Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (04/07/2011)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq 1 - x\,,\ 0 < x \leq 4\} \cup \{1 - 3^n : n \in \mathbb{Z}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{(\alpha-1)^n - 2(n-1)^\alpha}{1 + 3n^{1-\alpha}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati specifici (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{-\infty,\,0,\,+\infty} \frac{1 + 2e^{-x^2} - 3\cos 2x - 4x^2 + 3x^3}{x^4 + 2\sin^3 x - 3\,\mathrm{arctg}\,(x^3)}$ con l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...).

4. Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha x - 3}{e^x - 3}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Studiare l'andamento di $f_2(x)$ (ovvero con $\alpha = 2$), e tracciarne il grafico.

(b) Determinare le parti principali di $f_\alpha(x)$ in $-\infty$, 0, 1 e $+\infty$. Esiste qualche α per cui $f_\alpha(x)$ è prolungabile a una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

5. Posto $\varphi(x) = f_0(x)^2$ (vedi Ex. 4), calcolare $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx$.

6. Discutere il carattere delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)}\ \sum_n \frac{x^n\,(n!)^{x^2-1}}{2n+1}\,, \qquad \text{(b)}\ \sum_n \left(n^x\,\sqrt[3]{1 + n^{3x}} - n^{-x-3}\right).$$

7. Trovare $w \in \mathbb{C}$ tale che $\overline{w}^2 = 2w$ e $\mathrm{Im}\,w < 0$, e $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^2 + 28 = 10z$ e $\mathrm{Im}\,z > 0$. Determinare infine le radici quarte di $-w - z$.

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\mathrm{arctg}\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (04/07/2011) – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq 1 - x\,,\ 0 < x \leq 4\}$ e $A_2 = \{1 - 3^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Un facile confronto grafico mostra che $A_1 = [1, 4]$, mentre $A_2 = \{\dots, 1 - 81, 1 - 27, 1 - 9, 1 - 3, 1 - 1, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{9}, 1 - \frac{1}{27}, 1 - \frac{1}{81}, \dots\} = \{\dots, -80, -26, -8, -2, 0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \frac{80}{81}, \dots\}$ (famiglia di punti che da un lato tende a $-\infty$, dall'altro si accumula su 1^-). Dunque A è inferiormente illimitato e superiormente limitato, con $\max A = 4$; i suoi punti interni sono quelli di $]1, 4[$; quelli di chiusura sono tutti i suoi più $-\infty$, e, tra questi, quelli isolati sono quelli di A_2, mentre quelli di accumulazione sono $-\infty$ e quelli di $[1, 4]$. Ne ricaviamo che A non è aperto (ad esempio non è intorno del suo punto 4) e che A è chiuso in $\mathbb{R}$ (contiene tutte le sue accumulazioni in $\mathbb{R}$) ma non in $\widetilde{\mathbb{R}}$ (non contiene la sua accumulazione $-\infty$); non è ne' compatto ne' discreto. Infine, sono di frontiera i punti $-\infty$, quelli di A_2, 1 e 4.

2. Iniziamo con l'esaminare, nella successione $a_n = \frac{(\alpha-1)^n - 2(n-1)^\alpha}{1+3n^{1-\alpha}}$, il comportamento degli addendi al variare di α. Si ha che $(\alpha - 1)^n$ tende a 0 se $-1 < \alpha - 1 < 1$ (ovvero se $0 < \alpha < 2$); vale 1 se $\alpha = 2$; tende a $+\infty$ se $\alpha - 1 > 1$ (ovvero se $\alpha > 2$); è la successione alternante $(-1)^n$ se $\alpha = 0$; ed è una successione alternante che tende a ∞ se $\alpha < 0$. Invece $-2(n-1)^\alpha$ tende 0 se $\alpha < 0$, vale -2 se $\alpha = 0$, e tende a $-\infty$ se $\alpha > 0$. Al denominatore, $3n^{1-\alpha}$ tende a $+\infty$ se $1 - \alpha > 0$ (ovvero se $\alpha < 1$), vale 3 se $\alpha = 1$, e tende a 0 se $1 - \alpha < 0$ (ovvero se $\alpha > 1$). Ricordando che se $\gamma > 1$ allora $\lim \frac{\gamma^n}{n^\delta} = +\infty$ per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto per le successioni), possiamo allora concludere che se $\alpha < 0$ la successione a_n è una successione alternante che tende a ∞; se $\alpha = 0$ essa tende a 0; mentre quando $\alpha \geq 1$ essa tende a $-\infty$ (se $1 \leq \alpha \leq 2$) o a $+\infty$ (se $\alpha > 2$). Il caso dubbio è quello in cui $0 < \alpha < 1$, perché sopra e sotto i termini prevalenti sono delle potenze a esponente positivo: confrontando tali esponenti, si ha $\alpha \geq 1 - \alpha$ se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{2}$, dunque se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ la successione a_n tende a 0; se $\alpha = \frac{1}{2}$ tende a $-\frac{2}{3}$; mentre se $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ tende a $-\infty$. • Ricapitolando: la successione a_n è alternante e tendente a ∞ quando $\alpha < 0$; tende a 0 per $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$; tende a $-\frac{2}{3}$ per $\alpha = \frac{1}{2}$; tende a $-\infty$ per $\frac{1}{2} < \alpha \leq 2$; e tende a $+\infty$ per $\alpha > 2$.

