Capitolo 1

Equazioni ellittiche

[1]

1.1 Formulazione astratta del Metodo degli Elementi Finiti per problemi ellittici

Lo scopo di questa (usuale) presentazione astratta è quello di poter trattare in modo unificato vari problemi in meccanica e fisica, ovvero poter concentrarsi sulle proprietà matematiche delle entità coinvolte, senza dover fare riferimento ad un'applicazione in particolare.

Sia $\mathcal{V}$ uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}}$ e norma corrispondente $||\cdot||_{\mathcal{V}}$ (detta 'norma-V').

Sia $a(\cdot,\cdot)$ una *forma bilineare* (ovvero lineare in ciascuno dei suoi argomenti) su $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$. Supponiamo che essa sia:

- *simmetrica*:
$$a(u,v) = a(v,u) \tag{1.1.1}$$
- *continua*: $\quad \exists M \quad$ tale che $\quad \forall u \in \mathcal{V}, \forall v \in \mathcal{V},$
$$a(u,v) \le M||u||_{\mathcal{V}}||v||_{\mathcal{V}} \tag{1.1.2}$$
- *V-ellittica*: $\quad \exists \alpha > 0 \quad$ tale che $\quad \forall v \in \mathcal{V},$
$$a(v,v) \ge \alpha ||v||^2_{\mathcal{V}} \tag{1.1.3}$$

Sia $L(\cdot)$ una forma lineare su $\mathcal{V}$, ovvero L è un elemento del duale topologico $\mathcal{V}'$ di $\mathcal{V}$, nel quale è definita la norma duale:

$$||L||_{\mathcal{V}'} = \sup_{v\in\mathcal{V}, ||v||_{\mathcal{V}}=1} L(v) \qquad . \tag{1.1.4}$$

e supponiamo che essa sia:

---

[1]F. Marcuzzi - Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Universita' di Padova, 35131 Padova, Italy (marcuzzi@math.unipd.it).

- *continua*: $\exists \Lambda$ tale che $\forall v \in \mathcal{V}$,

$$|L(v)| \leq \Lambda ||v||_{\mathcal{V}} \quad . \tag{1.1.5}$$

Dato $v \in V$ ed il seguente funzionale:

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \quad , \tag{1.1.6}$$

consideriamo il problema astratto di minimo: trovare $u \in \mathcal{V}$ tale che

$$F(u) = \min_{v \in \mathcal{V}} F(v) \tag{1.1.7}$$

e consideriamo il seguente problema variazionale astratto: trovare $u \in \mathcal{V}$ tale che

$$a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \quad . \tag{1.1.8}$$

Si può dimostrare il seguente teorema [2]:

Teorema 1 *I problemi (1.1.7) e (1.1.8) sono equivalenti, ovvero $u \in \mathcal{V}$ soddisfa (1.1.7) sse soddisfa (1.1.8). Inoltre, esiste un'unica soluzione a questi due problemi, e vale la seguente stima (di stabilità):*

$$||u||_{\mathcal{V}} \leq \frac{\Lambda}{\alpha} \tag{1.1.9}$$

Dim: Con le ipotesi fatte sopra, il ben noto Lemma di Lax-Milgram (che è una variante del teorema di rappresentazione di Riesz nella teoria degli spazi di Hilbert, per una dimostrazione cfr. ad esempio [1] [3]) stabilisce che esiste una ed una sola soluzione al problema variazionale astratto (1.1.8).

Per provare che (1.1.7) e (1.1.8) sono equivalenti, proviamo che se $u \in \mathcal{V}$ soddisfa (1.1.7) allora soddisfa anche (1.1.8). Il vice-versa procede in maniera analoga e lo omettiamo. Siano $v \in \mathcal{V}$ ed $\epsilon \in \Re$ arbitrari. Allora, $(u + \epsilon v) \in \mathcal{V}$ e dato che u è punto di minimo per $F(.)$,

$$F(u) \leq F(u + \epsilon v) \qquad \forall \epsilon \in \Re \quad .$$

Ponendo $g(\epsilon) = F(u + \epsilon v)$, si ha che g ha un minimo in $\epsilon = 0$. Quindi deve essere $g'(0) = 0$, se tale derivata esiste. Ma allora:

