

Appendice A

Temi d'esame CAP (Curve Algebriche Piane)

1. 2005/6: quartiche razionali (con un punto triplo?).

1.1. PRIMA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^2X_2 + X_1^4 + X_2^4 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare la polare rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tale punto;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^2X_2 = 0 \\ 2X_0X_1X_2 + 4X_1^3 = 0 \\ X_0X_1^2 + 4X_2^3 = 0 \end{cases}$$

e dalla prima equazione si ottiene che $X_1 = 0$ oppure $X_2 = 0$; sostituendo nelle altre si ha che comunque $X_1 = 0 = X_2$, e quindi si trova l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è triplo, con complesso tangente dato da $X_1^2X_2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_1 = 0$ due volte, e dalla retta $X_2 = 0$. Ciascuna delle due tangenti al punto singolare ha intersezione d'ordine 4 con la curva in tale punto.

- (2) Poiché è una quartica (irriducibile: siccome è di primo grado in X_0 , se si riducesse dovrebbe essere $(X_0a + b)c$ con a, b, c polinomi nelle X_1, X_2 , ma allora c divide sia $X_1^2X_2$ che $X_1^4 + X_2^4$, dunque $c = 1$) con un punto triplo, si tratta di una curva razionale. Utilizzando l'equazione affine $X^2Y + X^4 + Y^4$ e intersecando con il fascio di rette per l'origine (punto singolare) $Y = tX$ troviamo che i punti della curva si rappresentano tramite le parametrizzazioni affini e proiettiva seguenti:

$$\begin{cases} X = -\frac{t}{1+t^4} \\ Y = -\frac{t^2}{1+t^4} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X_0 = \alpha^4 + \beta^4 \\ X_1 = -\alpha^3\beta \\ X_2 = -\alpha^2\beta^2 \end{cases}.$$

- (3) La polare richiesta ha equazione $X_1(X_0X_2 + 2X_1^2) = 0$. Intersecandola con la curva stessa si trovano i punti singolari e i punti di tangenza di rette tangenti alla curva e passanti per il punto dato. Sostituendo la parametrizzazione della curva nella polare troviamo l'equazione $\alpha^5\beta^3(\alpha^4 - \beta^4) = 0$, da cui si riconosce 8 volte il punto singolare (corrispondente sia ad $\alpha = 0$, sia a $\beta = 0$), e quattro altri punti distinti, corrispondenti a $\alpha = 1$ e $\beta = \pm 1, \pm i$, ovvero: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$. Le tangenti cercate passano per il punto dato e per questi punti (ma non si tratta di quattro rette distinte, perché sono delle bitangenti: rette tangenti in due punti distinti). Si osservi anche che la retta per il punto dato e per il punto singolare è una tangente; quindi in totale si contano 5 tangenti: due doppie e una singola (in effetti la classe, o grado duale, della curva data è 5).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & 2X_1X_2 & X_1^2 \\ 2X_1X_2 & 2X_0X_2+12X_1^2 & 2X_0X_1 \\ X_1^2 & 2X_0X_1 & 12X_2^2 \end{pmatrix} &= 2X_1^2 \det \begin{pmatrix} 0 & X_2 & X_1 \\ 2X_2 & X_0X_2+6X_1^2 & 2X_0X_1 \\ X_1 & X_0X_1 & 12X_2^2 \end{pmatrix} = \\ &= 2X_1^2 \det \begin{pmatrix} 0 & X_2 & X_1 \\ 2X_2 & -3X_0X_2+6X_1^2 & 0 \\ X_1 & 0 & 12X_2^2 \end{pmatrix} = 6X_1^2(X_0X_1^2X_2 - 2X_1^4 - 8X_2^4). \end{aligned}$$

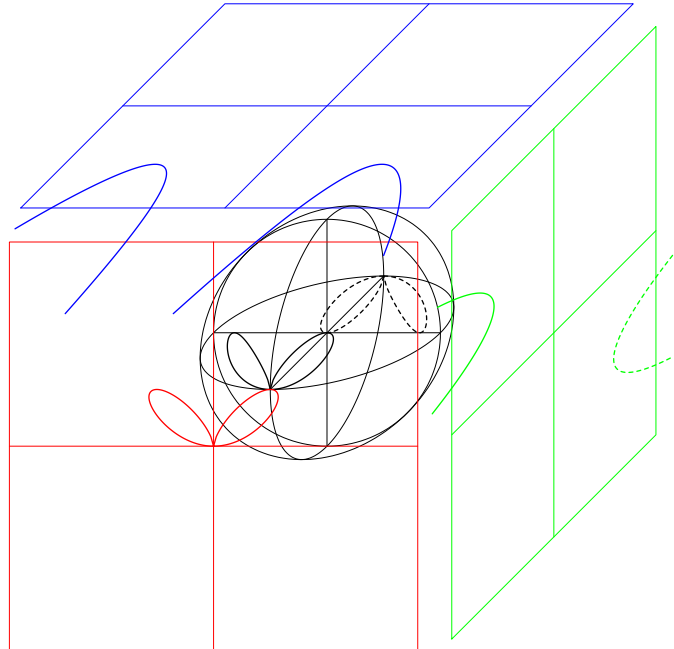
(nel primo passaggio si sono raccolti i fattori comuni a righe e colonne, nel secondo si sono usate due operazioni elementari per annullare due entrate: alla seconda riga si è sommata $-2X_0$ volte prima, poi alla seconda colonna si è sommata $-X_0$ volte la prima). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\alpha^{14}\beta^6(\alpha^4 + 3\beta^4) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato 20 volte, e altri quattro punti distinti che sono quindi dei flessi (nessuno reale).

- (5)

In una qualunque delle disomogeneizzazioni standard, possiamo esplicitare una delle variabili e riuscire a studiare l'andamento della curva:

- (0) l'espressione $X^2Y + X^4 + Y^4 = 0$ è una biquadratica in X che si esplicita $X^2 = \frac{-Y \pm Y\sqrt{1-4Y^2}}{2}$;
- (1) l'espressione $ZX^2 + X^4 + 1 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = -\frac{X^4+1}{X^2}$;
- (2) l'espressione $ZY + 1 + Y^4 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = -\frac{Y^4+1}{Y}$;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura (nel piano (X, Y) , in rosso, somiglia ad un germoglio, oppure alle orecchie d'un coniglio):



1.2. SECONDA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^2X_2 + X_1^4 + X_2^4 = 0$ (si ricordi dalla "prima prova" che è razionale e $\begin{pmatrix} \alpha^4 + \beta^4 \\ -\alpha^3\beta \\ -\alpha^2\beta^2 \end{pmatrix}$ ne è una parametrizzazione);

- (1) se ne determini la polare rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e si classifichi proiettivamente tale cubica;
- (2) usando il risultante rispetto a X_2 delle due curve nel riferimento dato, determinarne i punti di intersezione e le relative molteplicità;
- (3) verificare se possibile i risultati precedenti mediante l'uso di parametrizzazioni;
- (4) si consideri ora il fascio di cubiche formato dalle polari della quartica data rispetto ai punti della retta di equazione $X_1 = 0$; determinare il ciclo base di tale fascio (cioè i punti, con molteplicità, per cui passano tutte le cubiche del fascio);
- (5) descrivere l'intersezione della quartica data con le cubiche del fascio; in questo modo si ottiene una parametrizzazione della quartica?

Soluzione.

- (1) La polare richiesta ha equazione $X_0X_1^2 + 4X_2^3 = 0$; si vede facilmente che ha un unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è doppio con una unica tangente: si tratta quindi di una cubica cuspidale.
- (2) Il risultante richiesto è dato da:

$$R_{X_2}(\text{quartica, polare}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 4 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 4 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 4 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 4 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 1 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & -3X_0X_1^2 & -4X_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & -3X_0X_1^2 & -4X_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & -3X_0X_1^2 & -4X_1^4 \\ 4 & 0 & 0 & X_0X_1^2 & X_1^4 \end{vmatrix}$$

$$= X_1^8((4X_1)^4 - 27X_0^4)$$

(dalle righe $4^a, 5^a, 6^a$ sono state sottratte le righe $1^a, 2^a, 3^a$ moltiplicate per 4 rispettivamente, poi usando Laplace; si poteva anche calcolare $R_{X_2}(\text{quartica} - \frac{X_2}{4}\text{polare, polare})$, il che dava un determinante 4×4). Da questo si ricava che l'intersezione è formata dal punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di molteplicità

8 (corrisponde a $X_1^8 = 0$) e da quattro punti distinti, ciascuno di molteplicità uno: $\begin{pmatrix} \pm \sqrt[4]{27} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \pm i \sqrt[4]{27} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (corrispondenti alle radici del fattore $(4X_1)^4 - 27X_0^4$; il valore di X_2 si ricava facilmente dalla cubica, e dei tre valori possibili si controlla quale soddisfi anche alla quartica). Giustamente, in totale sono $8 + 4 = 12 = 3 \cdot 4$ punti.

- (3) Poiché la cuspidale è razionale, possiamo sostituire una sua parametrizzazione, per esempio $\begin{pmatrix} 4\beta^3 \\ -\alpha^3 \\ -\beta\alpha^2 \end{pmatrix}$,

nell'equazione della quartica; si ottiene l'equazione $\alpha^8(\alpha^4 - 3\beta^4)$ da cui si ricavano le soluzioni $\alpha = 0$ di molteplicità 8, e $\alpha = \pm \sqrt[4]{3}\beta, \pm i \sqrt[4]{3}\beta$, che ritornano i punti precedentemente trovati con le molteplicità corrispondenti.

In alternativa, sostituire la parametrizzazione della quartica nella cubica: si otteneva in tal caso l'equazione $\alpha^6\beta^2(\alpha^4 - 3\beta^4)$, e si doveva ricordare che $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ danno luogo allo stesso punto.

- (4) Il fascio richiesto è dato dalle cubiche di equazioni $\lambda(X_1^2X_2) + \mu(X_0X_1^2 + 4X_2^3) = 0$ al variare dei parametri λ, μ non entrambi nulli. Per trovare il ciclo base, è sufficiente intersecare due qualsiasi cubiche del fascio, e visto che abbiamo una parametrizzazione di una delle cubiche evidenziate, possiamo sostituirla nell'altra ed ottenere l'equazione $\alpha^8\beta = 0$; il ciclo base è quindi formato dal punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di molteplicità 8 e dal punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di molteplicità 1 (in totale 9 punti).