3. • In $-\infty$ e $+\infty$ si ha chiaramente $1 + 2e^{-x^2} - 3\cos 2x - 4x^2 = o_{\mp\infty}(3x^3)$ e $2\sin^3 x - 3\,\mathrm{arctg}\,(x^3) = o_{\mp\infty}(x^4)$, dunque il limite vale $\lim_{\mp\infty} \frac{3x^3}{x^4} = 0^\mp$. • In 0 il limite è in forma $\frac{0}{0}$: essendo $e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + o_0(x^3) = 1 - x^2 + o_0(x^3)$, $\cos 2x = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$, $\sin^3 x = (x + o_0(x^2))^3 = x^3 + o_0(x^3)$ e $\mathrm{arctg}\,(x^3) = x^3 + o_0(x^3)$, si ottiene $\lim_0 \frac{1+2e^{-x^2}-3\cos 2x-4x^2+3x^3}{x^4+2\sin^3 x-3\,\mathrm{arctg}\,(x^3)} = \lim_0 \frac{1+2(1-x^2+o_0(x^3))-3(1-2x^2+o(x^3))-4x^2+3x^3}{x^4+2(x^3+o_0(x^3))-3(x^3+o_0(x^3))} = \lim_0 \frac{3x^3+o(x^3)}{-x^3+o_0(x^3)} = -3$.

4. (a) (Figura 1) La funzione $f_2(x) = \frac{2x-3}{e^x-3}$ è definita per $x \neq \log 3$, con $f(0) = \frac{3}{2}$; essa è ovunque $\mathcal{C}^\infty$. Vale $f_2(x) = 0$ per $x = \frac{3}{2}$; quanto al segno, il numeratore è > 0 per $x > \frac{3}{2}$, il denominatore per $x > \log 3$, dunque vale $f_2(x) > 0$ per $x > \frac{3}{2}$ oppure $x < \log 3$. I limiti interessanti valgono facilmente $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\log 3^\mp} f_2(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0^+$; dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e, essendo $f_2(x) \sim_{-\infty} \frac{2x-3}{-3} = -\frac{2}{3}x + 1$, si ha che $y = -\frac{2}{3}x + 1$ è asintoto obliquo a $-\infty$. Derivando si ottiene $f_2'(x) = \frac{(5-2x)e^x-6}{(e^x-3)^2}$, dunque $f_2'(x) = 0$ quando $(5 - 2x)e^x = 6$, ovvero $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} = e^{-x}$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in due punti a e b con $0 < a < 1$ e $2 < b < 3$ (in realtà vale $a \sim 0{,}3$ e $b \sim 2{,}1$); si ha poi $f_2'(x) > 0$ quando $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} > e^{-x}$ ovvero (confronto grafico) quando $a < x < \log 3$ oppure $\log 3 < x < b$. Dunque a e b sono rispettivamente punti di minimo e massimo locale, con $f(a) \sim 1{,}5$ e $f(b) \sim 0{,}2$. Un'ulteriore derivazione porge $f_2''(x) = e^x \frac{(2x-7)e^x+3(2x+1)}{(e^x-3)^3}$, dunque $f_2''(x) = 0$ se e solo se $(2x - 7)e^x + 3(2x + 1) = 0$, ovvero $e^x = -3\frac{2x+1}{2x-7}$: e un confronto grafico (tra esponenziale e omografica) mostra che ciò avviene in un solo punto $c \sim 3{,}0$; sempre il confronto grafico mostra che $f_2''(x) > 0$ (ovvero f_2 convessa) quando $x < \log 3$ o quando $x > c$, dunque c è l'atteso punto di flesso (con $f(c) \sim 0{,}2$ e $f'(c) \sim -0{,}1$).