$$\begin{aligned}
&g(\epsilon) = \tfrac{1}{2} a(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - L(u + \epsilon v) \\
&= \tfrac{1}{2} a(u, u) + \tfrac{\epsilon}{2} a(u, v) + \tfrac{\epsilon}{2} a(v, u) + \tfrac{\epsilon^2}{2} a(v, v) - L(u) - \epsilon L(v) \\
&= \tfrac{1}{2} a(u, u) - L(u) + \epsilon a(u, v) - \epsilon L(v) + \tfrac{\epsilon^2}{2} a(v, v)
\end{aligned}$$

dove si è sfruttata la simmetria di $a(\cdot, \cdot)$ e la linearità di $a(\cdot, \cdot)$ ed $L(\cdot)$. Mediante semplici conti, otteniamo:

$$0 = g'(0) = a(u, v) - L(v)$$

ovvero u risolve anche (1.1.8). Per dimostrare la stima di stabilità (1.1.9), poniamo $v = u$ in (1.1.8) ed usiamo la $\mathcal{V}$-ellitticità di $a(\cdot, \cdot)$, (1.1.3), e la continuità di $L(.)$, (1.1.5), ed otteniamo:

$$\alpha ||u||_{\mathcal{V}}^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \Lambda ||u||_{\mathcal{V}}$$

da cui si ottiene la (1.1.9) dividendo semplicemente per $||u||_{\mathcal{V}} > 0$. La stima di stabilità (1.1.9) ci conduce facilmente a dimostrare anche l'unicità della soluzione. Se u_1 ed u_2 sono due soluzioni $\in \mathcal{V}$, allora

$$a(u_i, v) = L(v) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \quad i = 1, 2$$

ed allora per semplice sottrazione abbiamo

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{V}$$

(notare che $u_1 - u_2 \in \mathcal{V}$) ci porta alla conclusione che $||u_1 - u_2||_{\mathcal{V}} = 0$, ovvero che $u_1 = u_2$. $\diamond$

Nota bene: se $a(\cdot, \cdot)$ non soddisfa alla condizione di simmetria (1.1.1), si può comunque dimostrare che il problema (1.1.8) ammette una ed una sola soluzione e che vale ovviamente ancora la stima di stabilità (1.1.9). Ora non c'è più però alcun problema di minimo associato al problema variazionale.

1.2 Discretizzazione del problema variazionale

Per poter risolvere il problema (1.1.8) mediante calcolo numerico, è necessario calcolare la soluzione in uno spazio avente dimensione finita. Consideriamo dunque lo spazio di Hilbert a dimensione finita $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, che mantiene la norma di $\mathcal{V}$, e risolviamo il seguente problema approssimato: trovare $u_h \in \mathcal{V}_h$ tale che

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \qquad . \tag{1.2.10}$$

1.2.1 Analisi del problema discreto e stima dell'errore di approssimazione

Il problema (1.2.10) ha anch'esso una ed una sola soluzione per lo stesso lemma di Lax-Milgram precedentemente citato. Inoltre, vale la stima di stabilità, analoga alla (1.1.9):

$$||u_h||_{\mathcal{V}} \leq \frac{\Lambda}{\alpha} \tag{1.2.11}$$

(che si ricava analogamente a quanto fatto per dimostrare il Teorema 1, ponendo $v_h = u_h$ nella (1.2.10), ecc.) Nel Metodo degli Elementi Finiti, $\mathcal{V}_h$ è scelto come spazio di *elementi finiti* [1] ed h è un parametro rappresentativo della dimensione massima degli elementi finiti usati nella discretizzazione del dominio geometrico del problema. Sia dunque $||\cdot||_{\mathcal{V}}$ la norma di $\mathcal{V}$, allora per il problema approssimato (1.2.10) è disponibile una fondamentale stima astratta dell'errore di approssimazione, contenuta nel lemma seguente:

