Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (10/01/2011)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema A

A pie' pagina(1) alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} > 2|x-2| - 1\} \cup \{\frac{7n^\alpha}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A_α.

2. Determinare il dominio di $g(x) = 1 + \log(1 + \sin x)$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se la funzione è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva; calcolare $g([0, \frac{2\pi}{3}[)$.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{0^+,1,+\infty} \frac{\log(2x^2 + 3\sqrt{x} + e^{\alpha x})}{x^\alpha + 2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x})}$ per $\alpha = 1$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...). Discutere poi eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \sin\left(\frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi\right)$, e tracciarne il grafico.(2)

(b) Trovare gli sviluppi di $f(x)$ in 0^+ e $+\infty$ con almeno due termini significativi, e usarli per calcolare $\lim_{0^+,+\infty} f(x)|\log x|^\gamma$ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

5. Studiato brevemente l'andamento di $\varphi(x) = \dfrac{1 - 2\sin x}{2 + \sin x}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx$.

6. Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_n \left(n(2\alpha+1)^n + \alpha(2n+1)^\alpha\right)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. (a) Data $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = z(\bar{z}+2)$, trovare e disegnare le soluzioni di $h(z) + z^2 = 0$; detta w_0 la più vicina a $-2i$, determinarne il cubo e le radici quadrate in forma algebrica e trigonometrica.

(b) Calcolare le fibre di h su 0, 3 e $3i$, e dedurne informazioni su iniettività e suriettività di h. Calcolare poi la fibra $h^{-1}(w)$ al variare di $w \in \mathbb{C}$, e cercare un'inversa locale per h.

---

(1) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

(2) Non è richiesto lo studio della convessità.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (10/01/2011) – $\boxed{\text{Tema A}}$ – Soluzioni.

1. Si ha $A_\alpha = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} > 2|x-2| - 1\}$ e $A_2 = \{\frac{7n^\alpha}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Un facile confronto grafico mostra che $A_1 =]1, a[$ per un certo $a \in [3,4[$, e il conto dà $a = \frac{21+\sqrt{41}}{8} \sim 3{,}4$. Quanto a A_2, se $\alpha > 1$ si tratta di una successione crescente di punti che diverge a $+\infty$; se $\alpha = 1$ converge crescendo a $\frac{7}{2}$; e se $\alpha < 1$ converge a 0^+ decrescendo definitivamente (ma non superando mai $\frac{7}{2}$, perché $\frac{7n^\alpha}{2n+1} < \frac{7n}{2n+1}$ e quest'ultima cresce verso $\frac{7}{2}$). Dunque A_α è sempre inferiormente limitato (con inf $= 1$ se $\alpha \geq 1$, $= 0$ se $\alpha < 1$, ma senza min), ed è superiormente limitato se e solo se $\alpha \leq 1$ (con sup $< \frac{7}{2}$ se $\alpha < 1$, $= \frac{7}{2}$ se $\alpha = 1$; e se la successione di A_2 supera nei primi termini a allora il sup è anche max). In ogni caso non è aperto (non è intorno dei punti di A_2 che stanno fuori di A_1) ne' chiuso (non contiene il limite di A_2), ne' compatto ne' discreto. Punti interni sono quelli di A_1; di aderenza tutti i suoi più 1, a e il limite di A_2; di accumulazione tutti quelli di aderenza tranne quelli di A_2 che stanno fuori di A_1 (che sono isolati); infine, sono di frontiera i punti 1, a, i punti di A_2 che stanno fuori di A_1 e il limite di A_2.

2. (Figura 1) Il dominio di $g(x) = 1 + \log(1 + \sin x)$ è dato da $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; da $g(x) = y$ si ricava $\log(1 + \sin x) = y - 1$, da cui $1 + \sin x = e^{y-1}$, da cui $\sin x = e^{y-1} - 1$ (nell'ipotesi che $|e^{y-1} - 1| \leq 1$, ovvero $y \leq 1 + \log 2$). Dunque se $y > 1 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \varnothing$; se $y = 1 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; mentre se $y < 1 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \{\arcsin(e^{y-1} - 1) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(e^{y-1} - 1) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione non è dunque ne' iniettiva ne' suriettiva; vista la struttura delle sue fibre (in cui appaiono degli arco-seni e i loro supplementari), essa può essere resa biiettiva ad esempio restringendola a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e corestringendola alla sua immagine $]-\infty, 1 + \log 2]$, con inversa $g^{-1}(y) = \arcsin(e^{y-1} - 1)$. Per il calcolo di $g([0, \frac{2\pi}{3}[)$, vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $0 \leq \arcsin(e^{y-1} - 1)$ $(< \frac{2\pi}{3})$ e $(0 \leq)$ $\pi - \arcsin(e^{y-1} - 1) < \frac{2\pi}{3}$, ovvero $y \geq 1$ (senza scordare però che deve essere $y \leq 1 + \log 2$). Pertanto $g([0, \frac{2\pi}{3}[) = [1, 1 + \log 2]$.