(b) La parte principale di $f_\alpha(x) = \frac{\alpha x-3}{e^x-3}$ in $-\infty$ è $-\frac{\alpha}{3}x$ (se $\alpha \neq 0$) oppure la costante 1 (se $\alpha = 0$); quella in $+\infty$ è $\alpha x e^{-x}$ (se $\alpha \neq 0$) oppure $-3e^{-x}$ (se $\alpha = 0$); quella in $x = 0$ è sempre $f(0) = \frac{3}{2} \neq 0$; e quella in $x = 1$ è $f(1) = \frac{\alpha-3}{e-3}$ (se $\alpha \neq 3$) oppure $\frac{3}{e-3}(x - 1)$ (se $\alpha = 3$). La funzione $f_\alpha(x)$ è prolungabile a una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\lim_{x\to\log 3} f_\alpha(x) \in \mathbb{R}$, e ciò avviene se e solo se $\alpha = \alpha_\circ := \frac{3}{\log 3} \sim 2{,}7$ con limite $f(\log 3) := \frac{1}{\log 3}$: si tratta dunque solo di vedere tale la funzione sia anche derivabile in $x = \log 3$. Calcoliamo allora $\lim_{x\to\log 3} \frac{\frac{\alpha_\circ x-3}{e^x-3} - \frac{1}{\log 3}}{x-\log 3}$: posto $t = x - \log 3$ tale limite diventa $\lim_{t\to0} \frac{1}{\log 3}\frac{t+1-e^t}{t(e^t-1)} = \lim_{t\to0} \frac{1}{\log 3}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = -\frac{1}{2\log 3} \sim -0{,}4$. Pertanto la funzione $f_{\alpha_\circ}(x)$ definita come $\frac{\alpha_\circ x-3}{e^x-3}$ per $x \neq \log 3$ e come $\frac{1}{\log 3}$ in $x = \log 3$ è derivabile, con $f_{\alpha_\circ}'(\log 3) = -\frac{1}{2\log 3}$.

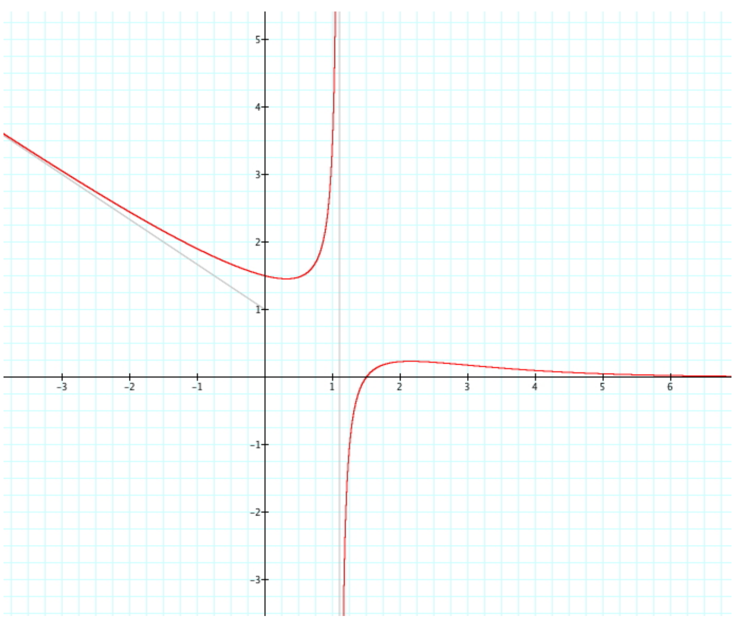
5. Si ha $\varphi(x) = f_0(x)^2 = \frac{9}{(e^x-3)^2}$; posto $e^x = t$ (dunque $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}\,dt$) si ottiene $\int \varphi(x)\,dx = \int \frac{9}{t(t-3)^2}\,dt$; dalla teoria sappiamo che esistono $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{(t-3)^2} = \frac{9}{t(t-3)^2}$, e i calcoli danno $(A, B, C) = (1, -1, 3)$, dunque $\int \frac{9}{t(t-3)^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{t-3} + 3\int \frac{1}{(t-3)^2}\,dt = \log|t| - \log|t - 3| - \frac{3}{t-3} + k$. Otteniamo perciò $\int \varphi(x)\,dx = x - \log|e^x - 3| - \frac{3}{e^x-3} + k$.

