Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (19/09/2011)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina[1] alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1, \cos x > \cos 2\} \cup \{\frac{(-1)^n}{n} - 2 : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{(n!)^{\alpha-1} - n|\alpha|^n}{3n^\alpha - 5 - e^{-n}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati specifici (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{-\infty,\,0,\,+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \cos x + 2x^3}{\big(3(e^{-x} - 1) - (x+1)\operatorname{arctg} x\big)^2}$ con l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...).

4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1 - 2\log|x|}$ e tracciarne il grafico.[2]

(b) Si può prolungare $f(x)$ anche in $x = 0$? Determinarne poi le parti principali in $-\infty$, -1, 0, 1.

5. Calcolare le primitive di $\dfrac{x^\alpha}{f(x)}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (ove $f(x)$ è quella dell'Ex. 4).

6. Discutere il carattere della serie $\displaystyle\sum_n \left(2(n+1)^\alpha - \frac{e^{\alpha n}}{n+1}\right)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. (a) Dato il polinomio $p_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z^3 - z + \beta$, determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ affinché tra le soluzioni di $p_{\alpha,\beta}(z) = 0$ appaiano 1 e i; trovare poi tutte le altre soluzioni di tale equazione.

(b) Posto $\beta = 1$, dare tutte le informazioni possibili sulle soluzioni reali di $p_{\alpha,1}(z) = 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$.

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

[2] Non è richiesto lo studio della convessità.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (19/09/2011) – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1, \cos x > \cos 2\} = [1, 2[\;\cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} \,]-2+2k\pi, 2+2k\pi[$ (unione infinita di intervalli, superiormente illimitata) e $A_2 = \{\frac{(-1)^n}{n} - 2 : n \in \mathbb{N}\} = \{-3, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{4}, -\frac{11}{5}, -\frac{11}{6}, \dots\}$ (insieme discreto di punti, compreso tra -3 e $-\frac{3}{2}$, che salta a sinistra e destra di -2, tendendovi). Dunque A è inferiormente limitato e superiormente illimitato, con $\min A = -3$; i suoi punti interni sono quelli di A_1 tranne 1; quelli di chiusura sono tutti i suoi più -2, $+\infty$ e gli estremi degli intervalli di A_1, e, tra questi, gli isolati sono quelli di A_2 e tutti gli altri sono di accumulazione. Ne ricaviamo che A non è ne' aperto (ad esempio non è intorno del suo punto 1) ne' chiuso (non contiene la sua accumulazione -2); non è ne' compatto ne' discreto. Infine, sono di frontiera i punti -2, $+\infty$, tutti quelli di A_2 e gli estremi degli intervalli di A_1.

2. Nella successione $a_n = \frac{(n!)^{\alpha-1} - n|\alpha|^n}{3n^\alpha - 5 - e^{-n}}$ iniziamo esaminando i comportamenti di numeratore e denominatore; terremo presente i noti rapporti di forza tra potenza, esponenziale e fattoriale conseguenti dal criterio del rapporto. • Al numeratore, se $\alpha > 1$ si tende a $+\infty$ seguendo $(n!)^{\alpha-1}$; se $\alpha = 1$ si ha $1 - n$, che tende a $-\infty$; se $-1 < \alpha < 1$ si tende a 0; se $\alpha = -1$ si tende a $-\infty$ come $-n$; e se se $\alpha < -1$ si tende ancora a $-\infty$ come $-n|\alpha|^n$. • Al denominatore, se $\alpha > 0$ si tende a $+\infty$ seguendo $3n^\alpha$; se $\alpha = 0$ si tende a -2; e se $\alpha < 0$ si tende a -5. • Pertanto, se $\alpha > 1$ la successione a_n tende a $+\infty$; per $\alpha = 1$ tende a $-\frac{1}{3}$; se $-1 < \alpha < 1$ è infinitesima; e se $\alpha \leq -1$ tende a $+\infty$.

3. Sia $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \cos x + 2x^3}{(\,3(e^{-x}-1)-(x+1)\,\mathrm{arctg}\, x\,)^2}$. • Vale $f(x) \sim_{-\infty} \frac{2x^3}{(3e^{-x})^2}$, dunque $\lim_{-\infty} f(x) = 0^-$. • In 0 il limite è in forma $\frac{0}{0}$. Sviluppando (e notando che $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$) si ottiene $f(x) = \frac{(1-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^3))-(1-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^3))+2x^3}{(3(1-x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2))-1)-(1+x)(x+o_0(x)))^2} = \frac{2x^3+o_0(x^3)}{(-4x+o_0(x))^2}$, dunque $\lim_0 f(x) = \lim_0 \frac{2x^3}{16x^2} = 0$. • Infine $f(x) \sim_{+\infty} \frac{2x^3}{(-\frac{\pi}{2}x)^2} = +\infty$.

