Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (07/09/2010)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2-2x} < \log 3\} \cup \{3 + e^n : n \in \mathbb{Z}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; di quali punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ è intorno; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{|\alpha|^n - \pi n^\alpha}{3^{\alpha n} - 2}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{0,+\infty,-\infty} \frac{x\sin^2(3x) - (e^{2x} - \cos x)^3}{3x^4 - x^3}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...).[1]

4. (a) Studiare[2] l'andamento di $f(x) = \log\left|x - 1 + \sqrt{|x|}\right|$, e tracciarne il grafico.

(b) Quali sono le parti principali (rispetto un'opportuna scala di confronto) di f in 1 e in $+\infty$?

5. Calcolare $\int_1^4 f(x)\,dx$, ove $f(x)$ è la funzione dell'Ex. 4.

6. Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_n \frac{(3 - 2\operatorname{arctg} x)^n}{n^x + 3}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

7. (a) Determinare i numeri complessi z tali che $g(z) := 2(1+i)z - \bar{z}^2$ sia immaginario puro, e quelli per cui $g(z)$ è reale. Se possibile, descrivere poi sul piano di Gauss i luoghi così trovati.

(b) Data l'equazione $z^3 + (4+3i)z + \alpha = 0$, dire per quale $\alpha \in \mathbb{C}$ il numero $z_1 = -1 - 2i$ ne è una soluzione; in tale caso determinare poi le altre due.

---

(1) Si ricorda che $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + o_0(t^4)$, $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + o_0(t^3)$ e $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o_0(t^2)$.

(2) Non è richiesto lo studio della convessità.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (07/09/2010) – Soluzioni.

1. L'insieme A è ottenuto unendo $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2-2x} < \log 3\}$ e $A_2 = \{3 + e^n : n \in \mathbb{Z}\}$. La disequazione $2^{x^2-2x} < \log 3$ equivale a $(x^2 - 2x)\log 2 < \log(\log 3)$, ovvero $x^2 - 2x - \beta < 0$ ove $\beta := \frac{\log(\log 3)}{\log 2} \sim \frac{0{,}1}{0{,}7} \sim 0{,}15$, dunque otteniamo $A_1 =]\,1 - \sqrt{1+\beta},\, 1 + \sqrt{1+\beta}\,[$ (un intervallo aperto, il cui primo estremo è di poco inferiore a 0, l'altro di poco superiore a 2). D'altra parte si ha $A_2 = \{\dots, 3 + \frac{1}{e^2}, 3 + \frac{1}{e}, 4, 3 + e, 3 + e^2, \dots\}$, ovvero un insieme discreto di punti che a sinistra si accumulano da sopra su 3^+ mentre a destra divergono rapidamente a $+\infty$. Pertanto A è limitato solo inferiormente, con estremo inferiore $1 - \sqrt{1+\beta}$; non è aperto (non è intorno di 4) ne' chiuso (non ha minimo); non è compatto, ne' discreto; è intorno dei suoi punti di A_1; i punti di aderenza sono tutti i suoi più gli estremi $1 \mp \sqrt{1+\beta}$, il 3 e il $+\infty$, e questi sono tutti di accumulazione tranne i punti di A_2 (isolati); infine, i punti di frontiera sono $1 \mp \sqrt{1+\beta}$, 3, $+\infty$ e tutti quelli di A_2.

2. Se $\alpha > 1$ scriviamo $a_n = (\frac{\alpha}{3^\alpha})^n \frac{1-\pi n^\alpha/\alpha^n}{1-2/3^{\alpha n}}$: ricordando che $\lim \frac{n^\alpha}{\alpha^n} = 0$ e notando che $0 < \frac{\alpha}{3^\alpha} < 1$, concludiamo che a_n tende a 0. • Se $\alpha = 1$ si ottiene $a_n = \frac{1-\pi n}{3^n - 2}$, che tende ancora a 0. • Alla stessa conclusione si arriva quando $0 < \alpha < 1$. • Se $\alpha = 0$ si ottiene la costante $a_n = \frac{-\pi}{-1} = \pi$. • Per $-1 < \alpha < 0$ il numeratore è infinitesimo e il denominatore tende a -2, dunque a_n tende a 0. • Se $\alpha = -1$ si ha $a_n = \frac{1-\pi/n}{3^{-n}-2}$, che tende a $-\frac{1}{2}$. • Infine, quando $\alpha < -1$ il numeratore tende a $+\infty$ e il denominatore a -2, dunque a_n tende a $-\infty$.