In alternativa, si poteva calcolare il risultante rispetto a X_2 di una coppia qualsiasi di cubiche del fascio, ottenendo:

$$R_{X_2}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \begin{vmatrix} 4\beta & 0 & \alpha X_1^2 & \beta X_0 X_1^2 \\ 4\beta & 0 & \alpha X_1^2 & \beta X_0 X_1^2 \\ & 4\beta & 0 & \alpha X_1^2 & \beta X_0 X_1^2 \\ 4\beta' & 0 & \alpha' X_1^2 & \beta' X_0 X_1^2 \\ & 4\beta' & 0 & \alpha' X_1^2 & \beta' X_0 X_1^2 \\ & & 4\beta' & 0 & \alpha' X_1^2 & \beta' X_0 X_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\beta & 0 & \alpha X_1^2 & \beta X_0 X_1^2 \\ 4\beta & 0 & \alpha X_1^2 & \beta X_0 X_1^2 \\ & 4\beta & 0 & \alpha X_1^2 & \beta X_0 X_1^2 \\ 0 & 0 & (\alpha' - \alpha \frac{\beta'}{\beta}) X_1^2 & 0 \\ & 0 & 0 & (\alpha' - \alpha \frac{\beta'}{\beta}) X_1^2 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & (\alpha' - \alpha \frac{\beta'}{\beta}) X_1^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 16(\alpha'\beta - \alpha\beta')^3 X_0 X_1^8,$$

(dalle righe $4^a, 5^a, 6^a$ sono state sottratte le righe $1^a, 2^a, 3^a$ moltiplicate per $\frac{\beta'}{\beta}$ rispettivamente, poi usando Laplace) da cui si ricavano gli stessi risultati.

- (5) Possiamo sostituire la parametrizzazione della quartica nel fascio di cubiche; usando $\mu = 1$ per semplicità (questo esclude la cubica completamente spezzata $X_1^2X_2$) otteniamo l'equazione

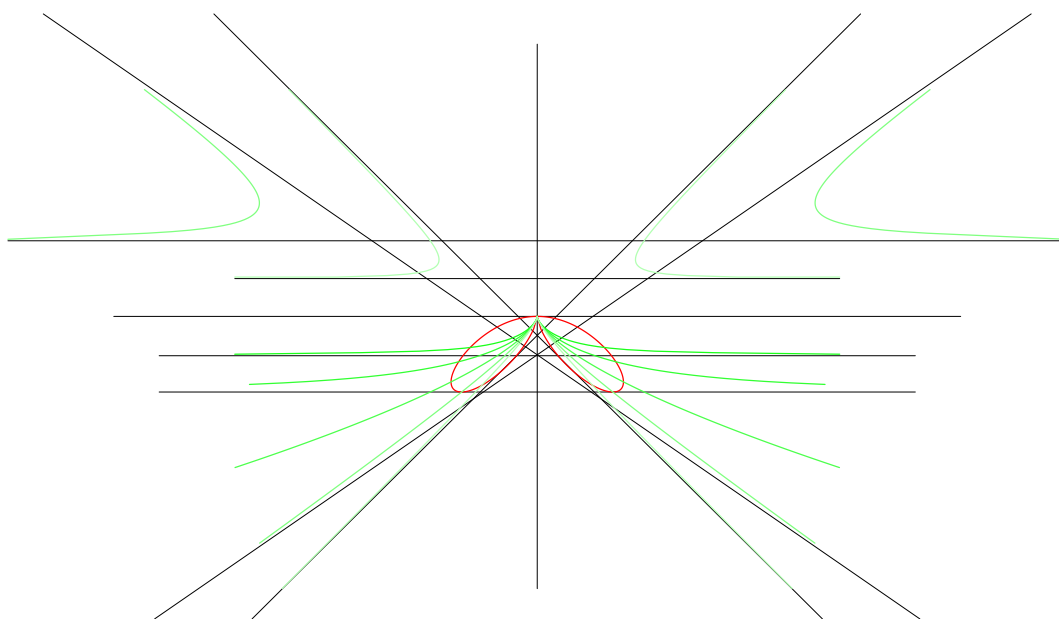
$$\alpha^6\beta^2(\alpha^4 - \lambda\alpha^2\beta^2 - 3\beta^4) = 0$$

Il fattore $\alpha^6\beta^2$ ci dice che tutte le cubiche del fascio intersecano la quartica in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 8; inoltre il fattore $\alpha^4 - \lambda\alpha^2\beta^2 - 3\beta^4$ è una biquadratica in α, β e quindi avrà radici multiple solo

quando si annulla il termine $\lambda^2 + 12$ (il discriminante di un polinomio biquadratico $aX^4 + bX^2 + c$ è multiplo di $ac(b^2 - 4ac)^2$). Quindi per $\lambda \neq \pm i2\sqrt{3}$ abbiamo che l'intersezione è completata da altri quattro punti distinti (che variano con λ), mentre per $\lambda = \pm i2\sqrt{3}$ troviamo altri due punti, ciascuno doppio.

Chiaramente, la risposta è no: il fascio di cubiche interseca la nostra quartica in un fissato punto (l'origine) con molteplicità 8, mentre i rimanenti 4 punti di intersezione variano da cubica a cubica del fascio, ed in effetti (ricordando il teorema fondamentale delle polari) ogni cubica taglia i punti di tangenza di rette del fascio di un punto dell'asse delle ordinate.

La figura seguente mostra la quartica nel piano affine X, Y ed alcune cubiche del fascio studiato; si osservi che tutte le cubiche (tranne quella spezzata) sono cuspidali, tutte con flesso nel punto improprio dell'asse delle ascisse, ma tutte ivi con tangenti diverse ($\lambda X_2 + \mu X_0$), il che spiega che quel punto compaia con molteplicità uno nel ciclo intersezione.



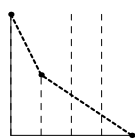
Si notino infine gli scheletri reali affini delle cuspidi del fascio.

1.3. TERZA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^2X_2 + X_1^4 + X_2^4 = 0$.

- (1) Si determinino i posti della curva di centro nell'origine affine usuale;
- (2) Si determini la polare della curva rispetto al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e, utilizzando i risultati del punto precedente, si determini la molteplicità di intersezione nell'origine della curva data con questa polare; è possibile dedurne quanto vale la classe della curva?
- (3) Tenendo presente i risultati ottenuti sulla curva data, che cosa si può dire della curva duale (numero e tipo di singolarità, numero di flessi e bitangenti)? Se il tempo lo permette, si determini l'equazione della curva duale.

Soluzione.

- (1) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^4 + X^2Y + X^4$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:

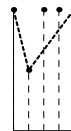


e presenta quindi due lati, uno di pendenza -2 e lunghezza 1 (una radice in $K[[X]]$ di ordine 2), e l'altro di pendenza $-2/3$ e lunghezza 3 (tre radici in $K[[X^{1/3}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]]$ per la curva data). La curva presenta dunque in $K[[X]][[Y]]$ due fattori irriducibili, corrispondenti a due posti con centro nell'origine (punto singolare).

- (a) La radice di ordine 2 è della forma $Y = cX^2 + \dots$ dove c risolve $c + 1 = 0$, cioè $c = -1$. Per continuare lo sviluppo, sostituiamo $Y = X^2(-1 + Y_1)$ nella curva, e otteniamo:

$$X^8(-1 + Y_1)^4 + X^2X^2(-1 + Y_1) + X^4 = X^8Y_1^4 - 4X^8Y_1^3 + 6X^8Y_1^2 + (X^4 - 4X^8)Y_1 + X^8$$

il cui poligono di Newton ha un lato negativo di pendenza -4 e lunghezza 1. Dunque $Y_1 = dX^4 + \dots$ ove d risolve $d + 1 = 0$, cioè $d = -1$. Sostituendo, troviamo che $Y = -X^2 - X^6 + \dots$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T \\ Y=-T^2-T^6+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 1, classe 1 e tangente $Y = 0$.



- (b) Le radici di ordine 2/3 sono della forma $Y = cX^{2/3} + \dots$ dove c risolve $c^4 + c = 0$, e possiamo scegliere $c = -1$ (le altre saranno ottenute coniugando con le radici cubiche di 1, cioè sostituendo $X^{1/3}$ con $\zeta X^{1/3}$, con $\zeta^3 = 1$). Per continuare lo sviluppo, sostituiamo $Y = X^{2/3}(-1 + Y_1)$ nella curva, e otteniamo:

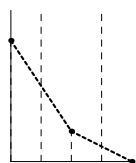
$$X^{8/3}(-1 + Y_1)^4 + X^2X^{3/2}(-1 + Y_1) + X^4 = X^{8/3}Y_1^4 - 4X^{8/3}Y_1^3 + 6X^{8/3}Y_1^2 - 3X^{8/3}Y_1 + X^4$$

il cui poligono di Newton ha un lato negativo di pendenza $-4/3$ e lunghezza 1. Dunque $Y_1 = dX^{4/3} + \dots$ ove d risolve $-3d + 1 = 0$, cioè $d = 1/3$. Sostituendo, troviamo che $Y = -X^{2/3} + \frac{1}{3}X^2 + \dots$, e questo basta per dire che il ramo \mathfrak{Q} corrispondente (alle tre radici di ordine 2/3) ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^3 \\ Y=-T^2+\frac{1}{3}T^6+\dots \end{cases}$, (si noti che non è normalizzata) e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $X = 0$.



Per trovare una parametrizzazione normalizzata bisognerebbe trovare la sostituzione $U(T)$ d'ordine 1 che porta $Y = -U^2$, sia $T = U + \delta U^5 + \dots$, e sostituire per trovare $\begin{cases} X=U^3+3\delta U^7+\dots \\ Y=-U^2 \end{cases}$.

- (1') (soluzione alternativa) Come polinomio in X , la curva si scrive $X^4 + X^2Y + Y^4$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi due lati, uno di pendenza $-3/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[Y^{1/2}]]$ di ordine $3/2$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[Y]]$ per la curva data), e l'altro di pendenza $-1/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[Y^{1/2}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[Y]]$ per la curva data). La curva presenta dunque in $K[[Y]][X]$ due fattori irriducibili, corrispondenti a due posti con centro nell'origine (punto singolare).

Per trovare i fattori irriducibili, possiamo sfruttare il fatto che si tratta di una biquadratica in X , e scrivere le soluzioni

$$X^2 = \frac{1}{2} \left(-Y \pm \sqrt{Y^2 - 4Y^4} \right) = \frac{1}{2} \left(-Y \pm Y(1 - 4Y^2)^{1/2} \right) = \frac{1}{2} \left(-Y \pm Y(1 - 2Y^2 - \frac{1}{2}Y^4 + \dots) \right)$$

ove abbiamo usato che $(1 + Z)^{1/2} = \sum \binom{1/2}{i} Z^i = 1 + \frac{1}{2}Z - \frac{1}{8}Z^2 + \dots$. Dunque i due fattori irriducibili in $K[[Y]][X]$ sono

$$\left(X^2 - \left(-Y^3 - \frac{1}{4}Y^5 + \dots \right) \right) \left(X^2 - \left(-Y + Y^3 + \frac{1}{4}Y^5 + \dots \right) \right).$$

Tuttavia, se vogliamo esplicitare (delle parametrizzazioni per) i posti conviene trovare le radici in X , che cominciano rispettivamente con $X = iY^{3/2} + \frac{i}{8}Y^{7/2} + \dots$ (e opposta) e $X = iY^{1/2} - \frac{i}{8}Y^{5/2} + \dots$ (e opposta), che danno luogo rispettivamente a parametrizzazioni di posti del tipo $\begin{cases} X=iT^3+\frac{i}{8}T^7+\dots \\ Y=T^2 \end{cases}$ e $\begin{cases} X=iT-\frac{i}{8}T^5+\dots \\ Y=T^2 \end{cases}$ dando conclusioni identiche a quelle del punto (1): un posto \mathfrak{Q} di molteplicità 2, classe 1 e tangente $X = 0$, ed un posto \mathfrak{P} di molteplicità 1, classe 1 e tangente $Y = 0$.

