

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (05/09/2011)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : 5\sqrt{|x+2|} + x \geq 4\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y = 3x^2 + x - 8, x > 0\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in \mathbb{R} e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in \mathbb{R} ; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di \mathbb{R} e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. Determinare il dominio di $g(x) = 3\sin(e^{-x^2}) - 1$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se la funzione è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva; calcolare $g^{-1}([0, 1])$ e $g([-1, \frac{1}{2}])$.
3. Calcolare (prima per $\alpha = 1$, poi eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$) i seguenti limiti, usando l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...):

$$\lim_{0, 1, +\infty} \frac{\alpha x^2 - \log^2 |1 - x| + 2 \sin^3 x}{\cos(\alpha x) - (x + 1)^2 + 2 \sin x}.$$

4. Sia $f(x) = |x| - 2 \arcsin(\frac{x+1}{3})$.

(a) Studiare l'andamento di $f(x)$ e tracciarne il grafico.

(b) Determinare gli sviluppi di $f(x)$ in 0^+ , $\frac{1}{2}$ e 2 con due termini significativi.

5. Calcolare $\int_{-1}^2 f(x) dx$, ove $f(x)$ è la funzione dell'Ex. 4.

6. Discutere il carattere della serie $\sum_n \left(\frac{(2 \cos \alpha)^n}{1 + n \sin \alpha} - \frac{3}{n^2} \right)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

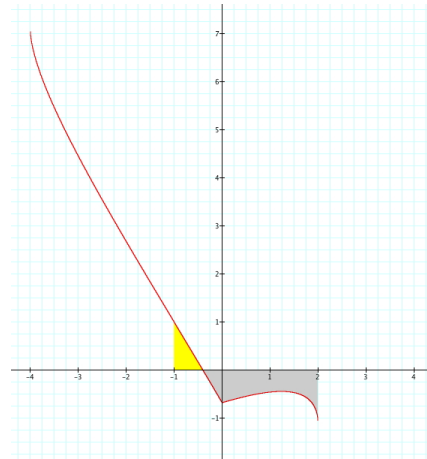
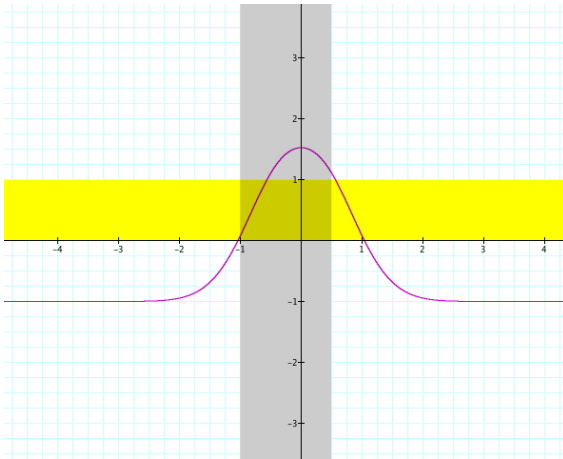
7. Trovare le soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione $\frac{2\bar{z} - i}{3 + iz} + \frac{3z + i}{2} = 0$. Detta poi z_0 la soluzione con parte reale strettamente negativa, trovare un'espressione per le potenze e la radici n -esime di $z_0 - 1$.

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$; $\arcsin x = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 + o_0(x^6)$.