3. Studiamo $\lim_{0^+,\,1,\,+\infty} \frac{\log(2x^2+3\sqrt{x}+e^{\alpha x})}{x^\alpha + 2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x})}$ prima per $\alpha = 1$ e poi per $\alpha \in \mathbb{R}$. • Per $\alpha = 1$ si ha $\lim_{0^+} \frac{\log(2x^2+3\sqrt{x}+e^{x})}{x + 2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x})}$. Essendo $2x^2 + 3\sqrt{x} + e^x = 2x^2 + 3\sqrt{x} + 1 + x + o_0(x) = 1 + 3\sqrt{x} + o_0(\sqrt{x})$ si ottiene $\log(2x^2 + 3\sqrt{x} + e^x) \sim_0 3\sqrt{x} + o_0(\sqrt{x}) \sim_0 3\sqrt{x}$; d'altra parte $x + 2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x}) = x + 2(-2\sqrt{x} + x^3) + o_0(\sqrt{x}) \sim_0 -4\sqrt{x}$. Dunque il limite diventa $\lim_{0^+} \frac{3\sqrt{x}}{-4\sqrt{x}} = -\frac{3}{4}$. Nel caso di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numeratore resta sempre $\sim_0 3\sqrt{x}$, mentre il denominatore è $\sim_0 x^\alpha$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$), $\sim_0 \sqrt{x} - 4\sqrt{x} = -3\sqrt{x}$ (se $\alpha = \frac{1}{2}$) o $\sim_0 -4\sqrt{x}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$), e dunque il limite vale 0 (se $\alpha < \frac{1}{2}$), vale -1 (se $\alpha = \frac{1}{2}$) e vale $-\frac{3}{4}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$). • Si ha $\lim_1 \frac{\log(2x^2+3\sqrt{x}+e^{x})}{x + 2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x})} = \frac{\log(e+5)}{1-\frac{\pi}{2}}$; per $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite vale $\frac{\log(e^\alpha+5)}{1-\frac{\pi}{2}}$. • Per $\alpha = 1$ si ha $\lim_{+\infty} \frac{\log(2x^2+3\sqrt{x}+e^{x})}{x + 2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x})}$: il numeratore è $\sim_{+\infty} \log(e^x) = x$, e anche il denominatore è $\sim_{+\infty} x$, dunque il limite vale 1. In generale, il numeratore è $\sim_{+\infty} \log(e^{\alpha x}) = \alpha x$ (se $\alpha > 0$) oppure $\sim_{+\infty} \log(2x^2) \sim_{+\infty} 2 \log x$ (se $\alpha \leq 0$), mentre il denominatore è $\sim_{+\infty} x^\alpha$ (se $\alpha > 0$), $\sim_{+\infty} 1 + \pi$ (se $\alpha = 0$) oppure $\sim_{+\infty} \pi$ (se $\alpha < 0$), dunque il limite vale 0 (se $\alpha > 1$), vale 1 (se $\alpha = 1$) oppure vale $+\infty$ (se $\alpha < 1$).

4. (a) (Figura 2) La funzione $f(x) = \sin(\frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi)$ è definita per $x \geq 0$, con $f(0) = \sin(-\pi) = 0$; essa è evidentemente limitata tra -1 e 1, ed è ovunque $\mathcal{C}^\infty$ tranne che in $x = 0$ ove è continua ma (a causa della radice) è atteso un punto a pendenza infinita. Vale $f(x) = 0$ quando $\frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero quando $3\sqrt{x} - 1 = k(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: un facile confronto grafico mostra che ciò accade solo per $k = 0$ (con $x = \frac{1}{9}$) e per $k = 1$ (con $x = 1$ e $x = 4$). Si ha poi $f(x) > 0$ quando $2k\pi < \frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi < (2k+1)\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $2k(x+1) < 3\sqrt{x} - 1 < (2k+1)(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: ciò accade solo quando $k = 0$ (con $\frac{1}{9} < x < 1$ oppure $x > 4$). L'unico limite interessante è in $+\infty$, e vale 0. Derivando per $x > 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{2\sqrt{x}+3-3x}{\sqrt{x}(x+1)^2} \cos(\frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi)$: vale dunque $f'(x) = 0$ quando $2\sqrt{x} = 3x - 3$ (il che accade per $x = x_1 := \frac{11+2\sqrt{10}}{9} \sim 1{,}9$) oppure quando $\frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $3\sqrt{x} - 1 = (k + \frac{1}{2})(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, e un altro confronto grafico mostra che ciò accade solo per $k = -1$ (con $x = x_2 := 19 - 6\sqrt{10} \sim 0{,}02$) e per $k = 0$ (con $x = x_3 := 15 - 6\sqrt{6} \sim 0{,}3$ e $x = x_4 \sim 15 + 6\sqrt{6} \sim 29{,}6$). Il fattore $2\sqrt{x} + 3 - 3x$ è positivo per $0 < x < x_1$, mentre $\cos(\frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi)$ lo è quando $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi < \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $(-\frac{1}{2} + 2k)(x+1) < 3\sqrt{x} - 1 < (\frac{1}{2} + 2k)(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, e ciò accade solo quando $k = 0$ con $x_2 < x < x_3$ oppure $x > x_4$: dunque $f'(x) > 0$ quando $x_2 < x < x_3$ oppure $x_1 < x < x_4$, e ne ricaviamo che $x = x_2$ e $x = x_1$ sono punti di minimo (con $f(x_2) = -1$ e $f(x_1) = \sin(\frac{\sqrt{10}-1}{2}\pi) \sim -0{,}25$) mentre $x = x_3$ e $x = x_4$ sono punti di massimo (con $f(x_3) = f(x_4) = 1$). Notiamo anche che, come atteso, si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.