Lemma 1 *(Lemma di Céa) Esiste una costante, pari a $\frac{M}{\alpha}$, indipendente dal sottospazio $\mathcal{V}_h$ e tale che*

$$||u - u_h||_{\mathcal{V}} \quad \leq \quad \frac{M}{\alpha} \quad \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} ||u - v_h||_{\mathcal{V}} \tag{1.2.12}$$

dove α and M sono le costanti di ellitticità (detta anche di coercività) e di continuità definite in (1.1.3) (1.1.2). Di conseguenza, una condizione sufficiente *per la convergenza è che esista una famiglia* $\{\mathcal{V}_h\}$ *di sottospazi di* $\mathcal{V}$ *tale che, per ciascun* $u \in \mathcal{V}$*,*

$$\lim_{h\to 0} \inf_{v_h\in\mathcal{V}_h} ||u - v_h||_{\mathcal{V}} = 0 \tag{1.2.13}$$

Dim: Sia w_h un elemento arbitrario di $\mathcal{V}_h$. Segue da (1.1.8) e (1.2.10) che

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \qquad . \tag{1.2.14}$$

Usando le stesse costanti α and M definite in (1.1.3) (1.1.2), si ha, $\forall v_h \in \mathcal{V}_h$ e dato che $u_h - v_h \in \mathcal{V}_h$:

$$\alpha||u - u_h||^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M||u - u_h||||v - v_h||$$

e dunque si arriva alla conclusione. $\diamond$

La stima dell'errore (1.2.12) e la stima di stabilità (1.2.11) sono in parte responsabili del successo del metodo di approssimazione variazionale. A questi, come vedremo, il Metodo degli Elementi Finiti aggiunge altre proprietà fondamentali, come la facilità nel descrivere domini complicati dal punto di vista geometrico e la semplicità nell'effettuare il calcolo degli integrali che in generale compaiono nella $a(\cdot,\cdot)$ e in $L(.)$.

In particolare, la stima (1.2.12) ci dice che il problema della determinazione di una maggiorazione dell'errore è riconducibile ad un preciso problema di teoria dell'approssimazione: trovare una maggiorazione il più possibile stretta della quantità $\inf_{v_h\in\mathcal{V}_h} ||u - v_h||_{\mathcal{V}}$, ovvero della distanza in $\mathcal{V}$ tra la soluzione u e il sottospazio $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. L'approccio comunemente seguito per fare questo è scegliere un opportuno elemento di $\mathcal{V}$, e precisamente l'interpolante $\pi_h u$ di u, stimare l'errore di interpolazione $||u - \pi_h u||_{\mathcal{V}}$, ed usarlo come maggiorazione di $||u - u_h||_{\mathcal{V}}$ grazie alla (1.2.12).

Al paragrafo 1.6 vedremo alcune stime per l'errore di interpolazione su elementi finiti.

1.2.2 La norma dell'energia

Se valgono le ipotesi su $a(\cdot,\cdot)$ introdotte al paragrafo (1.1), allora possiamo introdurre la nuova norma $||.||_a$ su $\mathcal{V}$, detta *norma dell'energia*, definita come segue:

$$||v||_a^2 = a(v, v) \qquad , \qquad v \in \mathcal{V} \tag{1.2.15}$$

ed il relativo prodotto scalare: $(u, v)_a = a(u, v)$.

Questa norma è equivalente alla norma $||.||_{\mathcal{V}}$ e più precisamente:

$$\sqrt{\alpha}||v||_{\mathcal{V}} \leq ||v||_a \leq \sqrt{\gamma}||v||_{\mathcal{V}} \tag{1.2.16}$$

Ora, l'equazione d'errore (1.2.14) può essere scritta come

$$(u - u_h, w_h)_a = 0 \qquad . \tag{1.2.17}$$

ovvero (Lemma 1)

$$||u - u_h||_a \quad \leq \quad ||u - v_h||_a \qquad , \qquad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \tag{1.2.18}$$

ovvero che u_h è la proiezione di u in $\mathcal{V}_h$ rispetto al prodotto scalare $(.,.)_a$. Quindi, u_h è la miglior approssimazione di u nella norma dell'energia.