4. (a) (Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{x^2}{x+1-2\log|x|}$ è definita e $\mathcal{C}^\infty$ ovunque tranne che in 0 e nei punti in cui $\log|x| = \frac{1}{2}(x+1)$, il che (come mostra chiaramente un confronto grafico) accade solo in -1. Vanno dunque esclusi 0 e -1: solo che, mentre $\lim_{x\to-1^\mp} f(x) = \infty$, si ha evidentemente $\lim_{x\to0} f(x) = 0$ e dunque f può essere estesa anche in 0 col valore $f(0) = 0$ (almeno per continuità, poi vedremo se in realtà ci sarà maggiore regolarità). Con questa definizione, $x = 0$ è l'unico zero di f; si ha poi $f(x) > 0$ dove $\log|x| < \frac{1}{2}(x+1)$, il che accade per $x > -1$ (tranne che in 0). Si ha chiaramente $f(x) \sim_{\mp\infty} x$, il che fa nascere il sospetto dell'esistenza di asintoti lineari: tuttavia $f(x) - x = \frac{x(2\log|x|-1)}{x+1-2\log|x|} \sim_{\mp\infty} \frac{2x\log|x|}{x} = 2\log|x|$, dunque niente da fare. Derivando (per $x \neq 0, -1$) si ottiene $f'(x) = \frac{x(x+4-4\log|x|)}{(x+1-2\log|x|)^2}$: notiamo subito che $\lim_{x\to0} f'(x) = 0$, dunque il prolungamento di f è anche $\mathcal{C}^1$ in $x = 0$ con $f'(0) = 0$. Essendo inoltre $\lim_{x\to0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{x+4-4\log|x|}{(x+1-2\log|x|)^2} = \lim_{x\to0} \frac{-4\log|x|}{4\log^2|x|} = 0$, si ha che f è anche derivabile due volte in $x = 0$ (derivando ulteriormente ci si accorgerebbe che in realtà f è ivi di classe $\mathcal{C}^2$). Oltre che in $x = 0$, vale $f'(x) = 0$ dove $\log|x| = \frac{1}{4}x + 1$, il che (altro confronto grafico) accade in un solo punto $x_0 \sim -1{,}7$; e per $x \gtrless 0$ vale $f'(x) > 0$ dove $\log|x| \lesseqgtr \frac{1}{4}x + 1$, dunque per $x < x_1$ o per $x > 0$. Pertanto $x = x_1$ è un punto di massimo locale (con $f(x_1) \sim -1{,}6$), mentre $x = 0$ è di minimo locale.

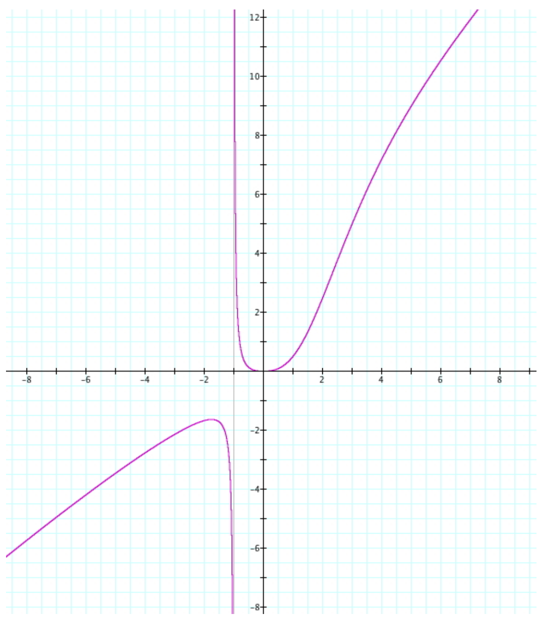
(b) Sul prolungamento di $f(x)$ in $x = 0$ si è già detto ampiamente in precedenza. Quanto alle parti principali, abbiamo visto che $f(x) \sim_{\mp\infty} \frac{x^2}{x} = x$; vale poi $f(x) \sim_0 \frac{x^2}{-2\log|x|} = -\frac{1}{2}x^2(\log|x|)^{-1}$, mentre in $x = 1$ si ha che f è finita e dunque $f(x) \sim_1 f(1) = \frac{1}{2}$. Occupiamoci infine di $x = -1$. Posto $t = x+1$ si ha $\varphi(t) := f(-1+t) = \frac{(-1+t)^2}{t-2\log(1-t)} = \frac{(-1+t)^2}{t-2(-t+o_0(t))} \sim_0 \frac{1}{3t}$, dunque $f(x) \sim_{-1} \frac{1}{3}(x+1)^{-1}$.