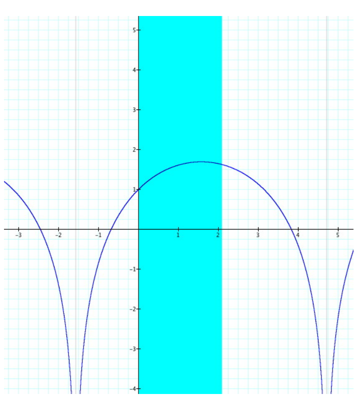
(b) In 0^+ e $+\infty$ la funzione è infinitesima; poniamo per comodità $\psi(x) := \frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi$. • In 0^+ si ha $\psi(0) = -\pi$, dunque $\psi(x) = -\pi + t$ con $t = \frac{3\sqrt{x}-1}{x+1}\pi + \pi = \frac{3\sqrt{x}+x}{x+1}\pi$ infinitesimo: essendo $t = (3\sqrt{x} + x)(1 - x + x^2 + o_0(x^2))\pi = 3\pi\sqrt{x} + \pi x + o_0(x)$, ne ricaviamo che $f(x) = \sin(t - \pi) = -\sin t = -t + \frac{1}{6}t^3 + o_0(t^4) = -3\pi\sqrt{x} - \pi x + o_0(x)$. • In $+\infty$ si ha $\lim_{+\infty} \psi(x) = 0$, e più precisamente $\psi(x) = \pi \frac{1}{x}(3\sqrt{x} - 1)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \pi(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})) = 3\pi\frac{1}{\sqrt{x}} - \pi\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$, dunque $f(x) = \sin(\psi(x)) = \psi(x) - \frac{1}{6}\psi^3(x) + o_{+\infty}(\psi^4(x)) = 3\pi\frac{1}{\sqrt{x}} - \pi\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$. • Infine, essendo $f(x) \sim_{0^+} -3\pi\sqrt{x}$ e $f(x) \sim_{+\infty} 3\pi\frac{1}{\sqrt{x}}$, i limiti $\lim_{0^+,+\infty} f(x)|\log x|^\gamma$ valgono sempre 0.

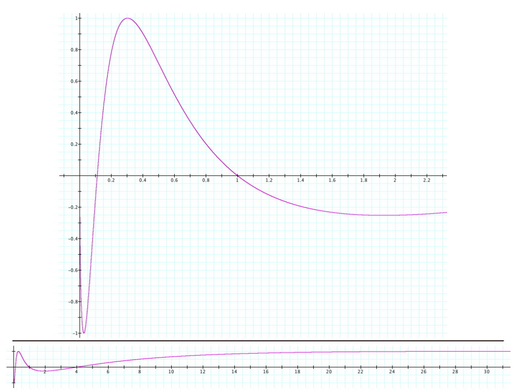
5. (Figura 3) La funzione $\varphi(x)=\frac{1-2\sin x}{2+\sin x}$ ha dominio $\mathbb{R}$ e periodo 2π, senza parità; studiata in $[-\pi,\pi]$ si annulla per $x=\frac{\pi}{6}$ e $x=\frac{5\pi}{6}$, ed è negativa tra i due. La derivata $\varphi'(x)=-\frac{5\cos x}{(2+\sin x)^2}$ si annulla in $x=\mp\frac{\pi}{2}$ ed è negativa tra i due, dunque f ha minimo assoluto $f(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{3}$ e massimo assoluto $f(-\frac{\pi}{2})=3$. Posto $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (da cui $x=2\operatorname{arctg} t$ e $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$) si ha poi $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5-2(2+\sin x)}{2+\sin x}\,dx=(-2x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+5\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=$ $-2\pi+5\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+t+1}\,dt=\frac{20}{3}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt-2\pi=\frac{10}{\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}]_{-1}^{1}-2\pi=\frac{10}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{6}))-2\pi=(\frac{5}{\sqrt{3}}-2)\pi\sim 2{,}75$.