- (2) La polare \mathcal{D} richiesta ha equazione $(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y})(Y^4 + X^2Y + X^4) = 2XY + 4X^3 + 4Y^3 + X^2$ e possiamo calcolare la molteplicità di intersezione con la curva nell'origine O sommando i due contributi dati dai due posti: se $g(X, Y)$ è l'equazione di \mathcal{D} ,

(a) $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}) = \text{ord}_T(g(\mathfrak{P}(T))) = \text{ord}_T(T^2 + \dots) = 2$,

(b) $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{D}) = \text{ord}_T(g(\mathfrak{Q}(T))) = \text{ord}_T(-2T^5 + \dots) = 5$.

Dunque abbiamo $m_O(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = m_{\mathbb{P}}(\mathcal{D}) + m_{\Omega}(\mathcal{D}) = 7$. Poiché la retta $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è tangente alla curva nell'origine, unico punto singolare della curva, abbiamo che la classe di \mathcal{C} si può calcolare come $\deg \mathcal{C}(\deg \mathcal{C} - 1) - m_O(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 12 - 7 = 5$ (formula di Plücker).

(3) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:

- (1) ha esattamente 4 flessi (dal primo compito, potremmo anche ottenere questo risultato ora usando i posti nell'origine per vedere la molteplicità di intersezione nell'origine della curva con la propria hessiana);
- (2) ha almeno 2 bitangenti (trovate nel primo compito);
- (3) ha grado 4 e classe 5;
- (4) ha un solo punto singolare che presenta due rami: uno di molteplicità 1 e classe 1, l'altro di molteplicità 2 e classe 1.

Da questo possiamo dedurre che la curva duale \mathcal{C}^* :

- (1) ha esattamente 4 cuspidi;
- (2) ha almeno 2 nodi;
- (3) ha grado 5 e classe 4;
- (4) ha una sola bitangente, in due punti di cui: uno di molteplicità 1 e classe 1 (punto ordinario), l'altro di molteplicità 1 e classe 2 (punto di flesso).

Siccome poi la classe di \mathcal{C}^* si calcola, in base ai punti singolari, come $\deg \mathcal{C}^*(\deg \mathcal{C}^* - 1) - 2\tau^* - 3\kappa^*$ (con τ^* i nodi, κ^* le cuspidi), e risulta già $20 - 4 - 12 = 4$ (grado di \mathcal{C}), ne concludiamo che \mathcal{C}^* ha esattamente 2 nodi (e \mathcal{C} esattamente 2 bitangenti), ed ha solo le singolarità già indicate. Per trovare l'equazione della curva duale bisogna ricorrere alla nozione di risultante, e vi sono due strategie possibili:

(cart) per la prima, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1^2 X_2 \\ \xi_1 = 2X_0 X_1 X_2 + 4X_1^3 \\ \xi_2 = 2X_0 X_1^2 + 4X_2^3 \\ 0 = X_0 X_1^2 X_2 + X_1^4 + X_2^4 \end{cases}$$

che possiamo semplificare passando in coordinate affini tramite $X_1 = 1$, $\xi = \xi_1/\xi_0$, $\eta = \xi_2/\xi_0$. Otteniamo allora di dover eliminare X_0, X_1 dal sistema

$$\begin{cases} X_2 \xi = 2X_0 X_2 + 4 \\ X_2 \eta = 2X_0 + 4X_2^3 \\ 0 = X_0 X_2 + 1 + X_2^4 \end{cases}$$

e ricavando $X_0 = -(1 + X_2^4)/X_2$ dall'ultima equazione, e sostituendo, ci resta da eliminare X_2 da uno dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} 2X_2^4 + X_2 \xi - 2 = 0 \\ 3X_2^4 - X_2^2 \eta - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2X_2^4 + X_2 \xi - 2 = 0 \\ 2X_2^2 \eta + 3X_2 \xi - 4 = 0 \end{cases}$$

(il secondo è ricavato dal primo tramite sottrazione per eliminare un termine di quarto grado). Ora basta eliminare X_2 , e l'equazione cercata per \mathcal{C}^* è

$$R_{X_2}(2X_2^4 + X_2 \xi - 2, 2X_2^2 \eta + 3X_2 \xi - 4) = 0.$$

Dunque, basta calcolare il determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \xi & -2 \\ 2\eta & 3\xi & -4 & & \\ & 2\eta & 3\xi & -4 & \\ & & 2\eta & 3\xi & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \xi & -2 \\ 3\xi & -4 & -\eta\xi & 2\eta & \\ 2\eta & 3\xi & -4 & & \\ & 2\eta & 3\xi & -4 & \\ & & 2\eta & 3\xi & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\xi & -4 & -\eta\xi & 2\eta \\ 2\eta & 3\xi & -4 & 0 \\ 0 & 2\eta & 3\xi & -4 \\ -4 & 0 & 2\eta & \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\xi & -4 & 0 & 2\eta \\ 2\eta & 3\xi & -8 & 0 \\ 0 & 2\eta & 2\xi & -4 \\ -4 & 0 & 4\eta + \xi^2 & \xi \end{vmatrix}$$

(sviluppo rispetto alla prima colonna dopo op.el. sulla terza riga, sviluppo rispetto all'ultima colonna dopo op.el. sull'ultima riga, op.el. sulla terza colonna). Sviluppando poi rispetto alla prima colonna, dopo qualche conto e raccoglimento, si ottiene l'equazione affine

$$16(\eta^2 + 4)^2 + 27\xi^4 + 4\xi^2\eta(36 - \eta^2) = 0$$

dunque quella proiettiva

$$16\xi_0(\xi_2^2 + 4\xi_0^2)^2 + 27\xi_0\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2(36\xi_0^2 - \xi_2^2) = 0 .$$

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \alpha^4 + \beta^4 \\ -\alpha^3\beta \\ -\alpha^2\beta^2 \end{pmatrix}$ e ponendo $\alpha = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 1+\beta^4 \\ -\beta \\ -\beta^2 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \beta} \begin{pmatrix} 1+\beta^4 \\ -\beta \\ -\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta^4 \\ -\beta \\ -\beta^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4\beta^3 \\ -1 \\ -2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2 \\ 2\beta - 2\beta^5 \\ -1 + 3\beta^4 \end{pmatrix}$$

Dunque basta eliminare β dai sistemi

$$\begin{cases} \xi_0 = \beta^2 \\ \xi_1 = 2\beta - 2\beta^5 \\ \xi_2 = -1 + 3\beta^4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \beta\xi = 2 - 2\beta^4 \\ \beta^2\eta = -1 + 3\beta^4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2\beta^4 + \beta\xi - 2 = 0 \\ 3\beta^4 - \beta^2\eta - 1 = 0 \end{cases}$$

il che porta agli stessi conti precedentemente svolti.

Si noti che la soluzione è così lunga solo perché il primo punto è risolto in due modi diversi, come pure la parte facoltativa, in cui per di più si sono esplicitati molti dettagli.

Addendum: negli scritti consegnati molti hanno affermato che la duale “non ha bitangenti perché la curva non ha nodi”. Questo è un errore, perché quando si dice che “nodi di una curva corrispondono a bitangenti della duale” si sottintende (!) “bitangenti in punti ordinari”. Nel caso dei compitiini vi è un punto non ordinario (avente due posti: un posto ordinario e un posto cuspidale) con due tangenti distinte: dunque la curva duale ha due punti (uno ordinario e uno di flesso) con la tangente in comune, dunque una bitangente che tocca la curva duale con molteplicità 2 nel punto ordinario, e 3 nel flesso (è possibile perché si tratta di una quintica).

1.4. PRIMO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^3 + X_0X_1^2X_2 + X_2^4 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^3 + X_1^2X_2 = 0 \\ 3X_0X_1^2 + 2X_0X_1X_2 = 0 \\ X_0X_1^2 + 4X_2^3 = 0 \end{cases}$$

e dalla prima equazione si ottiene che $X_1 = 0$ oppure $X_1 + X_2 = 0$; sostituendo nelle altre si ha che comunque $X_1 = 0 = X_2$, oppure tutti e tre nulli, e quindi si trova l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è triplo, con complesso tangente dato da $X_1^3 + X_1^2X_2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_1 = 0$ due volte, e dalla retta $X_1 + X_2 = 0$. Ciascuna delle due tangenti al punto singolare ha intersezione d'ordine 4 con la curva in tale punto.

- (2) Poiché è una quartica (irriducibile: siccome è di primo grado in X_0, \dots) con un punto triplo, si tratta di una curva razionale. Utilizzando l'equazione affine $X^3 + X^2Y + Y^4$ e intersecando con il fascio di rette per l'origine (punto singolare) $Y = tX$ troviamo che i punti della curva si rappresentano tramite le parametrizzazioni affini e proiettive seguenti:

$$\begin{cases} X = -\frac{1+t}{t^4} \\ Y = -\frac{1+t}{t^3} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X_0 = t^4 \\ X_1 = -s^3(s+t) \\ X_2 = -s^2t(s+t) \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha(3X_0X_1^2 + 2X_0X_1X_2) + \beta(X_0X_1^2 + 4X_2^3) = 0$$

ovvero

$$(3\alpha + \beta)X_0X_1^2 + 2\alpha X_0X_1X_2 + 4\beta X_2^3 = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo $(s+t)^2t^3s^5[3(\alpha-\beta)ts + 2\alpha t^2 - 4\beta s^2] = 0$. Otteniamo dunque il punto origine (singolare) con molteplicità $2 + 5 = 7$, il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 3 (corrisponde a $t^3 = 0$) e due ulteriori punti variabili in funzione della polare; tali due punti inoltre coincidono se $9\alpha^2 + 14\alpha\beta + 9\beta^2 = 0$.

Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in effetti è un punto di flesso, come si osserva disomogeneizzando rispetto ad X_1 l'equazione: $X_0 + X_0X_2 + X_2^4 = 0$, con tangente $X_0 = 0$ (questo spiega perché il punto compare in tutte le polari calcolate) la cui molteplicità di intersezione con la curva è 4 (quindi si tratta d'un flesso d'ordine 2, non ordinario).

