto $\sigma := \text{sign } x$ si ottiene $f'(x) = \sigma - \frac{e^{-x} + \sigma \frac{1}{\sqrt{|x|}}}{e^{-x} + 2\sqrt{|x|}} = \frac{(1+\sigma)\sqrt{|x|}e^{-x} + 2x - \sigma}{\sqrt{|x|}(e^{-x} + 2\sqrt{|x|})}$: pertanto per $x < 0$ si ha $f'(x) \geq 0$ per $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ (con minimo locale stretto $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \log(\sqrt{e} + \sqrt{2}) \sim -0,6$), mentre per $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}e^{-x} + 2x - 1}{\sqrt{x}(e^{-x} + 2\sqrt{x})}$ da cui $f'(x) \geq 0$ quando $e^{-x} \geq \frac{1-2x}{2\sqrt{x}}$, e un altro confronto grafico mostra che esiste un punto $x_1 \in]0, x_0[$ (in realtà si ha $x_1 \sim 0,2$) tale che ciò accade per $x > x_1$. Notiamo anche che, come previsto, $\lim_{x \rightarrow 0^\mp} f'(x) = \pm\infty$.
- (b) Gli sviluppi di $f(x)$ in $\mp\infty$ sono già stati fatti durante lo studio. Quanto a 0^+ , si ha $f(x) = x - \log(e^{-x} + 2\sqrt{x}) = x - \log(1+t) - x$ con l'infinitesimo $t = e^{-x} + 2\sqrt{x} - 1 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) + 2\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x} - x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$, dunque $f(x) = x - ((2\sqrt{x} - x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)) - \frac{1}{2}(2\sqrt{x} - x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2))^2 + o_0(2\sqrt{x})^2) = x - (2\sqrt{x} - x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)) - \frac{1}{2}(4x + x^2 - 4x\sqrt{x} + o_0(x^2)) + o_0(x) = -2\sqrt{x} + 4x + o_0(x)$.
5. (a) Posto $x^2 = t$, da cui $2x dx = dt$, si ottiene $\int \frac{x^5}{x^4+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{t^2+6} dt = \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{6}})^2+1}) dt = \frac{1}{2}(t - \sqrt{6} \arctg(\frac{t}{\sqrt{6}})) + k = \frac{1}{2}(x^2 - \sqrt{6} \arctg(\frac{x^2}{\sqrt{6}})) + k$. L'andamento di $\varphi(x)$ è di facile studio (dispari, definita ovunque, si annulla per $x = 0$ ed è positiva per $x > 0$, asintoto lineare bilatero $y = x$, flessi in $\mp\sqrt[4]{10}$); la condizione $|x-3| \leq \max\{1, y\}$ equivale poi al sistema tra $|x-3| \leq 1$ e $|x-3| \leq y$, dunque l'insieme K è quello rappresentato in Figura 2 e la sua area è $\int_2^4 \varphi(x) dx + \int_4^3 (x-3) dx + \int_3^2 (3-x) dx = 5 - \frac{\sqrt{6}}{2} \arctg \frac{12}{64+\sqrt{6}} \sim 4,8$.
- (b) (Figura 3) Ha certamente senso parlare di funzione integrale $\Psi(x)$ di $\psi(x) := (\text{sign } x)(1 + |\sin x|)$ di punto iniziale π , perché $\psi(x)$ ha un solo punto di salto in $x = 0$ (con $\psi(0^\mp) = \mp 1$) e dunque è localmente integrabile;

sappiamo anche che $\Psi(x)$ sarà derivabile per $x \neq 0$ e continua in 0, che sarà pari (infatti $\psi(x)$ è dispari) e che $\Psi(\pi) = 0$. Dovendo essere $\Psi'(x) = \psi(x)$ per $x \neq 0$, di certo su ogni intervallo $]k\pi, (k+1)\pi[$ con $k \geq 0$ si avrà $\Psi(x) = x + (-1)^{k+1} \cos x + c_k$ per una certa costante c_k ; il fatto che $\Psi(\pi) = 0$ unito alla continuità di Ψ nei punti di passaggio dà $c_k = 2(k-1) - \pi$. Otteniamo dunque che su $[k\pi, (k+1)\pi]$ con $k \geq 0$ vale $\Psi(x) = x + (-1)^{k+1} \cos x + 2(k-1) - \pi$, (con $\Psi(0) = -2 - \pi$), estesa poi anche su $] -\infty, 0[$ per parità.