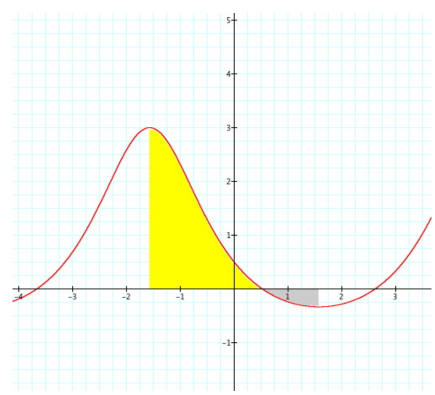
6. Detto a_n il termine generico della somma, conviene pensare a $a_n=a_n'+a_n''$ con $a_n'=n(2\alpha+1)^n$ e $a_n''=\alpha(2n+1)^\alpha$. • Per il criterio del rapporto la serie $\sum a_n'$ converge assolutamente quando $|2\alpha+1|<1$ (cioè $-1<\alpha<0$), non converge quando $\alpha<-1$ e diverge a $+\infty$ quando $\alpha>0$; per $\alpha=-1$ essa è $\sum(-1)^n n$ che non converge, mentre per $\alpha=0$ è $\sum n$ che diverge a $+\infty$. Pertanto per $\alpha\le-1$ la serie $\sum a_n'$ non converge; per $-1<\alpha<0$ converge assolutamente; e per $\alpha\ge0$ diverge a $+\infty$. • Per $\alpha=0$ la serie $\sum a_n''$ è nulla; negli altri casi essa è (a parte una costante moltiplicativa) asintotica alla serie armonica di esponente α, dunque converge se e solo se $\alpha<-1$. Pertanto se $\alpha<-1$ la serie $\sum a_n''$ converge (con somma negativa), se $-1\le\alpha<0$ diverge a $-\infty$, se $\alpha=0$ è nulla, mentre se $\alpha>0$ diverge a $+\infty$. • Ricapitoliamo ora cosa accade per $\sum a_n$. Di certo per $\alpha<-1$ la serie non converge; per $-1<\alpha<0$ diverge a $-\infty$; e per $\alpha\ge0$ diverge a $+\infty$. Resta da osservare più attentamente il caso $\alpha=-1$, in cui si ha $\sum((-1)^n n-\frac{1}{2n+1})$: il termine generale non è infinitesimo ed ha segno alterno, dunque la serie non converge.

7. (a) Se $h(z)=z(\bar z+2)$, l'equazione $h(z)+z^2=0$ equivale a $z(z+\bar z+2)=0$, cioè $z(\operatorname{Re} z+1)=0$: le soluzioni sono perciò $z=0$ e tutti i numeri del tipo $z=-1+iy$, una retta verticale nel piano di Gauss. Si ha dunque $w_0=-1-2i=\sqrt{5}\,e^{i\theta}$ con $\theta=\pi+\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. Il cubo è $w_0^3=5\sqrt{5}\,e^{3i\theta}$, ma per la forma algebrica è preferibile usare il binomio di Newton, che dà $w_0^3=(-1)^3+3(-1)^2(-2i)+3(-1)(-2i)^2+(-2i)^3=11+2i$. Le radici quadrate sono $\sqrt[4]{5}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ e $\sqrt[4]{5}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$; alla forma algebrica si può arrivare ricordando le formule di bisezione, o col calcolo diretto $(x+iy)^2=-1-2i$ che dà $\pm\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\Big)$.

(b) La fibra $h^{-1}(0)$ è data da $h(z)=z(\bar z+2)=0$, che ha soluzioni $z=0$ e $z=-2$, dunque h non è iniettiva; la stessa cosa ci dice $h^{-1}(3)$, che è data da $h(z)=z(\bar z+2)=3$, ovvero $|z|^2+2z-3=0$, che implica $z\in\mathbb{R}$ e dunque equivale a $z^2+2z-3=0$ ovvero $z=1$ e $z=-3$. Quanto a $h^{-1}(3i)$, che è data da $h(z)=z(\bar z+2)=3i$, posto $z=x+iy$ essa equivale a $(x^2+y^2+2x)+i(2y)=3i$, che equivale al sistema reale dato da $x^2+y^2+2x=0$ e $2y=3$, privo di soluzioni: dunque $h^{-1}(3i)=\varnothing$, e ciò dice che h non è suriettiva. Calcoliamo dunque $h^{-1}(w)$ al variare di $w\in\mathbb{C}$: posto $w=\alpha+i\beta$ si ottiene $(x^2+y^2+2x)+i(2y)=\alpha+i\beta$, da cui $y=\frac{1}{2}\beta$ e dunque $x^2+2x+\frac{1}{4}\beta^4-\alpha=0$, da cui $x=-1\mp\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2+\alpha}$ nell'ipotesi però che $\alpha\ge\frac{1}{4}\beta^2-1$ (giustamente soddisfatta da 0 e 3 ma non da $3i$). Dunque l'immagine di h è data dalla condizione $\alpha\ge\frac{1}{4}\beta^2-1$ (zona compresa all'interno di una parabola nel piano di Gauss delle $w=\alpha+i\beta$); e la fibra di h è fatta da un solo elemento per i w che stanno su quella parabola; da due elementi per i w all'interno; e da nessun elemento per i w al di fuori. Notando peraltro che, per i w interni alla parabola, i due elementi della fibra hanno parte reale $\lesseqgtr-1$, per rendere h biiettiva ci basterà restringere h ad esempio al semipiano $\operatorname{Re} z\ge-1$ e corestringerla alla sua immagine: la sua inversa sarà dunque $h^{-1}(w)=(-1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2+\alpha})+i\frac{1}{2}\beta$.







