Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (14/07/2010)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

1. Descrivere $A = \{x > 0 : |\sin(\frac{4}{x} + \frac{3}{2})| \neq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 3|x+1| \leq x+5\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; di quali punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ è intorno; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{|\alpha|^{n\alpha} - n^{\alpha n} + 3n}{2n-3}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{0,1,+\infty} \frac{\log(1-x+x^2) - \sin(\pi x)}{x(x+\cos(\pi x))}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...).[1]

4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = 2\sqrt{|x-1|} - 3\sqrt{x+1}$, e tracciarne il grafico.
(b) Scrivere gli sviluppi asintotici di f in 0 e in $+\infty$ con due (o, se si vuole, tre) termini significativi.

5. (a) Calcolare le primitive di $g(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^{2x} + 2}$.
(b) Studiare brevemente l'andamento di g e tracciarne il grafico; disegnare poi l'insieme compatto $K = \{(x,y) :\ y \leq g(x),\ x^2 - x - 2 \leq y \leq x+1,\ |x| \leq 1\}$ e calcolarne l'area.

6. Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_n n^{2\alpha} \log^n(\alpha^2 - \alpha + 1)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. È data l'equazione $z^3 + \alpha z - 3 + i = 0$, ove α è un parametro in $\mathbb{C}$.

(a) Posto $\alpha = 0$, calcolare e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni dell'equazione.
(b) Posto $\alpha = 2 + 3i$, stessa domanda di prima (sapendo che una delle soluzioni è $-i$).

[1] Si ricorda che $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)$, $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + o_0(t^4)$ e $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + o_0(t^3)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (14/07/2010) – Soluzioni.

1. L'insieme A è ottenuto intersecando $A_1 = \{x > 0 : |\sin(\frac{4}{x} + \frac{3}{2})| \neq 1\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 3|x+1| \leq x+5\}$. Quando $x > 0$ si ha $|\sin(\frac{4}{x} + \frac{3}{2})| \neq 1$ se e solo se $\frac{4}{x} + \frac{3}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ovvero se e solo se $x \neq x_k := \frac{8}{\pi - 3 + 2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: pertanto A_1 è formato da tutti i numeri reali positivi esclusi gli x_k, che sono una famiglia decrescente di punti positivi che si accumulano su 0 (notiamo che $x_0 = \frac{8}{\pi-3} \sim 56$, $x_1 = \frac{8}{\pi-3+2\pi} \sim 1{,}2$, $x_2 = \frac{8}{\pi-3+4\pi} \sim 0{,}6$, ...). D'altra parte vale $A_2 = [-2, 1]$, pertanto si ottiene $A =]0, 1] \setminus \{x_2, x_3, \dots\}$: si tratta di un insieme limitato, con massimo 1 ed estremo inferiore 0, non aperto (ha massimo) ne' chiuso (non ha minimo); non è dunque compatto, ne' discreto; è intorno di tutti i suoi punti tranne il massimo 1; i punti di aderenza, che sono anche di accumulazione, sono tutti i suoi più lo 0 e gli x_k con $k = 2, 3, \dots$; infine, i punti di frontiera sono lo 0, gli x_k con $k = 2, 3, \dots$ e l'1.

2. Iniziamo con l'esaminare, nella successione $a_n = \frac{|\alpha|^{n\alpha} - n^{\alpha n} + 3n}{2n-3}$, il comportamento dei primi due addendi del numeratore al variare di $\alpha \neq 0$ (il caso $\alpha = 0$ è privo di significato, perché in un addendo si otterrebbe 0^0). In effetti l'addendo $|\alpha|^{n\alpha}$ tende a 0 se $\alpha < -1$ oppure se $0 < \alpha < 1$, vale 1 se $\alpha = \mp 1$, e tende a $+\infty$ se $-1 < \alpha < 0$ oppure se $\alpha > 1$; mentre l'addendo $n^{\alpha n}$ tende a 0 se $\alpha < 0$ e tende a $+\infty$ se $\alpha > 0$. Pertanto (notando che per $\alpha > 1$ si ha $\lim \frac{|\alpha|^{n\alpha}}{n^{\alpha n}} = \lim(\frac{\alpha}{n})^{\alpha n} = 0$) si ha che se $\alpha \leq -1$ il limite vale $\frac{3}{2}$, se $-1 < \alpha < 0$ vale $+\infty$, e se $\alpha > 0$ vale $-\infty$.