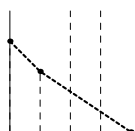
Dai punti richiesti dunque si trovano 5 tangenti contate con le molteplicità opportune, di solito tre distinte (di cui una fissa).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & 3X_1^2 + 2X_1X_2 & X_1^2 \\ 3X_1^2 + 2X_1X_2 & 6X_0X_1 + 2X_0X_2 & 2X_0X_1 \\ X_1^2 & 2X_0X_1 & 12X_2^2 \end{pmatrix} &= X_1^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 3X_1 + 2X_2 & X_1 \\ 3X_1 + 2X_2 & 6X_0X_1 + 2X_0X_2 & 2X_0X_1 \\ X_1 & 2X_0X_1 & 12X_2^2 \end{pmatrix} = \\ &= 6X_1^2(X_0X_1^3 + X_0X_1^2X_2 - 18X_1^2X_2^2 - 24X_1X_2^3 - 8X_2^4) \end{aligned}$$

(dopo un po' di conti). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $s^{14}(s+t)^6 t^2(6s^2+4st+3t^2)=0$. Dunque vediamo il punto singolare contato 20 volte, il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 2 (l'avevamo già incontrato come flesso di ordine 2, giustamente) e altri due punti distinti che sono quindi dei flessi (nessuno reale). Totale, 3 flessi, due ordinari e uno doppio.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^4 + X^2Y + X^3$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi due lati, uno di pendenza -1 e lunghezza 1 (una radice in $K[[X]]$ di ordine 1), e l'altro di pendenza $-2/3$ e lunghezza 3 (tre radici in $K[[X^{1/3}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]]$ per la curva data). La curva presenta dunque in $K[[X]][Y]$ due fattori irriducibili, corrispondenti a due posti con centro nell'origine (punto singolare).

- (a) La radice di ordine 1 è della forma $Y = cX + \dots$ dove c risolve $c + 1 = 0$, cioè $c = -1$. Per continuare lo sviluppo, sostituiamo $Y = X(-1 + Y_1)$ nella curva, e otteniamo:

$$X^4(-1 + Y_1)^4 + X^2X(-1 + Y_1) + X^3 = X^4 + (X^3 - 4X^4)Y_1 + 6X^4Y_1^2 - 4X^4Y_1^3 + X^4Y_1^4$$

il cui poligono di Newton ha un lato negativo di pendenza -1 e lunghezza 1. Dunque $Y_1 = dX + \dots$ ove d risolve $d + 1 = 0$, cioè $d = -1$. Sostituendo, troviamo che $Y = -X - X^2 + \dots$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T \\ Y=-T-T^2+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 1, classe 1 e tangente $X + Y = 0$.



- (b) Le radici di ordine $2/3$ sono della forma $Y = cX^{2/3} + \dots$ dove c risolve $c^4 + c = 0$, e possiamo scegliere $c = -1$ (le altre saranno ottenute coniugando con le radici cubiche di 1, cioè sostituendo $X^{1/3}$ con $\zeta X^{1/3}$, con $\zeta^3 = 1$). Per continuare lo sviluppo, sostituiamo $Y = X^{2/3}(-1 + Y_1)$ nella curva, e otteniamo:

$$X^{8/3}(-1 + Y_1)^4 + X^2X^{2/3}(-1 + Y_1) + X^3 = X^3 - 3X^{8/3}Y_1 + 6X^{8/3}Y_1^2 - 4X^{8/3}Y_1^3 + X^{8/3}Y_1^4$$

il cui poligono di Newton ha un lato negativo di pendenza $-1/3$ e lunghezza 1. Dunque $Y_1 = dX^{1/3} + \dots$ ove d risolve $-3d + 1 = 0$, cioè $d = 1/3$. Sostituendo, troviamo che $Y = -X^{2/3} + \frac{1}{3}X + \dots$, e questo basta per dire che il ramo \mathfrak{Q} corrispondente (alle tre radici di ordine $2/3$) ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^3 \\ Y=-T^2+\frac{1}{3}T^3+\dots \end{cases}$, (si noti che non è normalizzata) e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $X = 0$.



- (6) Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da

$$(a) m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \text{ord}_T(g_{(\alpha,\beta)}(\mathfrak{P}(T))) = \text{ord}_T((\alpha + \beta)T^2 - 2\alpha T^3 + \dots) = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha + \beta \neq 0 \\ 3 & \text{se } \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$(b) m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \text{ord}_T(g_{(\alpha,\beta)}(\mathfrak{Q}(T))) = \text{ord}_T(-2\alpha T^5 + (\frac{11}{3}\alpha - 3\beta)T^6 + \dots) = \begin{cases} 5 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 6 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

Dunque abbiamo $m_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}) + m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{D}) = 7$ per quasi tutte le polari in questione, e abbiamo che la classe di \mathcal{C} si può calcolare come $\text{deg } \mathcal{C}(\text{deg } \mathcal{C} - 1) - m_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 12 - 7 = 5$ (formula di Plücker).

Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da

$$(a) m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = \text{ord}_T(h(\mathfrak{P}(T))) = \text{ord}_T(-3T^6 + \dots) = 6,$$

$$(b) m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{H}) = \text{ord}_T(h(\mathfrak{Q}(T))) = \text{ord}_T(-9T^{14} + \dots) = 14.$$

Si potevano dedurre questi risultati dai conti dei punti in (3) e (4)?

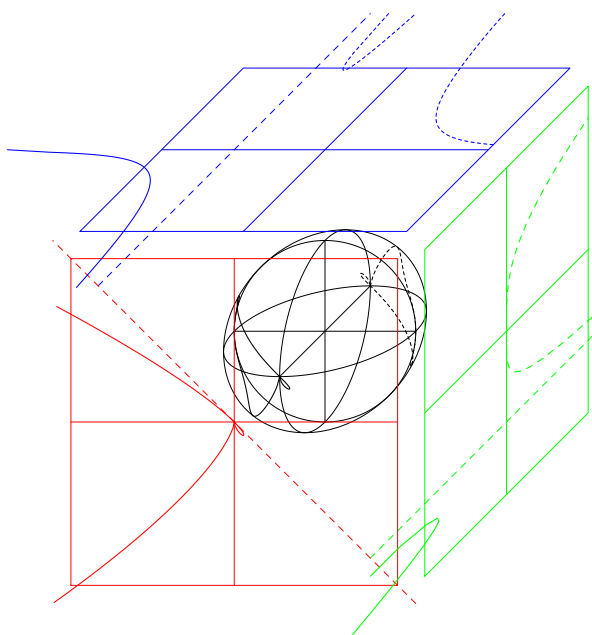
- (7)

Mentre l'equazione affine $X^3 + X^2Y + Y^4 = 0$ non è particolarmente illuminante, in una qualunque delle altre due disomogeneizzazioni standard, possiamo esplicitare una delle variabili e riuscire a studiare l'andamento della curva:

(1) l'espressione $Z + ZY + Y^4 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = -\frac{Y^4}{1+Y}$;

(2) l'espressione $ZX^3 + ZX^2 + 1 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = -\frac{1}{X^2+X^3}$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura (nel piano (X, Y) , in rosso, si deduce per proiezione):



- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 4 e classe 5, possiede un punto triplo avente due tangenti distinte e due posti corrispondenti (uno ordinario e uno cuspidale), possiede tre flessi (due ordinari, posti di molt. 1 e classe 2, e uno d'ordine 2, cioè un posto di molt. 1 e classe 3). Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 5 e classe 4, possiede una bitangente (in un punto ordinario e uno di flesso), possiede un punto di flesso ordinario, possiede due cuspidi ordinarie e un posto di molt. 3 e classe 1 avente una unica tangente.

Un tale posto ha parametrizzazione speciale del tipo $(\frac{T^3}{T^4+\dots})$ e l'equazione della curva in quel riferimento dev'essere del tipo $Y^3 - X^4 + Yf_3 + f_{\geq 5}$ (tangente è $Y = 0$). Ora intersecando con una generica polare, per esempio rispetto a $(\frac{0}{1})$, cioè $3Y^2 + f_3 + Yf'_3 + f'_{\geq 5}$, otteniamo che la molteplicità di intersezione è 8 in quel punto, che dunque contribuisce con -8 alle formule di Plücker per la classe. Ma allora abbiamo $4 = \text{classe di } \mathcal{C}^* = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 8 - ?$, da cui $? = 6 - 4 = 2$, e quindi la curva \mathcal{C}^* deve contenere un nodo (e la curva \mathcal{C} deve ammettere una bitangente, come si vede dal disegno).

Usando la formula di Plücker per i flessi, e calcolando la molteplicità di intersezione dell'hessiana di \mathcal{C}^* nel posto singolare triplo (risulta 22), otteniamo che $f^* = 5 \cdot 3 \cdot (5 - 2) - 2 \cdot 8 - 6 - 22 = 1$ (due cuspidi, un nodo, il posto triplo), che conferma l'esistenza di un solo flesso (ordinario). Lo stesso controllo per la curva \mathcal{C} richiede il calcolo della molteplicità di intersezione con l'hessiana di \mathcal{C} di \mathfrak{P} (risulta 6) e \mathfrak{Q} (risulta 14), da cui si trova $f = 4 \cdot 3 \cdot (4 - 2) - 6 - 14 = 4$ (infatti avevamo trovato due flessi ordinari e uno doppio).

Per trovare l'equazione della curva duale bisogna ricorrere alla nozione di risultante, e vi sono due strategie possibili:

(cart) per la prima, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1^3 + X_1^2 X_2 \\ \xi_1 = 3X_0 X_1^2 + 2X_0 X_1 X_2 \\ \xi_2 = X_0 X_1^2 + 4X_2^3 \\ 0 = X_0 \xi_0 + X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 \end{cases}$$

che possiamo semplificare passando in coordinate affini tramite $X_1 = 1, \xi = \xi_1/\xi_0, \eta = \xi_2/\xi_0$.

Otteniamo allora di dover eliminare X_0, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} (1 + X_2)\xi = 3X_0 + 2X_0X_2 \\ (1 + X_2)\eta = X_0 + 4X_2^3 \\ 0 = X_0 + \xi + X_2\eta \end{cases}$$

e ricavando $X_0 = -(\xi + X_2\eta)$ dall'ultima equazione, e sostituendo, ci resta da eliminare X_2 dal sistema

$$\begin{cases} 2\eta X_2^2 + 3(\eta + \xi)X_2 + 6\xi = 0 \\ 4X_2^3 + 2\eta X_2 + (\eta + \xi) = 0 \end{cases}$$

Ora basta eliminare X_2 , e l'equazione cercata per \mathcal{C}^* è

$$R_{X_2}(2\eta X_2^2 + 3(\eta + \xi)X_2 + 6\xi, 4X_2^3 + 2\eta X_2 + (\eta + \xi)) = 0.$$

Dunque, basta porre

$$\begin{vmatrix} 2\eta & 3(\eta+\xi) & 6\xi & & & \\ & 2\eta & 3(\eta+\xi) & 6\xi & & \\ 4 & 0 & 2\eta & \eta+\xi & 6\xi & \\ & 4 & 0 & 2\eta & \eta+\xi & \end{vmatrix} = 0.$$

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} -t^4 \\ -(1+t) \\ -t(1+t) \end{pmatrix}$ e ponendo $s = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} -t^4 \\ -(1+t) \\ -t(1+t) \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -t^4 \\ -(1+t) \\ -t(1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^4 \\ -(1+t) \\ -t(1+t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4t^3 \\ -1 \\ -1-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)^2 \\ -3t^4-2t^5 \\ 4t^3+2t^4 \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare t dai sistemi

$$\begin{cases} \xi_0 = (1+t)^2 \\ \xi_1 = -t^4(3+2t) \\ \xi_2 = t^3(4+3t) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} t^3(4+3t)\zeta = (1+t)^2 \\ (4+3t)\xi = -t(3+2t) \end{cases}$$

e dunque l'equazione cercata è data da

$$R_t(3t^4\zeta + 4t^3\zeta - t^2 - 2t - 1, 2t^2 + 3(1+\xi)t + 4\xi) = 0,$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} 3\zeta & 4\zeta & -1 & -2 & -1 & & \\ & 3\zeta & 4\zeta & -1 & -2 & -1 & \\ 2 & 3(1+\xi) & 4\xi & & & & \\ & 2 & 3(1+\xi) & 4\xi & & & \\ & & 2 & 3(1+\xi) & 4\xi & & \\ & & & 2 & 3(1+\xi) & 4\xi & \end{vmatrix} = 0.$$

1.5. SECONDO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0^2 X_1^2 - X_0^2 X_2^2 + X_1^2 X_2^2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [sugg.: si usi un fascio di coniche passanti per i punti singolari e tangenti in uno di tali punti ad una tangente alla curva];
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_0(X_1^2 - X_2^2) = 0 \\ X_1(X_0^2 + X_2^2) = 0 \\ X_2(-X_0^2 + X_1^2) = 0 \end{cases}$$

e dalla prima equazione si ottiene che $X_0 = 0$ oppure $X_1^2 = X_2^2$; dalla prima possibilità si ottengono i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dalla seconda l'ulteriore punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto alle X_i si vede che i tre punti sono doppi, con complessi tangente formati da rette distinte (dunque sono tre nodi), e ogni tangente ha intersezione d'ordine 4 con la curva nel punto singolare. Nel caso del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, il complesso tangente si spezza in due rette complesse coniugate.