1. Ex. 2: grafico di $g(x)$. **2.** Ex. 4: grafico di $f(x)$. **3.** Ex. 5: grafico di $\varphi(x)$ e l'integrale richiesto.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (10/01/2011)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema B

A pie' pagina[1] alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $B_\alpha = \{\frac{5n^\alpha}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x+1|} > 2|x-1| - 1\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per B_α.

2. Determinare il dominio di $g(x) = \log(1 - \sin x) + 2$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se la funzione è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva; calcolare $g(]-\frac{2\pi}{3}, 0])$.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{0^+,1,+\infty} \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x}) + x^\alpha}{\log(e^{\alpha x} + 2x^2 + 3\sqrt{x})}$ per $\alpha = 1$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...). Discutere poi eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (a) Data la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi\right)$, studiarne l'andamento e tracciarne il grafico.[2]
(b) Trovare gli sviluppi di $f(x)$ in 0^+ e $+\infty$ con almeno due termini significativi, e usarli per calcolare $\lim_{0^+,+\infty} f(x)|\log x|^\gamma$ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

5. Data $\varphi(x) = \dfrac{1 - 2\sin x}{2 - \sin x}$, studiarne brevemente l'andamento e calcolare $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\,dx$.

6. Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_n \left(\alpha(2n-1)^\alpha + n(2\alpha - 1)^n\right)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. (a) Data $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = z(\bar{z} - 2)$, trovare e disegnare le soluzioni di $h(z) + z^2 = 0$; detta w_0 la più vicina a $2i$, determinarne il cubo e le radici quadrate in forma algebrica e trigonometrica.
(b) Calcolare le fibre di h su 0, 3 e $3i$, e dedurne informazioni su iniettività e suriettività di h. Calcolare poi la fibra $h^{-1}(w)$ al variare di $w \in \mathbb{C}$, e cercare un'inversa locale per h.

---

(1) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\mathrm{arctg}\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

(2) Non è richiesto lo studio della convessità.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (10/01/2011) – $\boxed{\text{Tema B}}$ – Soluzioni.

1. Si ha $B_\alpha = B_1 \cup B_2$ con $B_1 = \{\frac{5n^\alpha}{2n+3} : n \in \mathbb{N}\}$ e $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x+1|} > 2|x-1| - 1\}$. L'insieme B_1 è formato da una successione di punti che se $\alpha > 1$ diverge crescendo a $+\infty$; se $\alpha = 1$ converge crescendo a $\frac{5}{2}$; e se $\alpha < 1$ converge a 0^+ decrescendo definitivamente (ma non superando mai $\frac{5}{2}$, perché $\frac{5n^\alpha}{2n+3} < \frac{5n}{2n+3}$ e quest'ultima cresce verso $\frac{5}{2}$). D'altra parte, un facile confronto grafico mostra che $B_2 =]0, b[$ per un certo $b \in [2, 3[$, e il conto dà $b = \frac{13+\sqrt{41}}{8} \sim 2{,}4$. Dunque B_α è sempre inferiormente limitato (con inf $= 0$, ma senza min), ed è superiormente limitato se e solo se $\alpha \le 1$ (con sup $< \frac{5}{2}$ se $\alpha < 1$, $= \frac{5}{2}$ se $\alpha = 1$; e se la successione di B_1 supera nei primi termini b allora il sup è anche max). In ogni caso non è aperto (non è intorno dei punti di B_1 che stanno fuori di B_2) ne' chiuso (non contiene il limite di B_1), ne' compatto ne' discreto. Punti interni sono quelli di B_2; di aderenza tutti i suoi più 0, b e il limite di B_1; di accumulazione tutti quelli di aderenza tranne quelli di B_1 che stanno fuori di B_2 (che sono isolati); infine, sono di frontiera i punti 0, b, i punti di B_1 che stanno fuori di B_2 e il limite di B_1.

2. (Figura 1) Il dominio di $g(x) = \log(1 - \sin x) + 2$ è dato da $x \ne \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; da $g(x) = y$ si ricava $\log(1 - \sin x) = y - 2$, da cui $1 - \sin x = e^{y-2}$, da cui $\sin x = 1 - e^{y-2}$ (nell'ipotesi che $|1 - e^{y-2}| \le 1$, ovvero $y \le 2 + \log 2$). Dunque se $y > 2 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \varnothing$; se $y = 2 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; mentre se $y < 2 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \{\arcsin(1 - e^{y-2}) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(1 - e^{y-2}) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione non è dunque ne' iniettiva ne' suriettiva; vista la struttura delle sue fibre (in cui appaiono degli arco-seni e i loro supplementari), essa può essere resa biiettiva ad esempio restringendola a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e corestringendola alla sua immagine $]-\infty, 2 + \log 2]$, con inversa $g^{-1}(y) = \arcsin(1 - e^{y-2})$. Per il calcolo di $g(]-\frac{2\pi}{3}, 0])$, vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $(-\frac{2\pi}{3} <)\ \arcsin(1 - e^{y-2}) \le 0$ e $-\frac{2\pi}{3} < \pi - \arcsin(1 - e^{y-2}) - 2\pi\ (\le 0)$, ovvero $y \ge 2$ (senza scordare però che deve essere $y \le 2 + \log 2$). Pertanto $g(]-\frac{2\pi}{3}, 0]) = [2, 2 + \log 2]$.