3. Sia $f(x) = \frac{x\sin^2(3x)-(e^{2x}-\cos x)^3}{3x^4-x^3}$. • In 0 siamo in forma indeterminata $\frac{0}{0}$; sviluppando la funzione si ottiene $f(x) = \frac{x(3x+o_0(x^2))^2-(1+2x+2x^2+o_0(x^2)-1+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2))^3}{-x^3+o_0(x^3)} = \frac{9x^3+o_0(x^3)-8x^3+o_0(x^3)}{-x^3+o_0(x^3)} \sim_0 \frac{x^3}{-x^3} = -1$, dunque il limite vale -1. • In $+\infty$ si ha chiaramente $f(x) \sim_{+\infty} \frac{-e^{6x}}{3x^4}$, dunque il limite vale $-\infty$. • Infine, in $-\infty$ il numeratore non ha limite, ma è trascurabile rispetto al denominatore (che è $\sim_{+\infty} 3x^4$), dunque il limite vale 0.

4. (a) (Vedi figura) La funzione $f(x) = \log\left|x - 1 + \sqrt{|x|}\right|$ è definita tranne quando $\sqrt{|x|} = 1 - x$, e un confronto grafico mostra chiaramente che ciò accade in uno e un solo punto $x_0 \in]0,1[$, facilmente calcolabile ponendo $\sqrt{x} = t$ (viene $x_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sim 0{,}4$). Essa è derivabile infinite volte nel suo dominio tranne che in $x = 0$ (in cui vale $f(0) = 0$), punto in cui essa è di certo continua ma probabilmente (a causa della radice) non derivabile. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ (si ha in effetti $f(x) \sim_{\mp\infty} \log|x|$, dunque f va a $+\infty$ con andamento logaritmico) e $\lim_{x\to x_0^\mp} f(x) = -\infty$ Si ha $f(x) = 0$ quando $x - 1 + \sqrt{|x|} = \mp 1$, che si verifica quando $x = -1$, $x = 0$ o $x = 1$; si ha poi $f(x) > 0$ quando $|x - 1 + \sqrt{|x|}| > \mp 1$, il che accade quando $|x| > 1$. Derivando per $x \neq 0$ e posto $\sigma = \operatorname{sign} x$ (cioè $\sigma = \mp 1$ a seconda che $x \lesseqgtr 0$) si ha $f'(x) = \frac{1+\frac{\sigma}{2\sqrt{|x|}}}{x-1+\sqrt{|x|}} = \frac{2\sqrt{|x|}\,+\sigma}{2\sqrt{|x|}\,(x-1+\sqrt{|x|})}$: pertanto vale $f'(x) = 0$ quando $2\sqrt{|x|} = -\sigma$, il che forza $\sigma = -1$ ovvero $x < 0$ da cui $x = -\frac{1}{4}$. Quanto a $f'(x) > 0$, il numeratore è > 0 quando $x < -\frac{1}{4}$ oppure $x > 0$, il denominatore quando $x > x_0$, pertanto si ha $f'(x) > 0$ quando $-\frac{1}{4} < x < 0$ oppure $x > x_0$: ne ricaviamo che f decresce fino al minimo relativo $f(-\frac{1}{4}) = \log\frac{3}{4} = 2\log 2 - \log 3 \sim -0{,}3$, poi cresce fino a $f(0) = 0$, quindi decresce fino a $-\infty$ in x_0^- e infine cresce a $+\infty$. Notiamo che $x = 0$ è di massimo relativo singolare, perché come atteso vale $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = \pm\infty$.

(b) Ponendo $t = x - 1$ si ha $f(x) = \log(t + \sqrt{1+t}) = \log(t + 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o_0(t^2)) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o_0(t^2) - \frac{1}{2}(\frac{3}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o_0(t^2))^2 + o_0(t^2) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o_0(t^2) - \frac{9}{8}t^2 + o_0(t^2) + o_0(t^2) = \frac{3}{2}(x-1) - \frac{5}{4}(x-1)^2 + o_0((x-1)^2))$, pertanto la parte principale è $\frac{3}{2}(x-1)$. In realtà, per quanto era richiesto bastava notare che per Taylor vale $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + o_1(x-1) = \frac{3}{2}(x-1) + o_1(x-1)$. • Si è già osservato che $f(x) \sim_{+\infty} \log x$, dunque questa è la parte principale cercata. Volendo anche qua andare alla ricerca del secondo termine significativo, si ha $f(x) - \log x = \log\frac{x-1+\sqrt{x}}{x} = \log(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} + o_{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

5. (Vedi figura) Nell'intervallo d'integrazione si ha $f(x) = \log(x - 1 + \sqrt{x})$. Ponendo $x = t^2$ (dunque $t \in [1,2]$) si ottiene $\int f(x)\,dx = \int 2t\log(t^2 + t - 1)\,dt = t^2\log(t^2 + t - 1) - \int t^2\frac{2t+1}{t^2+t-1}\,dt = t^2\log(t^2 + t - 1) - \int(2t - 1 + \frac{3t-1}{t^2+t-1})\,dt = t^2\log(t^2 + t - 1) - t^2 + t - \frac{15-\sqrt{5}}{10}\log(t - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}) - \frac{15+\sqrt{5}}{10}\log(t - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) =: F(t)$, dunque l'integrale vale $F(2) - F(1)$.