- (2) Poiché è una quartica (irriducibile) con tre nodi, la deficienza della curva è zero (infatti è $\frac{3 \cdot 2}{2} - 3 = 0$) e dunque si tratta di una curva razionale. Per trovare una parametrizzazione, seguiamo il suggerimento costruendo il fascio di coniche passanti per i punti singolari della curva, e tangenti nell'origine alla retta $X = Y$; si tratta del fascio di equazione generale $\lambda(X - Y) + \mu XY = 0$, e che possono essere parametrizzate usando il fascio di rette per l'origine nella forma $\begin{cases} X = \frac{\lambda}{\mu}(t-1)/t \\ Y = \frac{\lambda}{\mu}(t-1) \end{cases}$.

Sostituendo nell'equazione affine $X^2 - Y^2 + X^2 Y^2 = 0$ della curva, si ricava il valore $t = \frac{(\lambda/\mu)^2 + 1}{(\lambda/\mu)^2 - 1} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}$, che permette di parametrizzare la quartica tramite

$$\begin{cases} X = \frac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \\ Y = \frac{2\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \lambda^4 - \mu^4 \\ X_1 = 2\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \\ X_2 = 2\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_1(X_0^2 + X_2^2) + \beta X_2(-X_0^2 + X_1^2) = 0$$

ovvero

$$\alpha X_1 X_0^2 + \alpha X_1 X_2^2 - \beta X_2 X_0^2 + \beta X_2 X_1^2 = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$2\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda^2 - \mu^2)[\alpha(\lambda^2 + \mu^2)^3 - \beta(\lambda^2 - \mu^2)^3] = 0 .$$

Otteniamo dunque i tre punti singolari ciascuno con molteplicità 2, e 6 ulteriori punti variabili in funzione della polare; dai punti richiesti dunque si trovano 6 tangenti contate con le molteplicità opportune, di solito distinte. La nostra quartica dunque è di classe 6. D'altra parte, avendo la curva solo nodi, anche la formula di Plücker prevedeva come classe $4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 12 - 6 = 6$.

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} X_1^2 - X_2^2 & 2X_0 X_1 & -2X_0 X_2 \\ 2X_0 X_1 & X_0^2 + X_2^2 & 2X_1 X_2 \\ -2X_0 X_2 & 2X_1 X_2 & -X_0^2 + X_1^2 \end{pmatrix} = 3 \left(-X_0^2 (X_1^2 + X_2^2)^2 + X_1^2 (X_0^2 - X_2^2)^2 - X_2^2 (X_0^2 + X_1^2)^2 \right)$$

(dopo un po' di conti). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $-48\lambda^4\mu^4(\lambda^4 - \mu^4)^4 = 0$. Dunque vediamo i punti singolari contati ciascuno 8 volte, e di conseguenza sembrerebbe non esservi alcun flesso! Poiché la quartica ha solo (tre) nodi, la formula classica di Plücker prevede invece di trovare $4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 24 - 18 = 6$ flessi. In realtà sono i punti singolari che nascondono ciascuno due posti di flessio (possiamo già prevederlo, visto che l'ordine di intersezione della curva con la tangente non è quello minimo...).

- (5) Siccome i punti singolari sono tutti e tre nodi, sappiamo che ciascuno porta due posti lineari, ciascuno di classe 2. Per esempio, per studiare l'origine consideriamo il polinomio affine $X^2 - Y^2 + X^2Y^2$, biquadratico in Y , da cui si ricava subito $Y^2 = X^2(1 - X^2)^{-1} = X^2(1 + X^2 + X^4 + \dots)$, e infine $Y = \pm X(1 + X^2 + X^4 + \dots)^{1/2} = \pm X(1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{8}X^4 + \dots)$. Da questo si deducono delle parametrizzazioni (normalizzate) per i due posti, date da $\begin{cases} X=T \\ Y=\pm(T+\frac{1}{2}T^3+\dots) \end{cases}$ e si leggono subito molteplicità (1), classe (2) e tangenti ($X \pm Y = 0$). Si tratta quindi di posti di flessio (ordinario). Per gli altri due nodi, si ottengono espressioni analoghe.

- (6) Consideriamo i due posti \mathfrak{P}_{\pm} nell'origine. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}_{\pm}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \text{ord}_T(g_{(\alpha,\beta)}(\mathfrak{P}_{\pm}(T))) = \text{ord}_T((\alpha \mp \beta)T + (\alpha \pm \beta/2)T^3 + \dots) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \mp \beta \neq 0 \\ 3 & \text{se } \alpha \mp \beta = 0 \end{cases}$.

Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}_{\pm}}(\mathcal{H}) = \text{ord}_T(h(\mathfrak{P}_{\pm}(T))) = \text{ord}_T(-9T^4 + \dots) = 4$. Il risultato può sembrare sorprendente (i posti dei nodi dovrebbero contribuire con -3 alle formule di Plücker per i flessi...), ma bisogna tener presente che i posti stessi sono di flessio!

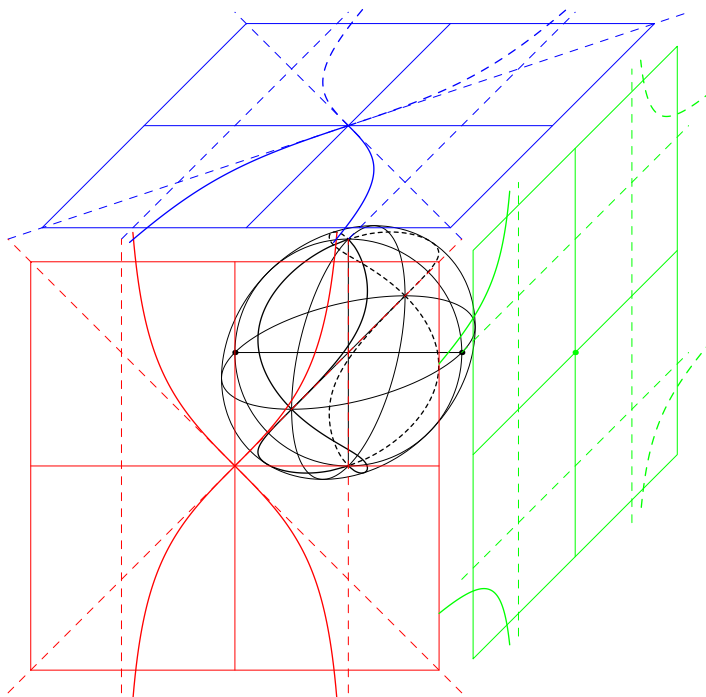
Si potevano dedurre questi risultati dai conti dei punti in (3) e (4)?

(7)

Una qualunque delle tre disomogeneizzazioni standard porta a delle espressioni biquadratiche, e possiamo esplicitare una delle variabili e riuscire a studiare l'andamento della curva:

- (0) l'espressione $X^2 - Y^2 + X^2Y^2$ dà $Y = \pm X/\sqrt{1 - X^2}$;
 (1) l'espressione $Z^2 - Z^2Y^2 + Y^2 = 0$ dà $Y = \pm Z/\sqrt{Z^2 - 1}$;
 (2) l'espressione $Z^2X^2 - Z^2 + X^2 = 0$ dà $Z = \pm X/\sqrt{1 - X^2}$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura (si osservi che il nodo avente tangenti non reali compare come un punto isolato nello scheletro reale della curva).



- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 4 e classe 6, possiede tre nodi (ciascuno con due posti lineari di flessio), possiede sei posti di flessio (nascosti nei nodi). Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 6 e classe 4, possiede tre bitangenti, possiede sei posti cuspidali ordinari.

Usando la formula di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $4 = 6 \cdot 5 - 6 \cdot 3 - ?$ da cui $? = 8$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare 4 nodi (oppure un nodo e un punto triplo ordinario?), e la curva \mathcal{C} deve possedere 4 bitangenti (oppure una bitangente e una tritangente: assurdo, perché?). Usando la formula di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che la curva duale è priva di flessi:

$6 \cdot 4 \cdot 3 - 6 \cdot 4 - 8 \cdot 6 = 0$ (d'altra parte, \mathcal{C} non aveva posti cuspidali...).

Per trovare l'equazione della curva duale bisogna ricorrere alla nozione di risultante, e vi sono due strategie possibili:

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \lambda^4 - \mu^4 \\ 2\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \\ 2\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) \end{pmatrix}$ e ponendo $\mu = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \lambda^4 - 1 \\ 2\lambda(\lambda^2 - 1) \\ 2\lambda(\lambda^2 + 1) \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \lambda^4 - 1 \\ 2\lambda(\lambda^2 - 1) \\ 2\lambda(\lambda^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^4 - 1 \\ 2\lambda(\lambda^2 - 1) \\ 2\lambda(\lambda^2 + 1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\lambda^3 \\ 3\lambda^2 - 1 \\ 3\lambda^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\lambda^3 \\ (\lambda^2 + 1)^3 \\ -(\lambda^2 - 1)^3 \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare λ dai sistemi

$$\begin{cases} \xi_0 = -8\lambda^3 \\ \xi_1 = (\lambda^2 + 1)^3 \\ \xi_2 = -(\lambda^2 - 1)^3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -8\lambda^3 \zeta = (\lambda^2 + 1)^3 \\ -8\lambda^3 \xi = -(\lambda^2 - 1)^3 \end{cases}$$

e con qualche piccola riduzione ci riconduce all'equazione

$$R_\lambda(\lambda^4 + 8(\xi - \eta)\lambda + 3, (\xi + \eta)\lambda^3 - 4(\xi - \eta)\lambda - 1) = 0,$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 8(\xi - \eta) & 3 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 8(\xi - \eta) & 3 & 0 \\ \xi + \eta & 0 & -4(\xi - \eta) & -1 & 0 & 8(\xi - \eta) & 3 \\ & \xi + \eta & 0 & -4(\xi - \eta) & -1 & 0 & 0 \\ & & \xi + \eta & 0 & -4(\xi - \eta) & -1 & 0 \\ & & & \xi + \eta & 0 & -4(\xi - \eta) & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_0(X_1^2 - X_2^2) \\ \xi_1 = X_1(X_0^2 + X_2^2) \\ \xi_2 = X_2(-X_0^2 + X_1^2) \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

che è un po' più complicato...