3. Studiamo $\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x}) + x^\alpha}{\log(e^{\alpha x} + 2x^2 + 3\sqrt{x})}$ prima per $\alpha = 1$ e poi per $\alpha \in \mathbb{R}$. • Per $\alpha = 1$ si ha $\lim_{0^+} \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x}) + x}{\log(e^{x} + 2x^2 + 3\sqrt{x})}$. Essendo $e^x + 2x^2 + 3\sqrt{x} = 1 + x + o_0(x) + 2x^2 + 3\sqrt{x} = 1 + 3\sqrt{x} + o_0(\sqrt{x})$ si ottiene $\log(e^x + 2x^2 + 3\sqrt{x}) \sim_0 3\sqrt{x} + o_0(\sqrt{x}) \sim_0 3\sqrt{x}$; d'altra parte $2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x}) + x = 2(-2\sqrt{x} + x^3) + o_0(\sqrt{x}) + x \sim_0 -4\sqrt{x}$. Dunque il limite diventa $\lim_{0^+} \frac{-4\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = -\frac{4}{3}$. Nel caso di $\alpha \in \mathbb{R}$ il denominatore resta sempre $\sim_0 3\sqrt{x}$, mentre il numeratore è $\sim_0 x^\alpha$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$), $\sim_0 \sqrt{x} - 4\sqrt{x} = -3\sqrt{x}$ (se $\alpha = \frac{1}{2}$) o $\sim_0 -4\sqrt{x}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$), e dunque il limite vale $+\infty$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$), vale -1 (se $\alpha = \frac{1}{2}$) e vale $-\frac{4}{3}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$). • Si ha $\lim_1 \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x}) + x}{\log(e^x + 2x^2 + 3\sqrt{x})} = \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\log(e+5)}$; per $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite vale $\frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\log(e^\alpha + 5)}$.
• Per $\alpha = 1$ si ha $\lim_{+\infty} \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(x^3 - 2\sqrt{x}) + x}{\log(e^x + 2x^2 + 3\sqrt{x})}$: il numeratore è $\sim_{+\infty} x$, e anche il denominatore è $\sim_{+\infty} \log(e^x) = x$, dunque il limite vale 1. In generale, il numeratore è $\sim_{+\infty} x^\alpha$ (se $\alpha > 0$), $\sim_{+\infty} 1 + \pi$ (se $\alpha = 0$) oppure $\sim_{+\infty} \pi$ (se $\alpha < 0$), mentre il denominatore è $\sim_{+\infty} \log(e^{\alpha x}) = \alpha x$ (se $\alpha > 0$) oppure $\sim_{+\infty} \log(2x^2) \sim_{+\infty} 2\log x$ (se $\alpha \le 0$), dunque il limite vale $+\infty$ (se $\alpha > 1$), vale 1 (se $\alpha = 1$) oppure vale 0 (se $\alpha < 1$).

4. (a) (Figura 2) La funzione $f(x) = \sin(\frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi)$ è definita per $x \ge 0$, con $f(0) = \sin(-\pi) = 0$; essa è evidentemente limitata tra -1 e 1, ed è ovunque $\mathcal{C}^\infty$ tranne che in $x = 0$ ove è continua ma (a causa della radice) è atteso un punto a pendenza infinita. Vale $f(x) = 0$ quando $\frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero quando $1 - 3\sqrt{x} = k(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: un facile confronto grafico mostra che ciò accade solo per $k = -1$ (con $x = 1$ e $x = 4$) e per $k = 0$ (con $x = \frac{1}{9}$). Si ha poi $f(x) > 0$ quando $2k\pi < \frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi < (2k+1)\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $2k(x+1) < 1 - 3\sqrt{x} < (2k+1)(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: ciò accade quando $k = -1$ (con $1 < x < 4$) e quando $k = 0$ (con $0 < x < \frac{1}{9}$). L'unico limite interessante è in $+\infty$, e vale 0. Derivando per $x > 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{3x - 3 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)^2}\cos(\frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi)$: vale dunque $f'(x) = 0$ quando $2\sqrt{x} = 3x - 3$ (il che accade per $x = x_1 := \frac{11+2\sqrt{10}}{9} \sim 1{,}9$) oppure quando $\frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $1 - 3\sqrt{x} = (k + \frac{1}{2})(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, e un altro confronto grafico mostra che ciò accade solo per $k = -1$ (con $x = x_3 := 15 - 6\sqrt{6} \sim 0{,}3$ e $x = x_4 \sim 15 + 6\sqrt{6} \sim 29{,}6$) e per $k = 0$ (con $x = x_2 := 19 - 6\sqrt{10} \sim 0{,}02$). Il fattore $3x - 3 - 2\sqrt{x}$ è positivo per $x > x_1$, mentre $\cos(\frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi)$ lo è quando $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi < \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, ovvero $(-\frac{1}{2} + 2k)(x+1) < 1 - 3\sqrt{x} < (\frac{1}{2} + 2k)(x+1)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, e ciò accade solo quando $k = 0$ con $x_2 < x < x_3$ oppure $x > x_4$: dunque $f'(x) > 0$ quando $0 < x < x_2$ o $x > x_4$, e ne ricaviamo che $x = x_2$ e $x = x_1$ sono punti di massimo (con $f(x_2) = 1$ e $f(x_1) = \sin(\frac{1-\sqrt{10}}{2}\pi) \sim 0{,}25$) mentre $x = x_3$ e $x = x_4$ sono di minimo (con $f(x_3) = f(x_4) = -1$). Notiamo anche che, come atteso, si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$.