6. Chiameremo a_n il termine generico della somma.

- (a) Il criterio del rapporto dice che se $|3 - e^\alpha| < 1$ (ovvero se $\log 2 < \alpha < 2 \log 2$) c'è convergenza assoluta e che se $\alpha < \log 2$ oppure $\alpha > 2 \log 2$ la serie non converge nemmeno semplicemente (in particolare se $\alpha < \log 2$ essa, essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$). Vediamo ora i casi dubbi: per $\alpha = 2 \log 2$ si ottiene $\sum \frac{(-1)^n}{n+2n^{2 \log 2+3}}$, che converge semplicemente (Leibniz) ma anche assolutamente (in quanto $|\frac{(-1)^n}{n+2n^{2 \log 2+3}}| \sim^* \frac{1}{n^{2 \log 2}}$, e $2 \log 2 > 1$); invece per $\alpha = \log 2$ si ha $\sum \frac{1}{n+2n^{\log 2+3}}$, serie a termini positivi che diverge (in quanto $\sim \frac{1}{n}$).
- (b) La serie $\sum (\operatorname{arctg}(n^{-2\alpha}) + \arcsin(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1}) - \frac{\pi}{2})$ ha sempre termine generale infinitesimo tranne quando $\alpha = 0$, caso in cui il termine generale è $\operatorname{arctg} 1 + \arcsin \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} < 0$ e dunque la serie diverge a $-\infty$. • Quando $\alpha < 0$ il termine $\arcsin(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1})$ è infinitesimo, mentre $\operatorname{arctg}(n^{-2\alpha})$ tende a $\frac{\pi}{2}^-$: converrà allora pensare ad $a_n = a_n'' - a_n'$ con $a_n' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n^{-2\alpha})$ e $a_n'' = \arcsin(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1})$. Ricordando che $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ e $\arcsin x \sim_0 x$ si ha $a_n' \sim n^{2\alpha}$ e $a_n'' \sim \frac{n^\alpha}{n^\alpha+1} \sim n^\alpha$, così che a_n è definitivamente positiva con $|a_n| \sim n^\alpha$: per confronto con la serie aritmetica si ha che la serie converge se e solo se $\alpha < -1$. • Quando $\alpha > 0$ i ruoli si invertono, nel senso che il termine $\arcsin(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1})$ tende a $\frac{\pi}{2}$ mentre $\operatorname{arctg}(n^{-2\alpha})$ è infinitesimo: stavolta converrà pensare ad $a_n = a_n'' - a_n'$ con $a_n' = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1})$ e $a_n'' = \operatorname{arctg}(n^{-2\alpha})$. Ricordiamo che $\operatorname{arctg} x \sim_0 x$; d'altra parte, cercando la parte principale di $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ in $x = 1^-$, se $\gamma > 0$ il limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{(1-x)^\gamma}$ è in forma $\frac{0}{0}$, dunque con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\gamma(1-x)^{\gamma-1}}$, che è finito (e vale $\sqrt{2}$) solo quando $\gamma = \frac{1}{2}$, il che significa che $\frac{\pi}{2} - \arcsin x \sim_{1^-} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$. Dunque $a_n' \sim^* \sqrt{1 - \frac{n^\alpha}{n^\alpha+1}} = \sqrt{\frac{1}{n^\alpha+1}} \sim n^{-\frac{\alpha}{2}}$ e $a_n'' \sim n^{-2\alpha}$, così che a_n è definitivamente negativa con $a_n \sim^* n^{-\frac{\alpha}{2}}$: e per confronto con la serie aritmetica si ha che la serie converge se e solo se $-\frac{\alpha}{2} < -1$, ovvero $\alpha > 2$. • Ricapitolando, la serie converge se e solo se $\alpha < -1$ o $\alpha > 2$.

7. Il numero complesso $z_\beta = \beta(-1+i)$, ove $\beta \in \mathbb{R}$, ha modulo $|\beta|\sqrt{2}$ e argomento $\frac{3\pi}{4}$ (se $\beta < 0$) o $-\frac{\pi}{4}$ (se $\beta > 0$). Dunque se $\beta < 0$ si ha $z_\beta = \beta\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ con radici cubiche $\sqrt[3]{\beta\sqrt{2}}e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3})i}$ (dove $k = 0, 1, 2$); mentre se $\beta > 0$ si ha $z_\beta = |\beta|\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ con radici cubiche $\sqrt[3]{|\beta|\sqrt{2}}e^{(-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3})i}$ (dove $k = 0, 1, 2$). • Dividendo con Ruffini $p(z) = z^3 + iz^2 + iz + w$ per $z - z_1$ si ottiene quoziente $z^2 + z + 1$ e resto $w + 1 - i$, dunque $p(z)$ ha z_1 tra le sue radici se e solo se $w = -1 + i$, e le altre due soluzioni sono date da $z^2 + z + 1 = 0$, cioè $z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (due radici cubiche di 1).



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$. 2. Ex. 5(a): grafico di $\varphi(x)$ e l'insieme K . 3. Ex. 5(b): grafico di $\psi(x)$ e della funzione integrale $\Psi(x)$.