1.6. TERZO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0^4 + X_0^3 X_2 - X_1^4 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 4X_0^3 + 3X_0^2 X_2 = 0 \\ -4X_1^3 = 0 \\ X_0^3 = 0 \end{cases}$$

e si ottiene l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_2 si vede che il punto è triplo, con complesso tangente dato da X_0^3 , unica retta contata tre volte e con molteplicità di intersezione 4 con la curva.

- (2) Poiché è una quartica (irriducibile) con un punto triplo, si tratta di una curva razionale. Per trovare una parametrizzazione, possiamo usare il fascio di rette per il punto singolare, che permette di parametrizzare la quartica tramite

$$\begin{cases} X = \lambda \\ Y = \lambda^4 - 1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^4 \\ X_1 = \lambda\mu^3 \\ X_2 = \lambda^4 - \mu^4 \end{cases}.$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_0^2(4X_0 + 3X_2) - 4\beta X_1^3 = 0.$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\mu^8(\alpha\mu^4 + 3\alpha\lambda^4 - 4\beta\lambda^3\mu) = 0$$

Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità 8, e 4 ulteriori punti variabili in funzione della polare; dai punti richiesti dunque si trovano 4 tangenti contate con le molteplicità opportune, di solito distinte. La nostra quartica dunque è di classe 4. D'altra parte, avendo la curva solo una cuspidale (superiore, di molteplicità 3) ordinaria, anche la formula di Plücker prevedeva come classe $4 \cdot 3 - (3^2 - 1) = 12 - 8 = 4$.

Volendo, si può specificare quali sono i punti da cui partono tangenti con molteplicità maggiori di 1, cioè la cui polare interseca la curva con molteplicità maggiore di uno in qualche punto non singolare: sono quelli per cui si annulla il discriminante rispetto a λ, μ del polinomio $\alpha\mu^4 - 4\beta\lambda^3\mu + 3\alpha\lambda^4$, ovvero gli zeri di $\alpha^3(\alpha^4 - \beta^4) = 0$.

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 12X_0^2 + 6X_0X_2 & 0 & 3X_0^2 \\ 0 & -12X_1^2 & 0 \\ 3X_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 108X_0^4 X_1^2.$$

Intersecando la curva con l'hessiana, troviamo il punto singolare con molteplicità 22, e il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ con molteplicità 2, dunque un flesso (doppio, nel senso che la retta tangente ha molteplicità di intersezione 4 con la curva in quel punto). Poiché la quartica ha solo la cuspidale trovata sopra, la formula classica di Plücker prevede di trovare $4 \cdot 3 \cdot 2 - (3 \cdot 3 + 2)(3 - 1) = 24 - 22 = 2$ flessi (giustamente).

- (5) L'unico punto singolare è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; disomogeneizzando rispetto a X_2 troviamo il polinomio $Z^4 + Z^3 - X^4$, che dà soluzioni rispetto a X del tipo $X = (Z^3 + Z^4)^{1/4} = Z^{3/4}(1 + Z)^{1/4} =$

$Z^{3/4} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/4}{n} Z^n = Z^{3/4} (1 + \frac{1}{4}Z + \dots)$. D'altra parte si vede subito che il poligono di Newton rispetto a X ha un unico lato di pendenza $-3/4$. Quindi c'è un unico ramo, con parametrizzazione (non standard) del tipo $\begin{cases} X=T^3(1+\frac{1}{4}T^4+\dots) \\ Z=T^4 \end{cases}$, di ordine 3, classe 1, tangente $Z=0$.

- (6) La molteplicità di intersezione nell'unico posto \mathfrak{P} del punto singolare con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \text{ord}_T(g_{(\alpha,\beta)}(\mathfrak{P}(T))) = \begin{cases} 8 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 12 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$.

Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = \text{ord}_T(h(\mathfrak{P}(T))) = 22$.

Si potevano dedurre questi risultati dai conti dei punti in (3) e (4)?

(7)

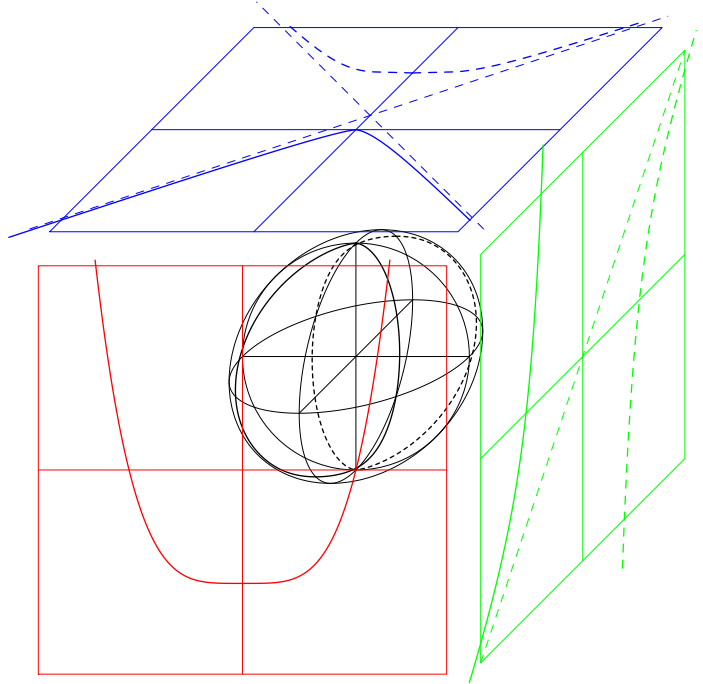
Una qualunque delle tre disomogeneizzazioni standard permette di capire l'andamento reale della curva:

(0) l'espressione $1 + Y - X^4 = 0$ dà $Y = X^4 - 1$ (parabola generalizzata);

(1) l'espressione $Z^4 + Z^3Y - 1 = 0$ dà $Y = \frac{1-Z^4}{Z^3}$;

(2) l'espressione $Z^4 + Z^3 - X^4 = 0$ dà $X^4 = Z^4 + Z^3$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura: (si osservi che lo scheletro reale non manifesta alcuna singolarità: chi è il punto singolare?).



- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 4 e classe 4, possiede un unico punto singolare con un unico posto di molteplicità 3 e classe 1 (posto cuspidale doppio ordinario), possiede un punto di flesso doppio, cioè un posto di molteplicità 1 e classe 3. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 4 e classe 4, un flesso doppio, cioè un posto di molteplicità 1 e classe 3, e un posto di molteplicità 3 e classe 1 (posto cuspidale doppio ordinario).

Le formule di Plücker per classe e flessi di \mathcal{C}^* danno gli stessi conti che per \mathcal{C} . Viene il dubbio che \mathcal{C} sia autoduale...

Per trovare l'equazione della curva duale e vi sono le due strategie usuali:

- (param) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \mu^4 \\ \lambda\mu^3 \\ \lambda^4 - \mu^4 \end{pmatrix}$ e ponendo $\mu = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^4 - 1 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^4 - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4\lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3\lambda^4 \\ -4\lambda^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare λ dai sistemi

$$\begin{cases} \xi_0 = 1 + 3\lambda^4 \\ \xi_1 = -4\lambda^3 \\ \xi_2 = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \xi_0 = \mu^4 + 3\lambda^4 \\ \xi_1 = -4\lambda^3\mu \\ \xi_2 = \mu^4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \zeta (= \xi_0/\xi_2) = 1 + 3\lambda^4 \\ \xi (= \xi_1/\xi_2) = -4\lambda^3 \end{cases}$$

e si elimina "alla mano" il parametro λ ottenendo l'equazione affine $4^4(\zeta - 1)^3 = 3^3\xi^4$, e dunque l'equazione omogenea $4^4\xi_2(\xi_0 - \xi_2)^3 = 3^3\xi_1^4$. Si poteva altrimenti ricorrere al

risultante rispetto a λ dei due polinomi per avere l'equazione $R_\lambda(3\lambda^4 - \zeta + 1, 4\lambda^3 + \xi) = 0$ (il determinante è facile e dà subito lo stesso risultato).

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = 4X_0^3 + 3X_0^2X_2 \\ \xi_1 = -4X_1^3 \\ \xi_2 = X_0^3 \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

che si può fare a partire dal sistema (bi)disomogeneizzato rispetto a X_0 e ξ_2 :

$$\begin{cases} \zeta = 4 + 3Y \\ \xi = -4X^3 \\ 0 = \zeta + X\xi + Y \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \zeta = 4 + 3(-\zeta - X\xi) \\ \xi = -4X^3 \end{cases}$$

da cui nuovamente si elimina “alla mano” la variabile X , oppure si calcola il risultante rispetto a X dei due polinomi: equazione $R_X(4X^3 + \xi, 3\xi X + 4\zeta - 4) = 0$ (anche qui il determinante

di $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \xi \\ 3\xi & 4\zeta-4 & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi & 4\zeta-4 & 0 \\ 0 & 0 & 3\xi & 4\zeta-4 \end{pmatrix}$ si sviluppa facilmente).

P.S. In effetti, a meno di proiettività, esiste una unica quartica che abbia un posto di molteplicità 3 e classe 1 (cuspide “doppia” ordinaria) e un posto di molteplicità 1 e classe 3 (flesso “doppio”).

Infatti, scegliendo il riferimento in modo che la cuspide abbia coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e complesso tangente

X_0^3 , e il flesso abbia coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e tangente $X_0 + X_1$, l'equazione può essere ricondotta a $X_1^4 + X_0^3(X_1 + X_2) = 0$. Si tratta quindi di una curva autoduale (a meno di proiettività...), visto lo svolgimento dell'esercizio.

1.7. QUARTO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0^3 X_1 - X_0 X_1 X_2^2 + X_2^4 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 3X_0^2 X_1 - X_1 X_2^2 = 0 \\ X_0^3 - X_0 X_2^2 = 0 \\ -2X_0 X_1 X_2 + 4X_2^3 = 0 \end{cases}$$

e si ottiene l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_1 si vede che il punto è triplo, con complesso tangente dato da $X_0(X_0 + X_2)(X_0 - X_2)$, dunque si tratta di un punto ordinario (tre tangenti distinte), e tutte le tangenti hanno molteplicità di intersezione 4 con la curva nel punto singolare.