3. Sia $f(x) = \frac{\log(1-x+x^2) - \sin(\pi x)}{x(x+\cos(\pi x))}$. • In 0 siamo in forma indeterminata $\frac{0}{0}$; sviluppando la funzione si ottiene allora $f(x) = \frac{(-x+x^2) - \frac{1}{2}(-x+x^2)^2 + o_0(x^2) - (\pi x + o_0(x^2))}{x(x+1+o_0(x))} \sim_0 \frac{(-\pi-1)x}{x}$, dunque il limite vale $-\pi - 1$. • In 1 siamo ancora in forma indeterminata $\frac{0}{0}$: conviene allora cambiare la variabile per riportarsi in 0, ponendo $x = 1+t$, e il limite diventa $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1-1-t+1+2t+t^2) - \sin(\pi+\pi t)}{(1+t)(1+t+\cos(\pi+\pi t))} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t+t^2) + \sin(\pi t)}{(1+t)(t+1-\cos(\pi t))} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+t^2) + o_0(t) + (\pi t) + o_0(t^2)}{t - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{(\pi+1)t}{t} = \pi + 1$. • Infine, in $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} \frac{\log(1-x+x^2)}{x(x)} \sim_{+\infty} \frac{2\log x}{x^2}$, dunque il limite vale 0^+.

4. (a) (Figura 1) La funzione $f(x) = 2\sqrt{|x-1|} - 3\sqrt{x+1}$ è definita per $x \geq -1$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio tranne che in $x = -1$ e $x = 1$ (in cui vale rispettivamente $f(-1) = 2\sqrt{2}$ e $f(1) = -3\sqrt{2} \sim -4{,}2$), punti nei quali essa è di certo continua ma probabilmente (a causa delle radici) non derivabile. L'unico limite interessante è $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, che vale $-\infty$ (tale limite si può calcolare moltiplicando sopra e sotto per $2\sqrt{|x-1|} + 3\sqrt{x+1}$ e semplificando; in alternativa, usando gli sviluppi asintotici, si può anche notare che per $x > 0$ vale $f(x) = 2\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} - 3\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 2\sqrt{x}(1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{x}) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{x})^2 + o_{+\infty}(x^{-2})) - 3\sqrt{x}(1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{x}) - \frac{1}{8}(\frac{1}{x})^2 + o_{+\infty}(x^{-2})) = \sqrt{x}(-1 - \frac{5}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2}))$, pertanto $f(x) \sim_{+\infty} -\sqrt{x}$). Si ha $f(x) \geq 0$ quando $2\sqrt{|x-1|} \geq 3\sqrt{x+1}$, che nel dominio equivale a $4|x-1| \geq 9(x+1)$, con soluzioni $x \leq -\frac{5}{13} \sim -0{,}4$. Poiché come visto è $f(x) \sim_{+\infty} -\sqrt{x}$, non c'è asintoto lineare a $+\infty$. Derivando per $x \neq \mp 1$ e posto $\sigma = \operatorname{sign}(x-1)$ (cioè $\sigma = \mp 1$ a seconda che $x \lessgtr 1$) si ha $f'(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{|x-1|}} - \frac{3}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2\sigma\sqrt{x+1} - 3\sqrt{|x-1|}}{2\sqrt{|x-1|(x+1)}}$, e pertanto vale $f'(x) \geq 0$ quando $2\sigma\sqrt{x+1} \geq 3\sqrt{|x-1|}$; quando $x < 1$ ciò è sempre falso, mentre quando $x > 1$ equivale a $4(x+1) \geq 9(x-1)$, con soluzioni $x \leq \frac{13}{5} = 2{,}6$. Dunque f decresce in $]-1, 1[$, quindi cresce in $]1, \frac{13}{5}[$, e decresce da $x = \frac{13}{5}$ in poi: ne ricaviamo che $x = 1$ è un punto di minimo locale singolare (con $f(1) = -3\sqrt{2} \sim -4{,}2$), e che $x = \frac{13}{5}$ è punto di massimo locale regolare (con $f(\frac{13}{5}) = -\sqrt{10} \sim -3{,}2$); si noti che, come previsto, si ha $\lim_{x\to-1} f'(x) = \lim_{x\to 1} f'(x) = \infty$. Infine, derivando ancora si ottiene $f''(x) = -\frac{1}{2}|x-1|^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$, da cui $f''(x) \geq 0$ se e solo se $3(x+1)^{-\frac{3}{2}} \geq 2|x-1|^{-\frac{3}{2}}$, ovvero $2(x+1)^{\frac{3}{2}} \leq 3|x-1|^{\frac{3}{2}}$, che equivale a $\sqrt[3]{4}(x+1) \leq \sqrt[3]{9}|x-1|$: se $x < 1$ ciò dà $x \leq x_1 := \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4}} \sim 0{,}1$, mentre se $x > 1$ si ottiene $x \geq x_2 = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}} \sim 7{,}4$. Pertanto f è convessa per $-1 < x < x_1$ e $x > x_2$, concava per $x_1 < x < 1$ e $1 < x < x_2$, e ha due flessi nei punti x_1 e x_2.