6. (a) La serie $\sum a_n$ con $a_n = \frac{x^n\,(n!)^{x^2-1}}{2n+1}$ è nulla quando $x = 0$. Posto invece $x \neq 0$, usiamo il criterio del rapporto: si ha che $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{|x|^{n+1}\,((n+1)!)^{x^2-1}}{2n+3}\frac{2n+1}{|x|^n\,(n!)^{x^2-1}} = \frac{2n+1}{2n+3}\,|x|\,(n+1)^{x^2-1}$ tende a 0 quando $x^2 - 1 < 0$ (ovvero

$|x| < 1$), tende a 1 quando $x^2 - 1 = 0$ (ovvero $x = \mp 1$) e tende a $+\infty$ quando $x^2 - 1 > 0$ (ovvero $|x| > 1$). Pertanto se $|x| < 1$ la serie converge assolutamente, e se $|x| > 1$ non converge (in particolare, quando $x > 1$ diverge a $+\infty$), mentre i casi $x = \mp 1$ vanno esaminati direttamente: per $x = 1$ la serie diventa $\sum \frac{1}{2n+1}$ che diverge a $+\infty$ (per asintoticità con la serie armonica), e per $x = -1$ diventa $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, che converge semplicemente (per Leibniz) ma non assolutamente.

(b) Per la serie $\sum b_n$ con $b_n = n^x \sqrt[3]{1 + n^{3x}} - n^{-x-3}$ conviene invece esaminare il comportamento dei due addendi: si ha che $b'_n = n^x \sqrt[3]{1 + n^{3x}}$ diverge a $+\infty$ per $x > 0$, vale $\sqrt[3]{2}$ per $x = 0$ e tende a 0 per $x < 0$; mentre $b''_n = n^{-x-3}$ diverge a $+\infty$ per $x < -3$, vale 1 per $x = -3$ e tende a 0 per $x > -3$. Ne ricaviamo subito che la serie diverge a $-\infty$ per $x \le -3$, e a $+\infty$ per $x \ge 0$; resta invece aperto il caso $-3 < x < 0$, in cui si deve capire che tipo di infinitesimo sia $b_n = b'_n - b''_n$. In altre parole: tra $b'_n \sim n^x$ e $b''_n \sim n^{-x-3}$ chi prevale? Vale $x > -x - 3$ quando $x > -\frac{3}{2}$: in tal caso si ha allora $b_n \sim b'_n \sim n^x$, e per asintoticità con la serie armonica si ha convergenza quando $x < -1$ e divergenza a $+\infty$ quando $x \ge -1$. Al contrario, vale $x < -x - 3$ quando $x < -\frac{3}{2}$, e in tal caso si ha $b_n \sim -b''_n \sim -n^{-x-3}$, e sempre per asintoticità con la serie armonica si ha convergenza quando $-x - 3 < -1$ (ovvero $x > -2$) e divergenza a $-\infty$ quando $x \le -2$. Il caso particolare $x = -\frac{3}{2}$ va esaminato a parte: infatti in tal caso, sviluppando asintoticamente la radice cubica si ottiene $b_n = n^x(1 + \frac{1}{3}n^{3x} + o_{+\infty}(n^{3x})) - n^{-x-3} \sim \frac{1}{3}n^{-6}$, pertanto la serie converge sempre per asintoticità con la serie armonica. • Ricapitolando: per $x \le -2$ la serie diverge a $-\infty$; per $-2 < x < -1$ converge; e per $\alpha \ge -1$ diverge a $+\infty$.

7. Il numero $w = x + iy$ deve soddisfare $\overline{w}^2 = 2w$ e $\operatorname{Im} w < 0$, ovvero $(x - iy)^2 = 2(x + iy)$ e $y < 0$. La prima equazione diventa $(x^2 - y^2 - 2x) + i(-2xy - y) = 0$, che equivale al sistema reale dato da $x^2 - y^2 - 2x = 0$ e $(x + 1)y = 0$, con soluzioni $(x, y) = (0, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, +\sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$: si ha dunque $w = -1 - \sqrt{3}\, i$. • Il numero $z \in \mathbb{C}$ soddisfa $z^2 + 28 = 10z$ e $\operatorname{Im} z > 0$: da $z^2 - 10z + 28 = 0$ si ricava $z = 5 \mp \sqrt{3}i$, dunque si ha $z = 5 + \sqrt{3}\, i$. • Le radici quarte di $-w - z = -(-1 - \sqrt{3}\, i) - (5 + \sqrt{3}\, i) = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$ sono $z_k = \sqrt[4]{4}(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4})$ per $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$ e $z_3 = 1 - i$.



1. Ex. 4: grafico di $f_2(x)$.