- (2) Poiché è una quartica (irriducibile) con un punto triplo, si tratta di una curva razionale. Per trovare una parametrizzazione, possiamo usare il fascio di rette per il punto singolare, che permette di parametrizzare la quartica tramite

$$\begin{cases} X = \lambda^4 / (\lambda^2 - 1) \\ Y = \lambda \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^2(\lambda^2 - \mu^2) \\ X_1 = \lambda^4 \\ X_2 = \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \end{cases}.$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_1(3X_0^2 - X_2^2) + \beta X_0(X_0^2 - X_2^2) = 0.$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\mu^2(\lambda^2 - \mu^2)^2(-\alpha\lambda^6 + (3\alpha - \beta)\lambda^4\mu^2 + 2\beta\lambda^2\mu^4 - \beta\mu^6) = 0$$

Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità 6, e 6 ulteriori punti variabili in funzione della polare; dai punti richiesti dunque si trovano 6 tangenti contate con le molteplicità opportune, di solito distinte. La nostra quartica dunque è di classe 6. D'altra parte, avendo la curva solo un punto triplo ordinario, anche la formula di Plücker prevedeva come classe $4 \cdot 3 - 3(3 - 1) = 12 - 6 = 6$.

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 6X_0 X_1 & 3X_0^2 - X_2^2 & -2X_1 X_2 \\ 3X_0^2 - X_2^2 & 0 & -2X_0 X_2 \\ -2X_1 X_2 & -2X_0 X_2 & -2X_0 X_1 + 12X_2^2 \end{pmatrix} = -8X_0 X_1 X_2^2 - 2(3X_0^2 - X_2^2)^2(6X_2^2 - X_0 X_1).$$

Intersecando la curva con l'hessiana via la parametrizzazione, troviamo l'espressione

$$-18\lambda^2\mu^6(\lambda^2 - \mu^2)^6(\lambda^4 - 3\lambda^2\mu^2 + 6\mu^4) = 0$$

e dunque il punto singolare con molteplicità 18, e il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 2, dunque un flesso (doppio, nel senso che la retta tangente ha molteplicità di intersezione 4 con la curva in quel punto), e quattro ulteriori punti semplici di flesso. Poiché la quartica ha solo il punto triplo ordinario, la formula classica di Plücker prevede di trovare $4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3(3 - 1) = 24 - 18 = 6$ flessi (giustamente, perché contati con le molteplicità).

- (5) L'unico punto singolare è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; disomogeneizzando rispetto a X_1 troviamo il polinomio $Z^3 - ZY^2 + Y^4$, che dà soluzioni rispetto a Y del tipo

$$Y^2 = \frac{1}{2}Z(1 \pm \sqrt{1-4Z}) = \frac{1}{2}Z(1 \pm (1 - 2Z - 2Z^2 + \dots)) = \begin{cases} Z(1 - Z + \dots) \\ Z^2(1 + Z + \dots) \end{cases} ;$$

dalla prima espressione si ottiene un ramo \mathfrak{P} , dalla seconda altri due \mathfrak{P}_\pm . D'altra parte si vede subito che il poligono di Newton rispetto a Y ha due lati: uno di pendenza $-2/2 = -1$ (due rami) e un altro di pendenza $-1/2$ e lunghezza 2 (un altro ramo). Le parametrizzazioni dei rami sono $\mathfrak{P} \begin{cases} Y=T(1-T^2/2+\dots) \\ Z=T^2 \end{cases}$ e $\mathfrak{P}_\pm \begin{cases} Y=\pm T(1+T/2+\dots) \\ Z=T \end{cases}$ e sono tutti di ordine 1 e classe 1, e di tangenti rispettivamente $Y = 0, Y \mp Z = 0$.

- (6) La molteplicità di intersezione nei posti $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\pm$ del punto singolare con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = m_{\mathfrak{P}_\pm}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 4 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$.

Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = m_{\mathfrak{P}_\pm}(\mathcal{H}) = 6$. Si potevano dedurre questi risultati dai conti dei punti in (3) e (4)?

(7)

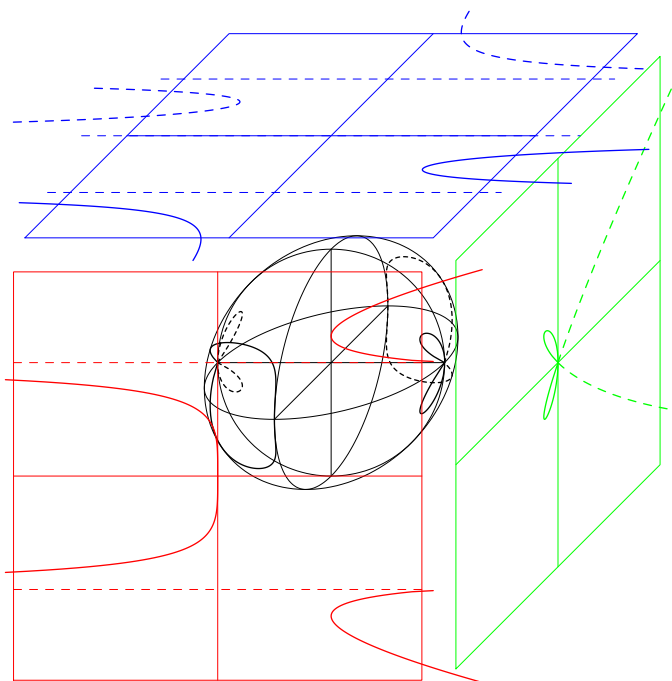
Una qualunque delle tre disomogeneizzazioni standard permette di capire l'andamento reale della curva:

(0) l'espressione $X - XY^2 + Y^4 = 0$ dà $X = \frac{Y^4}{Y^2-1}$;

(1) l'espressione $Z^3 - ZY^2 + Y^4 = 0$ dà le parametrizzazioni viste prima (più difficile);

(2) l'espressione $Z^3X - ZX + 1 = 0$ dà $X = \frac{1}{Z(1-Z^2)}$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura (una variante del trifoglio):



- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 4 e classe 6, possiede un unico punto singolare triplo con tre posti di molteplicità 1 e classe 1 ciascuno, possiede un punto di flesso doppio, cioè un posto di molteplicità 1 e classe 3, e quattro flessi semplici. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 6 e classe 4, una tritangente, un posto di molteplicità 3 e classe 1 (posto cuspidale doppio ordinario), quattro cuspidi ordinarie. Non può avere flessi, poiché \mathcal{C} non ha cuspidi.

Le formule di Plücker per classe e flessi di \mathcal{C}^* danno $4 = c^* = 6 \cdot 5 - 2 \cdot ? - 3 \cdot 4 - (3^2 - 1)$ ove $?$ è il numero di nodi di \mathcal{C}^* (che non può avere punti multipili ordinari maggiori, poiché altrimenti \mathcal{C} avrebbe rette con eccesso di tangenze...); dunque $? = 3$, cosicché \mathcal{C}^* ha tre nodi e \mathcal{C} possiede tre bitangenti, come si poteva capire dal disegno (d'un trifoglio!). D'altra parte $f^* = 3 \cdot 6 \cdot 4 - 3 \cdot 6 - 4 \cdot 8 - (3 \cdot 3 + 2)(3 - 1) = 0$, com'è giusto che sia.

Per trovare l'equazione della curva duale vi sono le due strategie usuali:

- (param) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \mu^2(\lambda^2 - \mu^2) \\ \lambda^4 \\ \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \end{pmatrix}$ e ponendo $\mu = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 \\ \lambda^4 \\ \lambda(\lambda^2 - 1) \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 \\ \lambda^4 \\ \lambda(\lambda^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 \\ \lambda^4 \\ \lambda(\lambda^2 - 1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 4\lambda^3 \\ 3\lambda^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^4(3 - \lambda^2) \\ -(\lambda^2 - 1)^2 \\ \lambda^3(2\lambda^2 - 4) \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare λ dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = \lambda^4(3 - \lambda^2) \\ \xi_1 = -(\lambda^2 - 1)^2 \\ \xi_2 = \lambda^3(2\lambda^2 - 4) \end{cases}$$

(è un po' complicato).

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = 3X_0^2X_1 - X_1X_2^2 \\ \xi_1 = X_0^3 - X_0X_2^2 \\ \xi_2 = -2X_0X_1X_2 + 4X_2^3 \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

che si può fare a partire dal sistema (bi) disomogeneizzato rispetto a X_0 e ξ_1 :

$$\begin{cases} (1 - Y^2)\zeta = 3X - XY^2 \\ (1 - Y^2)\eta = -2XY + 4Y^3 \\ 0 = \zeta + X + Y\eta \end{cases} \quad \text{oppure } (X = -\zeta - Y\eta): \begin{cases} \eta Y^3 + 2\zeta Y^2 - 3\eta Y - 4\zeta = 0 \\ 4Y^3 + 3\eta Y^2 + 2\zeta Y - \eta = 0 \end{cases}$$

da cui si elimina la variabile Y annullando il risultante rispetto a Y dei due polinomi:

$$\begin{vmatrix} \eta & 2\zeta & -3\eta & -4\zeta \\ \eta & 2\zeta & -3\eta & -4\zeta \\ 4 & 3\eta & 2\zeta & -\eta \\ 4 & 3\eta & 2\zeta & -\eta \end{vmatrix} = 0.$$

1.8. QUINTO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0^2 X_1^2 - X_0 X_1^2 X_2 - X_2^4 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 2X_0 X_1^2 - X_1^2 X_2 = 0 \\ 2X_0^2 X_1 - 2X_0 X_1 X_2 = 0 \\ -X_0 X_1^2 - 4X_2^3 = 0 \end{cases}$$

e si ottengono due punti singolari. Uno è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_1^2 = 0$, e l'unica tangente ha molteplicità di intersezione 4 con la curva in quel punto. L'altro è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; disomogeneizzando rispetto a X_1 si vede che il punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_0(X_0 - X_2)$: si tratta quindi di un punto doppio ordinario, anche se ciascuna delle tangenti ha molteplicità di intersezione 4 con la curva nel punto singolare.

- (2) Anche se la deficienza non è nulla, si tratta di una curva razionale, poiché utilizzando un fascio di coniche bitangente nei due punti singolari a rette del complesso tangente in quei punti, otteniamo che le intersezioni con la curva data sono almeno 4 (per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) e almeno 3 (per $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$), dunque di solito 7, e l'ulteriore punto di intersezione varierà a seconda della conica del fascio per parametrizzare la curva (una quartica e una conica hanno intersezione in 8 punti, se contati con molteplicità, per il teorema di Bézout). Utilizzando il fascio di coniche $\lambda X_0 X_1 + \mu X_2^2$ (conviene usare la forma affine $X = \mu Y^2$) si arriva a parametrizzare la quartica tramite

$$\begin{cases} X = (\mu^2 - 1)^2 / \mu^3 \\ Y = (\mu^2 - 1) / \mu^2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \lambda \mu^3 \\ X_1 = (\mu^2 - \lambda^2)^2 \\ X_2 = \lambda \mu (\mu^2 - \lambda^2) \end{cases}.$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_1^2 (2X_0 - X_2) + 2\beta X_0 X_1 (X_0 - X_2) = 0.$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda \mu (\mu^2 - \lambda^2)^2 (\alpha \lambda^6 - \alpha \lambda^4 \mu^2 + 2\beta \lambda^3 \mu^3 - \alpha \lambda^2 \mu^4 + \alpha \mu^6) = 0.$$

Otteniamo dunque 4 volte il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2 volte il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e 6 ulteriori punti variabili in funzione della polare; dai punti richiesti dunque si trovano 6 tangenti contate con le molteplicità opportune, di solito distinte. La nostra quartica dunque è di classe 6.