1.2.3 Costruzione del problema discreto

Vediamo ora il significato di passare dal problema variazionale continuo (1.1.8), definito in $\mathcal{V}$, a quello discreto (1.2.10), definito in $\mathcal{V}_h$. Sia dunque $\mathcal{V}_h$ un sottospazio di $\mathcal{V}$ di dimensione N_h, e sia $\{\phi_1, \ldots, \phi_{N_h}\}$ una base di $\mathcal{V}_h$, per cui $\phi_i \in \mathcal{V}_h$ ed il generico $v_h \in \mathcal{V}_h$ ammette un'unica rappresentazione come

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i \phi_i \qquad , \qquad c_i \in \Re \qquad . \tag{1.2.19}$$

Allora, il problema discreto (1.2.10) è equivalente a

$$a(u_h, c_i\phi_i) = L(c_i\phi_i) \qquad i = 1 \ldots N_h \qquad , \qquad \forall c_i \in \Re$$

ovvero, per linearità:

$$a(u_h, \phi_i) = L(\phi_i) \qquad i = 1 \ldots N_h \tag{1.2.20}$$

e dato che anche u_h ammette una rappresentazione del tipo

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} x_i \phi_i \qquad , \qquad x_i \in \Re \qquad , \tag{1.2.21}$$

il problema (1.2.10) corrisponde a

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\phi_j, \phi_i) x_j = L(\phi_i) \qquad i = 1 \ldots N_h \tag{1.2.22}$$

ovvero, in forma matriciale

$$Ax = b \tag{1.2.23}$$

dove $b_i = L(\phi_i)$ ed $A = [a_{ij}] = a(\phi_j, \phi_i)$ è una matrice $\in \Re^{N_h \times N_h}$ ed è detta *matrice di rigidezza* (o di *stiffness*). Notare che gli argomenti u_h e v_h della notazione standard $a(u_h, v_h) = \{a(\phi_j, \phi_i)\}$ vengono invertiti nella notazione matriciale $A = a_{ij}$, in quanto nel sistema lineare ad ogni componente di v_h corrisponde un vincolo, e dunque un'equazione del sistema lineare, mentre ad ogni componente di u_h corrisponde una variabile incognita.

Inoltre, considerando un generico elemento v_h ed il corrispondente vettore (colonna) c di coefficienti, si ha:

$$a(v_h, v_h) = a(\sum_{j=1}^{N_h} c_i \phi_j, \sum_{i=1}^{N_h} c_i \phi_i) = \sum_{i,j=1}^{N_h} c_i a(\phi_j, \phi_i) c_j = c^T \cdot Ac$$

e

$$L(v_h) = L(\sum_{i=1}^{N_h} c_i \phi_i) = \sum_{i=1}^{N_h} c_i L(\phi_i) = b^T \cdot c$$

dove '$\cdot$' indica il prodotto scalare di $\Re^{N_h}$.

Ne segue che il problema di minimo (1.1.7), discretizzato, può essere formulato come

$$\frac{1}{2} x^T \cdot Ax - b^T \cdot x = \min_{c \in \Re^{N_h}} \left(\frac{1}{2} c^T \cdot Ac - b^T \cdot c \right) \qquad . \tag{1.2.24}$$

Inoltre, date le ipotesi fatte su $a(\cdot, \cdot)$, possiamo dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2 *La matrice di rigidezza A è simmetrica e definita positiva.*

Dim: richiamando la V-ellitticità (1.1.3) di $a(\cdot,\cdot)$, si ha:

$$c^T \cdot Ac = a(v_h, v_h) \geq \alpha ||v_h||^2_{\mathcal{V}} > 0$$

se $v \neq 0$, ovvero $c \neq 0$. Quindi A è definita positiva. Data la simmetria di $a(\cdot,\cdot)$ seguono le conclusioni. $\diamond$

1.3 Alcuni esempi applicativi

In questa sezione vediamo soprattutto la connessione tra il problema variazionale astratto (1.1.8) ed alcuni esempi concreti di problemi ai limiti, stazionari o evolutivi. Nel seguito chiameremo Ω il dominio geometrico del problema e Γ il suo contorno.