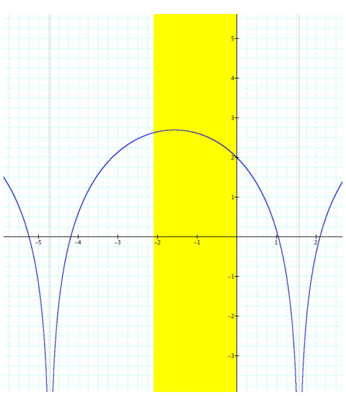
(b) In 0^+ e $+\infty$ la funzione è infinitesima; poniamo per comodità $\psi(x) := \frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi$. • In 0^+ si ha $\psi(0) = \pi$, dunque $\psi(x) = \pi + t$ con $t = \frac{1-3\sqrt{x}}{x+1}\pi - \pi = -\frac{3\sqrt{x}+x}{x+1}\pi$ infinitesimo: essendo $t = -(3\sqrt{x} + x)(1 - x + x^2 + o_0(x^2))\pi = -3\pi\sqrt{x} - \pi x + o_0(x)$, ne ricaviamo che $f(x) = \sin(\pi + t) = -\sin t = -t + \frac{1}{6}t^3 + o_0(t^4) = 3\pi\sqrt{x} + \pi x + o_0(x)$. • In $+\infty$ si ha $\lim_{+\infty} \psi(x) = 0$, e più precisamente $\psi(x) = \pi\frac{1}{x}(-3\sqrt{x} + 1)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \pi(-\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})) = -3\pi\frac{1}{\sqrt{x}} + \pi\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$, dunque $f(x) = \sin(\psi(x)) = \psi(x) - \frac{1}{6}\psi^3(x) + o_{+\infty}(\psi^4(x)) = -3\pi\frac{1}{\sqrt{x}} + \pi\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$.
• Infine, essendo $f(x) \sim_{0^+} 3\pi\sqrt{x}$ e $f(x) \sim_{+\infty} -3\pi\frac{1}{\sqrt{x}}$, i limiti $\lim_{0^+, +\infty} f(x)|\log x|^\gamma$ valgono sempre 0.

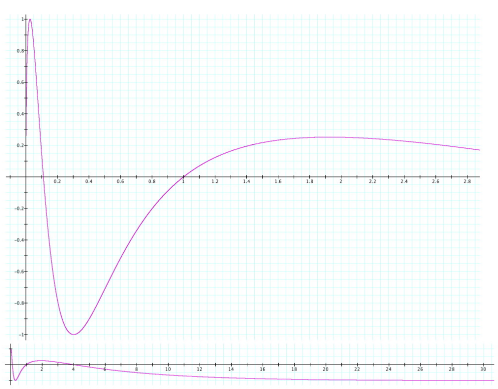
5. (Figura 3) La funzione $\varphi(x)=\frac{1-2\sin x}{2-\sin x}$ ha dominio $\mathbb{R}$ e periodo 2π, senza parità; studiata in $[-\pi,\pi]$ si annulla per $x=\frac{\pi}{6}$ e $x=\frac{5\pi}{6}$, ed è negativa tra i due. La derivata $\varphi'(x)=-\frac{3\cos x}{(2-\sin x)^2}$ si annulla in $x=\mp\frac{\pi}{2}$ ed è negativa tra i due, dunque f ha minimo assoluto $f(\frac{\pi}{2})=-1$ e massimo assoluto $f(-\frac{\pi}{2})=1$. Posto $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (da cui $x=2\operatorname{arctg}t$ e $dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$) si ha poi $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-3+2(2-\sin x)}{2-\sin x}\,dx=(2x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-3\int_{-1}^{1}\frac{1}{2-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=2\pi-3\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2-t+1}\,dt=2\pi-4\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt=2\pi-2\sqrt{3}(\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}]_{-1}^{1}=2\pi-2\sqrt{3}(\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{3}))=(2-\sqrt{3})\pi\sim 0{,}84$.