1. Si ha $A = A_1 \cap A_2$ con $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 5\sqrt{|x+2|} + x \geq 4\}$ e $A_2 = \{3x^2 + x - 8 : x > 0\}$. La disequazione $5\sqrt{|x+2|} \geq 4 - x$ è sempre soddisfatta quando $4 - x < 0$, ovvero quando $x > 4$; mentre quando $x \leq 4$ equivale a $25|x+2| \geq (4-x)^2$. Per $-2 \leq x \leq 4$ ciò equivale a $x^2 - 8x + 16 \leq 25x + 50$, ovvero $x^2 - 33x - 34 \leq 0$, che dà $-1 \leq x \leq 4$; invece per $x < -2$ equivale a $x^2 - 8x + 16 \leq -25x - 50$, ovvero $x^2 + 17x + 66 \leq 0$, che dà $-11 \leq x \leq -6$. Ricapitolando si ha $A_1 = [-11, -6] \cup [-1, +\infty[$. D'altra parte A_2 è l'immagine di $\mathbb{R}_{>0}$ tramite la funzione $3x^2 + x - 8$ che ha come grafico la relativa parabola, dunque è $] -8, +\infty[$: se ne ricava che $A =] -8, -6] \cup [-1, +\infty[$. Perciò A è inferiormente limitato e superiormente illimitato, con $\inf A = -8$ e senza minimo; i suoi punti interni sono tutti tranne -6 e -1 , e convenzionalmente anche $+\infty$; quelli di chiusura (tutti di accumulazione) sono tutti i suoi più -8 e $+\infty$. Ne ricaviamo che A non è ne' aperto (ad esempio non è intorno del suo punto -6) ne' chiuso (non contiene la sua accumulazione -8); non è ne' compatto ne' discreto. Infine, sono di frontiera i punti $-8, -6$ e -1 .
2. (Figura 1) Il dominio di $g(x) = 3\sin(e^{-x^2}) - 1$ è tutto \mathbb{R} ; si tratta di una funzione pari, dunque ci aspettiamo fibre simmetriche. Da $g(x) = y$ si ricava $\sin(e^{-x^2}) = \frac{y+1}{3}$, che nell'ipotesi $|\frac{y+1}{3}| \leq 1$ (cioè $-4 \leq y \leq 2$) dà $e^{-x^2} = \arcsin \frac{y+1}{3} + 2k\pi$ oppure $e^{-x^2} = \pi - \arcsin \frac{y+1}{3} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ma essendo $0 < e^{-x^2} \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y+1}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ l'unica possibilità è $e^{-x^2} = \arcsin \frac{y+1}{3}$ con $0 < \arcsin \frac{y+1}{3} \leq 1$, ovvero $0 < \frac{y+1}{3} \leq \sin 1$, ovvero $-1 < y \leq 3\sin 1 - 1 \sim 1,5$: per tali y si ottiene allora $-x^2 = \log(\arcsin \frac{y+1}{3})$, da cui $x = \mp \sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}$. Ricapitolando, per $-1 < y \leq 3\sin 1 - 1$ si ha $g^{-1}(y) = \left\{ -\sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}, \sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})} \right\}$ (due punti distinti, tranne che per $y = 3\sin 1 - 1$ in cui si ottiene il solo punto $g^{-1}(0) = \{0\}$), mentre per $y \leq -1$ o per $y > 3\sin 1 - 1$ si ha $g^{-1}(y) = \emptyset$. La funzione non è dunque ne' iniettiva ne' suriettiva; essa può essere resa biiettiva ad esempio restringendola a $[0, +\infty[$ e corestringendola alla sua immagine $] -1, 3\sin 1 - 1]$, con inversa $g^{-1}(y) = \sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}$. Per il calcolo di $g^{-1}([0, 1])$ va risolta la doppia disequazione $0 \leq g(x) < 1$, che dà $\sqrt{-\log(\arcsin \frac{2}{3})} < |x| \leq \sqrt{-\log(\arcsin \frac{1}{3})}$ (unione disgiunta di due intervalli semiaperti simmetrici tra loro); per il calcolo di $g^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $-1 \leq -\sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})} (< \frac{1}{2})$ e $(-1 \leq) \sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})} < \frac{1}{2}$ (senza scordare però che deve essere $-1 < y \leq 3\sin 1 - 1$), e alla fine risulta $3\sin \frac{1}{e} - 1 \leq y \leq 3\sin 1 - 1$.