1.3.1 problema di Neumann

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{array}{lll} -\Delta u + u = f & \text{in} & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{su} & \Gamma \end{array} \quad .$$

Siano $g = 0$, $f \in L_2(\Omega)$, $\mathcal{V} = \mathcal{H}^1(\Omega)$, $\Omega \subset \Re^2$, allora la corrispondente formulazione variazionale di questo problema è la seguente:

$$\begin{array}{l} a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx \\ L(v) = \int_\Omega f v dx \end{array} \quad .$$

Vediamo ora se $a(\cdot,\cdot)$ ed $L(.)$ verificano le proprietà elencate all'inizio del paragrafo (1.1). Si vede facilmente che $a(\cdot,\cdot)$ è una forma bilineare simmetrica su $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ed $L(.)$ è una forma lineare. Inoltre,

$$a(u,u) = ||u||^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$$

e, per la diseguaglianza di Cauchy,

$$a(u,v) \leq a(u,u)^{1/2} a(v,v)^{1/2} = ||u||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} ||v||_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$$

ovvero $a(\cdot,\cdot)$ è continua e V-ellittica con $M = 1$ ed $\alpha = 1$. Infine,

$$|L(v)| \leq \left| \int_\Omega f v dx \right| \leq ||f||_{L_2(\Omega)} ||v||_{L_2(\Omega)}$$

ovvero $L(.)$ è continua con $\Lambda = ||f||_{L_2(\Omega)}$.

1.4 Il Metodo dei Residui Pesati

Da quanto visto alla sezione precedente, il Metodo degli Elementi Finiti viene in pratica costruito dalla forma forte del problema differenziale ai limiti, moltiplicando ambo i membri per uno spazio di funzioni di test ed integrando. Questo modo di procedere, che in pratica tende a rendere il residuo della forma forte ortogonale all spazio delle funzioni test rispetto al prodotto di L_2, è noto come *Metodo dei Residui Pesati.*

A seconda di come si sceglie lo spazio delle funzioni test, si ha un metodo differente: Galerkin, Collocation, Least squares, etc.

1.5 Spazi di elementi finiti

1.6 Stima dell'errore di interpolazione con elementi finiti

Ora ci dedichiamo alla stima dell'errore di interpolazione $||u - \pi_h u||_{\mathcal{V}}$ [2, 1, 3]. L'intepolante $\pi_h u$ appartiene a $\mathcal{V}_h$ ed essendo l'interpolazione su elementi finiti risolta localmente sugli elementi (è di fatto un'interpolazione polinomiale a tratti), l'errore può essere valutato considerando ogni singolo elemento finito.

Consideriamo il caso in cui $\mathcal{V} = \mathcal{H}^1(\Omega)$ e $\mathcal{V}_h = \{v \in \mathcal{V} : v\,|_{\mathcal{E}_i} \in P_1(\mathcal{E}_i), \forall \mathcal{E}_i \in \mathcal{T}_h\}$, dove $\mathcal{T}_h = \{\mathcal{E}_i\} \quad i = 1 \ldots N_{el}$ è una triangolazione di $\Omega \subset \Re^2$, ovvero $\mathcal{V}_h$ è l'usuale spazio di elementi finiti di Lagrange (funzioni lineari a tratti) definiti sugli elementi $\mathcal{E}_i$, aventi forma triangolare. Per ciascun $\mathcal{E}_i \in \mathcal{T}_h$, definiamo:

- $h_{\mathcal{E}_i}$, il diametro di $\mathcal{E}_i$, $\approx$ la maggior lunghezza dei lati di $\mathcal{E}_i$;
- $\rho_{\mathcal{E}_i} =$, il diametro del cerchio inscritto in $\mathcal{E}_i$;
- $h = \max_{\mathcal{E}_i \in \mathcal{T}_h} h_{\mathcal{E}_i}$.

Per calcolare delle maggiorazioni dell'errore di interpolazione, consideriamo una famiglia di triangolazioni $\{\mathcal{T}_h\}$, parametrizzata in h.