6. La serie $\sum_n \frac{(3-2\operatorname{arctg} x)^n}{n^x+3}$ ha senso per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è a termini nulli quando $\operatorname{arctg} x = \frac{3}{2}$, ovvero $x = \operatorname{tg}\frac{3}{2} \sim 14{,}1$; negli altri casi applichiamo il criterio del rapporto. Poiché $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = (\frac{n^x+3}{(n+1)^x+3})|3 - 2\operatorname{arctg} x|$ tende a $|3 - 2\operatorname{arctg} x|$, si ha che se $|3 - 2\operatorname{arctg} x| < 1$ (ovvero se $1 < \operatorname{arctg} x < 2$, ovvero se $x > x_0 := \operatorname{tg} 1 \sim 1{,}55$) la serie converge assolutamente, mentre se $|3 - 2\operatorname{arctg} x| > 1$ (il che accade solo quando $3 - 2\operatorname{arctg} x > 1$, cioè $\operatorname{arctg} x < 1$, cioè $x < x_0$) essa non converge e dunque, essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$. Resta da esaminare solo il caso particolare di $x = x_0$, in cui la serie diventa $\sum \frac{1}{n^{x_0}+3}$: avendo il termine generale asintotico a quello della serie armonica di esponente $x_0 > 1$, essa converge.

7. (a) Posto $z = x + iy$ si ha $g(z) = 2(1+i)(x+iy) - (x-iy)^2 = (-x^2 + y^2 + 2x - 2y) + i2(xy + x + y)$, dunque la condizione che $g(z)$ sia immaginario puro si esprime dicendo che $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$, mentre la condizione che $g(z)$ sia reale dicendo che $xy + x + y = 0$. Trattandosi di equazioni di secondo grado, i luoghi geometrici espressi sul piano di Gauss saranno delle coniche (ellissi, parabole o iperboli, eventualmente degeneri). L'equazione del luogo $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$ si nota facilmente essere equivalente a $(x-1)^2 = (y-1)^2$, ovvero $x - 1 = y - 1$ oppure $x - 1 = 1 - y$: trattasi dunque dell'unione delle due rette $y = x$ e $y = 2 - x$ (un'iperbole degenere). Quanto a $xy + x + y = 0$, nelle coordinate traslate $(X, Y) = (x+1, y+1)$ tale equazione diventa $XY = 1$: pertanto nel riferimento (x, y) si tratta di un'iperbole equilatera con asintoti le rette $x = -1$ e $y = -1$.

(b) Dividendo $z^3 + (4+3i)z + \alpha$ per $(z - z_1)$ si ottiene come quoziente $z^2 - (1+2i)z + 1 + 7i$ e come resto $\alpha + 13 - 9i$, dunque affinché z_1 sia soluzione dell'equazione dovrà essere $\alpha = -13 + 9i$. In tal caso, le altre due soluzioni dell'equazione sono date da $z^2 - (1+2i)z + 1 + 7i = 0$, ovvero $z = \frac{(1+2i) \mp \sqrt{1-4+4i-4(1+7i)}}{2} = \frac{(1+2i) \mp \sqrt{-7-24i}}{2} = \frac{(1+2i) \mp (3-4i)}{2}$, ovvero $z_2 = 2 - i$ e $z_3 = -1 + 3i$.

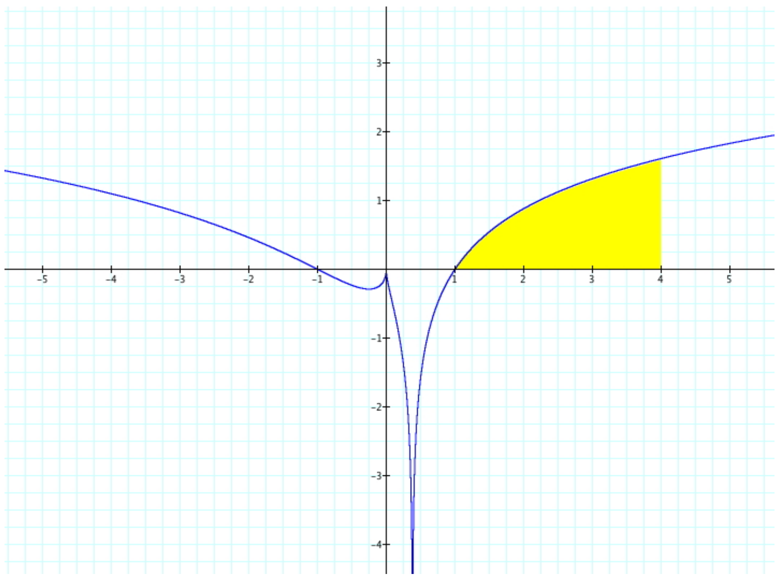

Grafico (blu) della funzione $f(x) = \log \left| x - 1 + \sqrt{|x|} \right|$ dell'Ex. 4. L'area richiesta nell'Ex. 5 è in giallo.