(b) In 0 la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$, dunque possiamo applicare la formula di Taylor ottenendo $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o_0(x^2) = -1 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o_0(x^2)$. • In $+\infty$ il conto l'avevamo già fatto in precedenza per il calcolo del limite, e si era ottenuto $f(x) = -\sqrt{x} - \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{8}\frac{1}{x\sqrt{x}} + o_{+\infty}(\frac{1}{x\sqrt{x}})$.

5. (a) Posto $e^x = t$ si ottiene $\int \frac{e^x+2}{e^{2x}+2}\,dx = \int \frac{t+2}{t(t^2+2)}\,dt = \int(\frac{1}{t} + \frac{1-t}{t^2+2})\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1/\sqrt{2}}{(t/\sqrt{2})^2+1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+2}\,dt = \log\frac{t}{\sqrt{t^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + k = \log\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{2}} + k$.

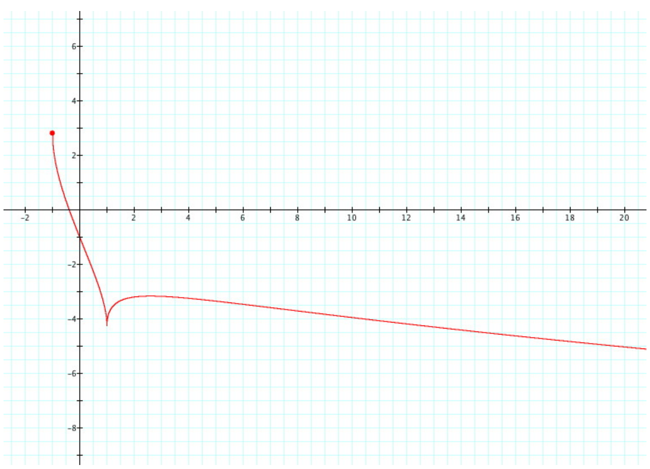
(b) (Figura 2) La funzione $g(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$; è $\mathcal{C}^\infty$, sempre > 0; vale $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1^+$ (si noti che $g(x) \geq 1$ se e solo se $x \leq 0$) e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$ (infatti $g(x) \sim_{+\infty} e^{-x}$); derivando si ottiene $g'(x) = -\frac{e^x(e^x+\sqrt{6}+2)(e^x-(\sqrt{6}-2))}{(e^{2x}+2)^2}$, da cui $g'(x) \geq 0$ per $x \leq x_0 := \log(\sqrt{6}-2) \sim -0{,}8$, punto di massimo assoluto (con $f(x_0) = \frac{\sqrt{6}}{12-4\sqrt{6}} \sim 1{,}1$). L'area di $K = \{(x, y) :\ y \leq g(x),\ x^2 - x - 2 \leq y \leq x+1,\ |x| \leq 1\}$ vale $\int_{-1}^0 (x+1)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^{-1}(x^2-x-2)\,dx = (\frac{1}{2}x^2 + x]_{-1}^0 + (\log\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{2}}]_0^1 + (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x]_1^{-1} = (0) - (-\frac{1}{2}) + (\log\frac{e}{\sqrt{e^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{e}{\sqrt{2}}) - (\log\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{7}{6}) - (-\frac{13}{6}) = \frac{23}{6} + \log\frac{e\sqrt{3}}{\sqrt{e^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(e-1)}{e+1} \sim 4{,}8$

(ove si è usata l'identità $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u-v}{1+uv}$, valida per $u, v \geq 0$).