La prima cosa da osservare è che abbiamo definito dei parametri che descrivono le dimensioni relative degli elementi finiti, ovvero il cosiddetto *aspect-ratio*. Il motivo di tutto ciò è che questi parametri appaiono esplicitamente nelle stime dell'errore di interpolazione, come vedremo tra poco. Un discorso più approfondito sull'aspect-ratio verrà fatto al par. **??**, qui ci limitiamo ad alcuni aspetti introduttivi. Supponiamo che esista una costante β, tale che:

$$\frac{\rho_{\mathcal{E}_i}}{h_{\mathcal{E}_i}} \geq \beta \qquad , \qquad \forall \mathcal{E}_i \in \mathcal{T}_h \tag{1.6.25}$$

e dunque che i triangoli di $\mathcal{T}_h$ non abbiano un angolo troppo piccolo. Notare che questa è appunto una condizione sul rapporto di forma (aspect-ratio) dei triangoli. In pratica questa condizione esclude la presenza in $\mathcal{T}_h$ di triangoli eccessivamente sottili.

Definiamo ora l'interpolante $\pi_h u \in \mathcal{V}_h$. Sia $\{p_i\} \quad , \quad i = 1 \ldots N_p \quad$, l'insieme dei nodi della triangolazione $\mathcal{T}_h$ e sia $u \in C^0(\Omega)$; l'interpolante (di Lagrange) è definito dalle relazioni:

$$\pi_h u(p_i) = u(p_i) \quad , \quad i = 1 \ldots N_p \qquad .$$

Si ha il seguente risultato (per la dimostrazione vedere [2, 1, 3]):

Teorema 3 *Consideriamo l'i-esimo triangolo $\mathcal{E}_i \in \mathcal{T}_h$, di vertici $\boldsymbol{p}_{t_{j,i}} \quad , \quad j = 1, 2, 3$. Data una funzione $v \in C^0(\mathcal{E}_i)$, sia l'interpolante (di Lagrange):*

$$\pi_h v(\boldsymbol{p}_{t_{j,i}}) = v(\boldsymbol{p}_{t_{j,i}}) \quad , \quad j = 1, 2, 3 \qquad . \tag{1.6.26}$$

Allora,

$$||v - \pi_h v||_{\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E}_i)} \leq 2h^2_{\mathcal{E}_i} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E}_i)} \tag{1.6.27}$$

$$\max_{|\alpha|=1} \|D^\alpha (v - \pi_h v)\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E}_i)} \leq 6 \frac{h^2_{\mathcal{E}_i}}{\rho_{\mathcal{E}_i}} \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E}_i)} \tag{1.6.28}$$

dove

$$||v||_{\mathcal{L}_\infty(\mathcal{E}_i)} = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_i} |v(\boldsymbol{x})| \qquad .$$

Dal Teorema è evidente che la magnitudo dell'errore di interpolazione $v - \pi_h v$ e delle sue derivate $D^\alpha(v - \pi_h v)$ dipende dalle derivate parziali seconde di v, e quindi dalla sua curvatura. Infatti, quanto più curva è v all'interno dell'elemento $\mathcal{E}_i$ e tanto maggiore è la deviazione di v dal piano che coniunge i vertici $\mathbf{p}_{t_{j,i}}$, ovvero da $\pi_h v$. Notare anche che la maggiorazione di tali errori dipende in modo esplicito dall forma geometrica (in particolare l'aspect-ratio) degli elementi finiti.

Notare infine che, poichè l'errore ha una maggiorazione del tipo $||v - v_h|| \leq C(v)h^\beta$, infittendo la discretizzazione $\mathcal{T}_h$, esso tende a zero per $h \to 0$ con ordine di convergenza $\beta = 2$.

Risultati analoghi al Teorema 3 si possono ottenere anche in norma $\mathcal{L}_2$ ed $\mathcal{H}^1$, con qualche difficoltà in più nella dimostrazione. A tale scopo, introduciamo la seguente *seminorma*:

$$|v|_{\mathcal{H}^r(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=r} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

(notare che si può avere $|v|_{\mathcal{H}^r(\Omega)} = 0$ anche se $v \neq 0$, ad es. con $v = const \neq 0$ ed $r \geq 1$, e quindi non è una norma).