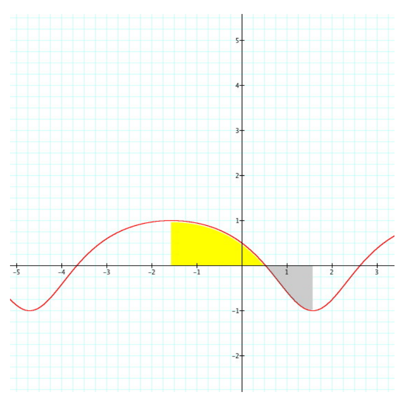
6. Detto a_n il termine generico della somma, conviene pensare a $a_n=a_n'+a_n''$ con $a_n'=\alpha(2n-1)^\alpha$ e $a_n''=n(2\alpha-1)^n$. • Per $\alpha=0$ la serie $\sum a_n'$ è nulla; negli altri casi essa è (a parte una costante moltiplicativa) asintotica alla serie armonica di esponente α, dunque converge se e solo se $\alpha<-1$. Pertanto se $\alpha<-1$ la serie $\sum a_n'$ converge (con somma negativa), se $-1\le\alpha<0$ diverge a $-\infty$, se $\alpha=0$ è nulla, mentre se $\alpha>0$ diverge a $+\infty$. • Per il criterio del rapporto la serie $\sum a_n''$ converge assolutamente quando $|2\alpha-1|<1$ (cioè $0<\alpha<1$), non converge quando $\alpha<0$ e diverge a $+\infty$ quando $\alpha>1$; per $\alpha=0$ essa è $\sum(-1)^n n$ che non converge, mentre per $\alpha=1$ è $\sum n$ che diverge a $+\infty$. Pertanto per $\alpha\le 0$ la serie $\sum a_n''$ non converge; per $0<\alpha<1$ converge assolutamente; e per $\alpha\ge 1$ diverge a $+\infty$. • Ricapitoliamo ora cosa accade per $\sum a_n$. Di certo per $\alpha<-1$ e per $\alpha=0$ la serie non converge, e per $\alpha>0$ diverge a $+\infty$. Resta da osservare più attentamente il caso $-1<\alpha<0$: essendo $\lim\frac{a_n'}{a_n''}=0$ si ha che il termine generale non è infinitesimo ed ha segno alterno, dunque la serie non converge.

7. (a) Se $h(z)=z(\bar{z}-2)$, l'equazione $h(z)+z^2=0$ equivale a $z(z+\bar{z}-2)=0$, cioè $z(\operatorname{Re}z-1)=0$: le soluzioni sono perciò $z=0$ e tutti i numeri del tipo $z=1+iy$, una retta verticale nel piano di Gauss. Si ha dunque $w_0=1+2i=\sqrt{5}\,e^{i\theta}$ con $\theta=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. Il cubo è $w_0^3=5\sqrt{5}\,e^{3i\theta}$, ma per la forma algebrica è preferibile usare il binomio di Newton, che dà $w_0^3=(1)^3+3(1)^2(2i)+3(1)(2i)^2+(2i)^3=-11-2i$. Le radici quadrate sono $\sqrt[4]{5}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ e $\sqrt[4]{5}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$; alla forma algebrica si può arrivare ricordando le formule di bisezione, o col calcolo diretto $(x+iy)^2=1+2i$ che dà $\pm\big(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,\big)$.

(b) La fibra $h^{-1}(0)$ è data da $h(z)=z(\bar{z}-2)=0$, che ha soluzioni $z=0$ e $z=2$, dunque h non è iniettiva; la stessa cosa ci dice $h^{-1}(3)$, che è data da $h(z)=z(\bar{z}-2)=3$, ovvero $|z|^2-2z-3=0$, che implica $z\in\mathbb{R}$ e dunque equivale a $z^2-2z-3=0$ ovvero $z=-1$ e $z=3$. Quanto a $h^{-1}(3i)$, che è data da $h(z)=z(\bar{z}-2)=3i$, posto $z=x+iy$ essa equivale a $(x^2+y^2-2x)+i(-2y)=3i$, che equivale al sistema reale dato da $x^2+y^2-2x=0$ e $-2y=3$, privo di soluzioni: dunque $h^{-1}(3i)=\varnothing$, e ciò dice che h non è suriettiva. Calcoliamo dunque $h^{-1}(w)$ al variare di $w\in\mathbb{C}$: posto $w=\alpha+i\beta$ si ottiene $(x^2+y^2-2x)+i(-2y)=\alpha+i\beta$, da cui $y=-\frac{1}{2}\beta$ e dunque $x^2-2x+\frac{1}{4}\beta^4-\alpha=0$, da cui $x=1\mp\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2+\alpha}$ nell'ipotesi però che $\alpha\ge\frac{1}{4}\beta^2-1$ (giustamente soddisfatta da 0 e 3 ma non da $3i$). Dunque l'immagine di h è data dalla condizione $\alpha\ge\frac{1}{4}\beta^2-1$ (zona compresa all'interno di una parabola nel piano di Gauss delle $w=\alpha+i\beta$); e la fibra di h è fatta da un solo elemento per i w che stanno su quella parabola; da due elementi per i w all'interno; e da nessun elemento per i w al di fuori. Notando peraltro che, per i w interni alla parabola, i due elementi della fibra hanno parte reale $\leqslant 1$, per rendere h biiettiva ci basterà restringere h ad esempio al semipiano $\operatorname{Re}z\ge 1$ e corestringerla alla sua immagine: la sua inversa sarà dunque $h^{-1}(w)=(1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\beta^2+\alpha})-i\frac{1}{2}\beta$.







1. Ex. 2: grafico di $g(x)$. **2.** Ex. 4: grafico di $f(x)$. **3.** Ex. 5: grafico di $\varphi(x)$ e l'integrale richiesto.