3. Posta $f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - \log^2 |1-x| + 2\sin^3 x}{\cos(\alpha x) - (x+1)^2 + 2\sin x}$, discutiamo direttamente il caso di $\alpha \in \mathbb{R}$. • In 0 il limite è in forma $\frac{0}{0}$: sviluppando si ha $f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - ((-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + o_0(x^2))^2 + 2(x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4))^3}{(1 - \frac{1}{2}(\alpha x)^2 + o_0(x^3)) - (x+1+2x+x^2) + 2(x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4))} = \frac{(\alpha-1)x^2 + 3x^3 + o_0(x^3)}{(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 1)x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)}$, dunque se $\alpha = 1$ si ottiene $\lim_0 f_1(x) = \lim_0 \frac{3x^3}{-\frac{1}{3}x^2} = 0$, mentre se $\alpha \neq 1$ vale $\lim_0 f_\alpha(x) = \lim_0 \frac{(\alpha-1)x^2}{(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 1)x^2} = -\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2 + 2}$. • In 1 si ha $\alpha x^2 + 2\sin^3 x = o_1(-\log^2 |1-x|)$ e dunque il numeratore tende a $-\infty$, mentre il denominatore è finito (tende a $\cos \alpha - 4 + 2\sin 1 < 0$). Dunque il limite è sempre $+\infty$. • Infine, se $\alpha \neq 0$ si ha evidentemente $\lim_{+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{+\infty} \frac{\alpha x^2}{-x^2} = -\alpha$, mentre se $\alpha = 0$ vale $\lim_{+\infty} f_0(x) = \lim_{+\infty} \frac{-\log^2 x}{-x^2} = 0$.
4. (a) (Figura 2) La funzione $f(x) = |x| - 2\arcsin(\frac{x+1}{3})$ è definita per $|\frac{x+1}{3}| \leq 1$, ovvero per $-4 \leq x \leq 2$, con $f(-4) = 4 - 2\arcsin(-1) = 4 + \pi \sim 7,1$, $f(0) = -2\arcsin \frac{1}{3} \sim -0,7$ e $f(2) = 2 - 2\arcsin 1 = 2 - \pi \sim 1,1$; nel suo dominio essa è ovunque continua, e \mathcal{C}^∞ tranne che in $x = 0$, $x = -4$ e $x = 2$, in cui sono attesi rispettivamente un punto angoloso (a causa del modulo) e due punti a pendenza infinita (per l'arco-seno). Vale $f(x) = 0$ quando $\frac{1}{2}|x| = \arcsin(\frac{x+1}{3})$; posto $t = \frac{x+1}{3}$ (ovvero $x = 3t - 1$) si tratta di vedere quando $\frac{1}{2}|3t - 1| = \arcsin t$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in un solo punto $t_0 \sim 0,2$, ovvero $x_0 \sim -0,4$. Similmente si ha $f(x) > 0$ quando $\frac{1}{2}|x| > \arcsin(\frac{x+1}{3})$, il che accade per $-4 < x < x_0$. Derivando si ottiene $f'(x) = \sigma - 2\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x+1}{3})^2}} \frac{1}{3} = \sigma - \frac{2}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$, con $\sigma = \text{sign } x = \mp 1$ a seconda che $x \leq 0$: dunque per $x < 0$ vale sempre $f'(x) < 0$, mentre per $x > 0$ si ottiene $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$, perciò $f'(x) \geq 0$ per $0 < x \leq \sqrt{5} - 1$. Ne ricaviamo che $x = \sqrt{5} - 1$ è un punto di massimo relativo, con $f(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} - 1 - 2\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} \sim -0,4$, e che $x = 0$ è di minimo singolare; notiamo anche che (come previsto) $\lim_{x \rightarrow -4+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sim -1,7$ e $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0,3$. Derivando ancora si ha $f''(x) = -2(-\frac{1}{2})(9 - (x+1)^2)^{-\frac{3}{2}}(-2(x+1)) = -2(x+1)(9 - (x+1)^2)^{-\frac{3}{2}}$, dunque $f''(x) \geq 0$ per $x \leq -1$: ne ricaviamo che f è convessa per $-4 < x < -1$ e concava per $-1 < x < 0$ e $0 < x < 2$, con un flesso in $x = -1$ (in cui $f(-1) = 1$ e $f'(-1) = -\frac{5}{3}$).
- (b) In 0^+ e $\frac{1}{2}$ la funzione è finita, e possiamo applicare Taylor (in 0^+ useremo la derivata destra, calcolata in precedenza), ottenendo $f(x) = f(0) + f'_+(0)x + o_{0^+}(x) = -2\arcsin \frac{1}{3} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})x + o_{0^+}(x)$ e $f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + o_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}) + (1 - \frac{4}{3\sqrt{3}})(x - \frac{1}{2}) + o_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2})$. La questione è invece più delicata