Si ha:

Teorema 4 *Nelle ipotesi del Teorema 3, esiste una costante C, indipendente da h e da v, tale che:*

$$||v - \pi_h v||_{\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_i)} \leq C h^2_{\mathcal{E}_i} \|v\|_{\mathcal{H}^2(\mathcal{E}_i)} \tag{1.6.29}$$

e

$$|v - \pi_h v|_{\mathcal{H}_1(\mathcal{E}_i)} \leq C \frac{h^2_{\mathcal{E}_i}}{\rho_{\mathcal{E}_i}} \|v\|_{\mathcal{H}^2(\mathcal{E}_i)} \tag{1.6.30}$$

Sommando il quadrato dell'errore in ogni elemento $\mathcal{E}_i$, con semplici passaggi si ottengono delle maggiorazioni dell'errore globale su Ω, analoghe alle 1.6.29 e 1.6.30 .

Finora abbiamo considerato elementi finiti lineari e le norme L_2 ed H^1. Vediamo cosa succede con polinomi di grado $r \geq 1$ e con norme più forti. Si ha:

$$||v - \pi_h v||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq C h^{r+1} \|v\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)} \tag{1.6.31}$$

$$|v - \pi_h v|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq C h^r \|v\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)} \tag{1.6.32}$$

e, se $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{H}_2$:

$$|v - \pi_h v|_{\mathcal{H}^2(\Omega)} \leq C h^{r-1} \|v\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega} \qquad . \tag{1.6.33}$$

Se $v \in \mathcal{H}^p$ non ha la regolarità richiesta dalle 1.6.31, 1.6.32 e 1.6.33, si ha, per $1 \leq s \leq min\{r+1, p\}$:

$$||v - \pi_h v||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq Ch^s \|v\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)} \tag{1.6.34}$$

$$|v - \pi_h v|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq Ch^{s-1} \|v\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)} \tag{1.6.35}$$

1.7 Stime a-priori dell'errore di approssimazione FEM

Con le stime dell'errore di interpolazione, è possibile ricavarsi delle stime dell'errore di approssimazione FEM. Riscrivendo la (1.2.12) in forma analoga:

$$||u - u_h||_{\mathcal{V}} \quad \leq \quad \frac{M}{\alpha} \quad ||u - v_h||_{\mathcal{V}} \qquad , \quad \forall v \in \mathcal{V}_h \tag{1.7.36}$$

e scegliendo $v = \pi_h u$, cioè l'interpolante, si ha:

$$||u - u_h||_{\mathcal{V}} \quad \leq \quad \frac{M}{\alpha} \quad ||u - \pi_h u||_{\mathcal{V}} \qquad . \tag{1.7.37}$$

Ora, prendendo ad esempio $V = H_0^1$, grazie alla *diseguaglianza di Poincaré* [?]:

$$||v||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq C_\Omega ||\nabla v||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \qquad , \quad \forall v \in H_0^1 \tag{1.7.38}$$

si ha che sullo spazio H_0^1 la seminorma $|\cdot|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ è equivalente alla norma $||\cdot||_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$ e quindi dalla (1.6.32) è possibile ricavarsi una maggiorazione del membro destro di (1.7.37), da cui discende la seguente stima dell'errore di approssimazione:

$$||u - u_h||_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} Ch^r \|v\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)} \tag{1.7.39}$$

Quindi, per aumentare l'accuratezza dell'approssimazione FEM è possibile dominuire h oppure aumentare r, ma quest'ultima solo finchè la regolarità della soluzione u lo consente (cfr. (1.6.34)).

Infine, con qualche strumento aggiuntivo, in particolare il ben noto '*duality* argument', è possibile dimostrare l'ordine di convergenza ottimale dell'errore di approssimazione con elementi finiti in norma L_2:

$$||u - u_h||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq Ch^{r+1} \|v\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)} \tag{1.7.40}$$

Bibliografia

[1] P.G. Ciarlet and J.L. Lions (eds.). *Handbook of Numerical Analysis: vol. II - Finite Element Methods (Part 1)*. North-Holland, Amsterdam, 1991.

[2] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, 1987.

[3] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduzione all'analisi numerica delle equazioni alle derivate parziali*. Masson, *Collana di Matematica Applicata e Numerica*, 1989.