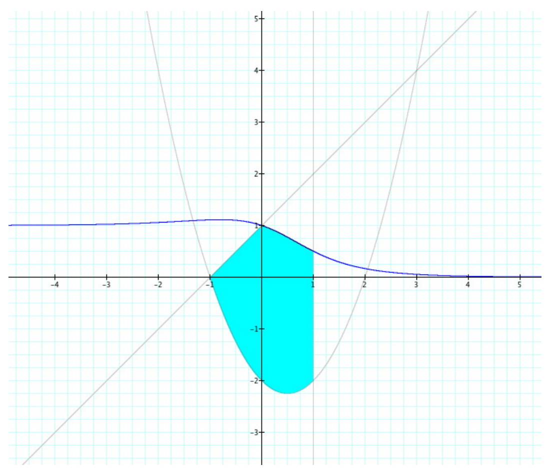
6. La serie $\sum_n n^{2\alpha} \log^n(\alpha^2 - \alpha + 1)$ ha senso per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ed è a termini nulli per $\alpha^2 - \alpha + 1 = 1$, ovvero $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$; negli altri casi applichiamo il criterio del rapporto. Poiché $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = (\frac{n+1}{n})^{2\alpha} |\log(\alpha^2 - \alpha + 1)|$ tende a $|\log(\alpha^2 - \alpha + 1)|$, si ha che se $|\log(\alpha^2 - \alpha + 1)| < 1$ (il che equivale a $\frac{1}{e} < \alpha^2 - \alpha + 1 < e$, cioè $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ con $\alpha_1 := -\frac{\sqrt{4e-3}-1}{2}$ e $\alpha_2 := \frac{\sqrt{4e-3}+1}{2}$) la serie converge assolutamente; mentre se $|\log(\alpha^2 - \alpha + 1)| > 1$ (ovvero se $\alpha^2 - \alpha + 1 > e$, cioè $\alpha < \alpha_1$ oppure $\alpha > \alpha_2$) la serie non converge nemmeno semplicemente (in particolare, se $\alpha > \alpha_2$ essa diverge a $+\infty$). I casi particolari vanno esaminati a parte: se $\alpha = \alpha_1$ la serie si riduce a $\sum_n n^{2\alpha_1}$, ed essendo (come si verifica direttamente) $-2 < 2\alpha_1 < -1$, la serie converge per confronto con la serie armonica; se invece $\alpha = \alpha_2$ la serie si riduce a $\sum_n n^{2\alpha_2}$, ed essendo $\alpha_2 > 0$ essa diverge senz'altro a $+\infty$.

7. (a) Posto $\alpha = 0$, l'equazione $z^3 + \alpha z - 3 + i = 0$ diventa $z^3 = 3 - i$: si tratta dunque di trovare le tre radici cubiche di $w = 3 - i$. In forma trigonometrica si ha $w = \sqrt{10}(\frac{3}{\sqrt{10}} + i(-\frac{1}{\sqrt{10}})) = \sqrt{10}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ con $\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$, dunque per de Moivre le tre soluzioni sono $z_k = \sqrt[6]{10}(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{3})$ al variare di $k = 0, 1, 2$.

(b) Per $\alpha = 2 + 3i$, l'equazione diventa $z^3 + (2+3i)z - 3 + i = 0$. L'informazione che $-i$ è soluzione equivale a dire che il polinomio al primo membro è divisibile per $(z - (-i)) = (z + i)$: dividendo (ad esempio con Ruffini) si trova infatti $z^3 + (2+3i)z - 3 + i = (z+i)(z^2 - iz + 1 + 3i)$, dunque le altre due soluzioni si trovano da $z^2 - iz + 1 + 3i = 0$, che dà $z = \frac{i \mp \sqrt{(i)^2 - 4(1+3i)}}{2} = \frac{i \mp \sqrt{-5-12i}}{2} = \frac{i \mp (2-3i)}{2}$, ovvero $1 - i$ e $-1 + 2i$.



1. Ex. 4: grafico di $f(x) = 2\sqrt{|x-1|} - 3\sqrt{x+1}$.



2. Ex. 5: La funzione $g(x) = \frac{e^x+2}{e^{2x}+2}$ e l'insieme $K = \{(x,y) : \ y \leq g(x),\ x^2 - x - 2 \leq y \leq x + 1,\ |x| \leq 1\}$.