5. Si ha $\int \frac{x^\alpha}{f(x)}\,dx = \int \frac{x+1-2\log|x|}{x^{2-\alpha}}\,dx = \int x^{\alpha-1}\,dx + \int x^{\alpha-2}\,dx - 2\int x^{\alpha-2}\log|x|\,dx$. Vanno allora discussi tre diversi casi. • Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ si ottiene $\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} - 2\big(\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\log|x| - \int \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\frac{1}{x}\,dx\big) = \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\big(1 - 2\log|x| + \frac{2}{\alpha-1}\big) + k$. • Se $\alpha = 0$ si ottiene $\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2}\log|x|\,dx = \log|x| - \frac{1}{x} - 2(-\frac{1}{x}\log|x| - \int(-\frac{1}{x})\frac{1}{x}\,dx) = \log|x| - \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\log|x| + \frac{2}{x} + k$. • Infine, se $\alpha = 1$ si ha $\int 1\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x}\log|x|\,dx = x + \log|x| - \log^2|x| + k$.

6. La serie $\sum(2(n+1)^\alpha - \frac{e^{\alpha n}}{n+1})$ può essere vista come serie differenza delle due serie (a termini positivi) $\sum 2(n+1)^\alpha$ e $\sum \frac{e^{\alpha n}}{n+1}$: converrà allora iniziare dallo studio di ognuna delle due serie addendi. • La serie $\sum 2(n+1)^\alpha$ è ovviamente dello stesso ordine della serie armonica $\sum n^\alpha$, dunque converge per $\alpha < -1$ e diverge a $+\infty$ per $\alpha \geq -1$. • Per la serie $\sum \frac{e^{\alpha n}}{n+1}$, applicando il criterio della radice si vede subito che converge per $\alpha < 0$ e diverge a $+\infty$ per $\alpha > 0$; nel caso $\alpha = 0$ si ha $\sum \frac{1}{n+1}$, che pure diverge a $+\infty$. • Possiamo allora dire subito che per $\alpha < -1$ la nostra serie converge, e per $-1 \leq \alpha < 0$ diverge a $+\infty$. Nei casi $\alpha \geq 0$ le considerazioni precedenti non risolvono la questione, ma l'indagine diretta non lascia dubbi: infatti per $\alpha = 0$ si ottiene $\sum(2 - \frac{1}{n+1})$, che diverge a $+\infty$ (è a termini positivi, e il termine generale non è infinitesimo), mentre nel caso $\alpha > 0$ il termine generale tende evidentemente a $-\infty$, dunque la serie diverge a $-\infty$.

7. (a) Se al polinomio $p_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z^3 - z + \beta$ si impone che $p_{\alpha,\beta}(1) = p_{\alpha,\beta}(i) = 0$ si ottiene $\alpha - 1 + \beta = -\alpha i - i + \beta = 0$, che ha l'unica soluzione $(\alpha, \beta) = (-i, 1 + i)$. Se si divide allora $p_{-i,1+i}(z) = -iz^3 - z + 1 + i$ per $(z - 1)(z - i)$ si ottiene quoziente $-iz + 1 - i$, dunque l'ultima soluzione di $p_{-i,1+i}(z) = 0$ è $z = \frac{1-i}{i} = -i(1 - i) = -1 - i$.

(b) Se cerchiamo soluzioni reali $z \in \mathbb{R}$ di $p_{\alpha,1}(z) = \alpha z^3 - z + 1 = 0$, poiché deve essere $\alpha z^3 = z - 1$ dovrà aversi di certo $\alpha \in \mathbb{R}$. Si tratta dunque di studiare l'andamento della cubica reale $c_\alpha(x) = \alpha x^3 - x + 1$, e segnatamente i suoi zeri. Notiamo che per $\alpha < 0$ la derivata $c'_\alpha(x) = 3\alpha x^2 - 1$ è strettamente negativa, dunque in tal caso la cubica $c_\alpha(x)$ è strettamente decrescente: notando che $c_\alpha(0) = 1 > 0$ e $c_\alpha(1) = \alpha < 0$, ci sarà un solo zero reale tra 0 e 1 (alternativamente si poteva operare un confronto grafico tra αx^3 e $x - 1$). Per $\alpha = 0$ si ha $-x + 1 = 0$, con la sola soluzione $x = 1$. Invece nel caso $\alpha > 0$ la derivata ha due zeri $x = \mp\frac{1}{\sqrt{3\alpha}}$, rispettivamente punti di massimo e minimo locale in cui la cubica vale $1 \pm \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$. Si noti che il valore del massimo locale è sempre > 0, mentre quello del minimo locale è ≥ 0 se e solo se $\alpha \geq \frac{4}{27}$: ne ricaviamo che per $\alpha > 0$ c'è sempre uno zero reale $x_1 < -\frac{1}{\sqrt{3\alpha}}$, che per $\alpha > \frac{4}{27}$ è il solo, mentre per $0 < \alpha \leq \frac{4}{27}$ è accompagnato da altri due zeri x_2 e x_3 con $1 < x_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3\alpha}} \leq x_3$ (si noti che ora $c_\alpha(1) = \alpha > 0$), con le uguaglianze che valgono entrambe contemporaneamente quando $\alpha = \frac{4}{27}$ (in questo caso $x_2 = x_3 = \frac{3}{2}$, e $x_1 = -3$).



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$.