in 2, dove f è finita con $f(2) = 2 - \pi$ ma non è derivabile, dunque non si può usare Taylor. Esaminiamo allora che tipo di infinitesimo è $f(x) - f(2)$, studiando il limite $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{(2-x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2 \arcsin(\frac{x+1}{3}) - (2-\pi)}{(2-x)^\alpha}$ per qualche $\alpha > 0$ (anzi, non essendoci derivabilità sarà senz'altro $0 < \alpha < 1$): usando de l'Hôpital si passa a $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{9-(x+1)^2}}}{-\alpha(2-x)^{\alpha-1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{(6-t)^2}}}{-\alpha t^{\alpha-1}}$ che è finito solo quando $\alpha = \frac{1}{2}$, e vale $\frac{4}{\sqrt{6}}$. Dunque ricaviamo $f(x) = 2 - \pi + \frac{4}{\sqrt{6}}(2-x)^{\frac{1}{2}} + o_2((2-x)^{\frac{1}{2}})$.

5. Si ha $\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (|x| - 2 \arcsin(\frac{x+1}{3})) dx = (\frac{1}{2}x^2 \text{sign } x)_{-1}^2 - 2 \int_{-1}^2 \arcsin(\frac{x+1}{3}) dx = (2) - (-\frac{1}{2}) - 6 \int_0^1 \arcsin t dt = \frac{5}{2} - 6((t \arcsin t)_{0}^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt) = \frac{5}{2} - 6((\frac{\pi}{2}) - (0) + (\sqrt{1-t^2})_{0}^1) = \frac{17}{2} - 3\pi = -0,8$.
6. La serie $\sum (\frac{(2 \cos \alpha)^n}{1+n \sin \alpha} - \frac{3}{n^2})$ può essere vista come serie differenza delle due serie $\sum \frac{(2 \cos \alpha)^n}{1+n \sin \alpha}$ e $\sum \frac{3}{n^2}$: poiché la seconda è convergente, è chiaro che la nostra serie convergerà se e solo se convergerà la prima. A tale proposito, applicando il criterio della radice si ottiene $\frac{|2 \cos \alpha|}{\sqrt[1+n \sin \alpha]{1+n \sin \alpha}}$, che tende a $|2 \cos \alpha|$: pertanto se $|2 \cos \alpha| < 1$ (ovvero $\frac{\pi}{3} + k\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$) si ha convergenza assoluta, mentre per $|2 \cos \alpha| > 1$ (ovvero $-\frac{\pi}{3} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{3} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$) la serie non converge, e in particolare diverge a $\mp \infty$ se $\cos \alpha > \frac{1}{2}$ (ovvero $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$), ove “ \mp ” è il segno di $\sin \alpha$, e per $\alpha = 2k\pi$ si sceglie “+”. I casi particolari in cui $2 \cos \alpha = \mp 1$ vanno esaminati direttamente: se $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ (ovvero $\alpha = \mp \frac{\pi}{3} + 2k\pi$) si ottiene $\sum \frac{1}{1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}n}$ che diverge perché dello stesso ordine di $\sum \frac{1}{n}$; mentre se $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ (ovvero $\alpha = \mp \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$) si ottiene $\sum \frac{(-1)^n}{1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}n}$ che converge semplicemente per Leibniz.
7. Risolviamo $\frac{2\bar{z}-i}{3+iz} + \frac{3z+i}{2} = 0$, ovvero $2(2\bar{z}-i) + (3z+i)(3+iz) = 0$, ovvero $4\bar{z} + i + 8z + 3iz^2 = 0$, con $z \neq 3i$: posto $z = x + iy$ si ottiene $6x(2-y) + i(3(x^2-y^2) + 4y + 1) = 0$, dunque il sistema reale dato da $x(2-y) = 0$ e $3(x^2-y^2) + 4y + 1 = 0$. Se $x = 0$ si ottiene $3y^2 - 4y - 1 = 0$, da cui $y = 2 \mp \sqrt{7}$; se invece $y = 2$ si ha $x = \mp 1$. Le soluzioni cercate sono perciò $\mp 1 + 2i$ e $(2 \mp \sqrt{7})i$, delle quali l'unica con parte reale strettamente negativa è $z_0 = -1 + 2i$. Essendo allora $z_0 - 1 = -2 + 2i = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\pi}{4}i}$, per $n \in \mathbb{N}$ si ottiene la potenza n -esima $(z_0 - 1)^n = 2^{\frac{3n}{2}} e^{\frac{3\pi n}{4}i}$ e le radici n -esime $w_k = 2^{\frac{3}{2n}} e^{\frac{3\pi + 2k\pi}{4n}i}$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$.



1. Ex. 2: grafico di $g(x)$, con l'antimmagine e immagine richieste. 2. Ex. 4-5: grafico di $f(x)$, con l'integrale richiesto.