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 2X_1^2 & 4X_0 X_1 - 2X_1 X_2 & -X_1^2 \\ 4X_0 X_1 - 2X_1 X_2 & 2X_0^2 - 2X_0 X_2 & -2X_0 X_1 \\ -X_1^2 & -2X_0 X_1 & -12X_2^2 \end{pmatrix} = -6X_1^2 (X_0(X_2 - X_0)(24X_2^2 - X_1^2) - 8X_2^4).$$

Intersecando la curva con l'hessiana via la parametrizzazione,

$$\lambda^4 \mu^4 (\mu^2 - \lambda^2)^6 (8\lambda^2 \mu^2 - 3(\mu^2 - \lambda^2)^2) = 0$$

e dunque il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 12, e il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 8, e quattro ulteriori punti semplici di flesso.

- (5) Consideriamo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; disomogeneizzando rispetto a X_0 troviamo il polinomio $X^2 - X^2Y - Y^4$, che dà soluzioni rispetto a X del tipo

$$X^2 = \frac{Y^4}{1-Y} = Y^4(1-Y)^{-1} = Y^4(1+Y+Y^2+\dots);$$

da cui si ottengono due fattori $X = \pm Y^2(1+\frac{1}{2}Y+\dots)$; quindi vi sono due posti \mathfrak{P}_\pm di molteplicità e classe 1, entrambi con tangente $X_1 = 0$, e di parametrizzazioni $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm T^2(1+\frac{1}{2}T+\dots) \\ T \end{pmatrix}$. D'altra parte si vedeva subito che il poligono di Newton rispetto a X ha un unico lato di lunghezza 2 e pendenza $-4/2 = -2$.

Consideriamo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; disomogeneizzando rispetto a X_1 troviamo il polinomio $Z^2 - ZY - Y^4$, che dà soluzioni rispetto a Z del tipo

$$Z = \frac{1}{2}(Y \pm \sqrt{Y^2 + 4Y^4}) = \frac{1}{2}Y(1 \pm \sqrt{1 + 4Y^2}) = \frac{1}{2}Y(1 \pm (1 + 2Y^2 + \dots)) = \begin{cases} Y + Y^3 + \dots \\ -Y^3 + \dots \end{cases};$$

da cui si ottengono due posti Ω_\pm di molteplicità 1 e classe 2 entrambi, con tangenti $X_0 - X_2 = 0$ e $X_0 = 0$ rispettivamente, di parametrizzazioni $\begin{pmatrix} T+T^3+\dots \\ \frac{1}{T} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -T^3+\dots \\ \frac{1}{T} \end{pmatrix}$ rispettivamente. D'altra parte si vedeva subito che il poligono di Newton rispetto a Z ha due lati, uno di lunghezza 1 e pendenza $-3/1 = -3$, il secondo di lunghezza 1 e pendenza -1 (dando luogo rispettivamente ai posti Ω_\mp).

- (6) La molteplicità di intersezione nei posti \mathfrak{P}_\pm del punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3)

sono date da $m_{\mathfrak{P}_\pm}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 2 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 4 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$. Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}_\pm}(\mathcal{H}) = 6$.

La molteplicità di intersezione nei posti Ω_\pm del punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3)

sono date da $m_{\Omega_\pm}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 4 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$. Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H}

in (4) sono date da $m_{\Omega_\pm}(\mathcal{H}) = 4$. Quest'ultimo risultato può sembrare strano, perché il punto singolare è ordinario doppio (quindi le formule di Plücker per i flessi userebbero 3...), ma bisogna tener conto che i due posti del nodo sono posti di flesso, avendo classe 2, e quindi contribuiscono maggiormente alla intersezione con l'hessiana ($3 + 1 = 4$, appunto).

(7)

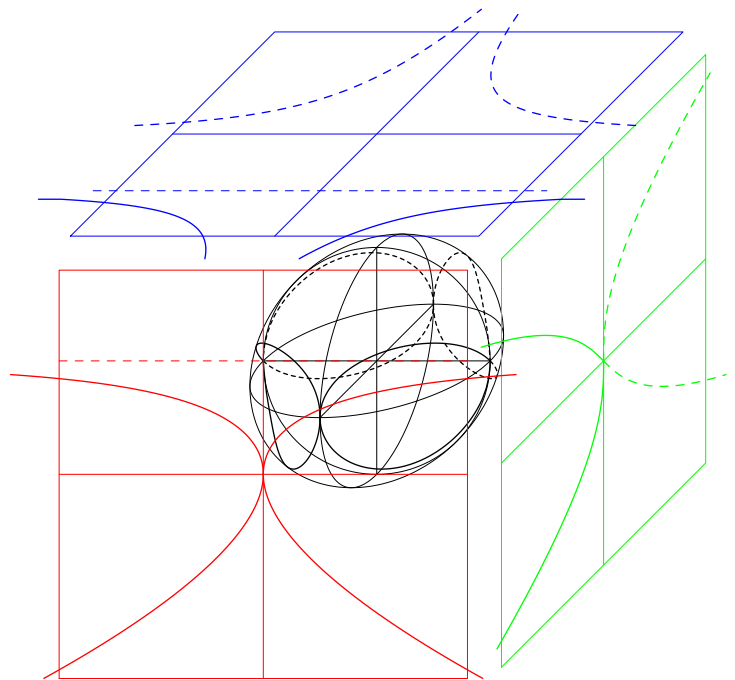
Una qualunque delle tre disomogeneizzazioni standard permette di capire l'andamento reale della curva:

(0) l'espressione $X^2 - X^2Y - Y^4 = 0$ dà $X^2 = \frac{Y^4}{1-Y}$;

(1) l'espressione $Z^2 - ZY - Y^4$ è quadratica in Z ;

(2) l'espressione $Z^2X^2 - ZX^2 - 1 = 0$ dà $X^2 = \frac{1}{Z(Z-1)}$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 4 e classe 6, possiede un punto singolare doppio con unica tangente e due posti (lineari semplici) e un punto singolare doppio ordinario con due posti lineari di flesso (semplice), e quattro flessi semplici. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 6 e classe 4, una bitangente (su due punti cuspidali), sei cuspidi ordinarie, un punto singolare doppio con unica tangente e due posti (lineari semplici). Non può avere flessi, poiché \mathcal{C} non ha cuspidi.

Le formule di Plücker per classe e flessi di \mathcal{C}^* danno $4 = c^* = 6 \cdot 5 - 2 \cdot ? - 3 \cdot 6 - 4$ ove $?$ è il numero di nodi di \mathcal{C}^* (che non può avere punti multipili ordinari maggiori, poiché altrimenti \mathcal{C} avrebbe rette con eccesso di tangenze...); dunque $? = 2$, cosicché \mathcal{C}^* ha due nodi e \mathcal{C} possiede due bitangenti. D'altra parte $f^* = 3 \cdot 6 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 6 \cdot 8 - 12 = 0$, com'è giusto che sia.

Per trovare l'equazione della curva duale e vi sono le due strategie usuali:

- (*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \lambda\mu^3 \\ (\mu^2 - \lambda^2)^2 \\ \lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2) \end{pmatrix}$ e ponendo $\mu = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ (1-\lambda^2)^2 \\ \lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \lambda \\ (1-\lambda^2)^2 \\ \lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ (1-\lambda^2)^2 \\ \lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4\lambda(1-\lambda^2) \\ 1-3\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda^2)^2(1+\lambda^2) \\ -4\lambda^3 \\ -(1-\lambda^2)(1+3\lambda^2) \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare λ dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = (1 - \lambda^2)^2(1 + \lambda^2) \\ \xi_1 = 2\lambda^3 \\ \xi_2 = -(1 - \lambda^2)(1 + 3\lambda^2) \end{cases}$$

(è un po' complicato, conviene disomogeneizzare rispetto a ξ_2).

- (*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = 2X_0X_1^2 - X_1^2X_2 \\ \xi_1 = 2X_0^2X_1 - 2X_0X_1X_2 \\ \xi_2 = -X_0X_1^2 - 4X_2^3 \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

che si può fare a partire dal sistema (bi)disomogeneizzato rispetto a X_1 e ξ_0 :

$$\begin{cases} (2Z - Y)\xi = 2Z^2 - 2ZY \\ (2Z - Y)\xi_2 = -Z - 4Y^3 \\ 0 = Z + \xi + Y\eta \end{cases} \quad \text{oppure } (Z = -\xi - Y\eta): \begin{cases} 2\eta(\eta + 1)Y^2 + 3\xi(2\eta + 1)Y + 4\xi^2 = 0 \\ 4Y^3 - 2\eta(\eta + 1)Y^2 - \xi(2\eta + 1) = 0 \end{cases}$$

da cui si elimina la variabile Y annullando il risultante rispetto a Y dei due polinomi:

$$\begin{vmatrix} 2\eta(\eta+1) & 3\xi(2\eta+1) & 4\xi^2 & & & \\ & 2\eta(\eta+1) & 3\xi(2\eta+1) & 4\xi^2 & & \\ & & 2\eta(\eta+1) & 3\xi(2\eta+1) & 4\xi & \\ -4 & 0 & 2\eta(\eta+1) & \xi(2\eta+1) & & \\ & -4 & 0 & 2\eta(\eta+1) & (2\eta+1) & \end{vmatrix} = 0.$$

2. 2006/7: quintiche razionali (con un punto quadruplo?).

2.1. PRIMA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0 X_1^2 X_2^2 - X_1^5 - X_2^5 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare la polare rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tale punto;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^2 X_2^2 = 0 \\ 2X_0 X_1 X_2^2 - 5X_1^4 = 0 \\ 2X_0 X_1^2 X_2 - 5X_2^4 = 0 \end{cases}$$

e dalla prima equazione si ottiene che $X_1 = 0$ oppure $X_2 = 0$; sostituendo nelle altre si ha che comunque $X_1 = 0 = X_2$, e quindi si trova l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quadruplo, con complesso tangente dato da $X_1^2 X_2^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_1 = 0$ due volte, e dalla retta $X_2 = 0$ anch'essa con molteplicità 2. Ciascuna delle due tangenti al punto singolare ha intersezione d'ordine 5 con la curva in tale punto.

- (2) Poiché è una quintica (irriducibile: si ragioni sul fatto che è di primo grado in X_0) si tratta di una curva razionale. Utilizzando l'equazione affine $X^2 Y^2 - X^5 - Y^5$ e intersecando con il fascio di rette per l'origine (punto singolare) $Y = tX$ troviamo che i punti della curva si rappresentano tramite le parametrizzazioni affini e proiettiva seguenti:

$$\begin{cases} X = \frac{t^2}{1+t^5} \\ Y = \frac{t^3}{1+t^5} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X_0 = \alpha^5 + \beta^5 \\ X_1 = \alpha^3 \beta^2 \\ X_2 = \alpha^2 \beta^3 \end{cases}.$$

- (3) La polare richiesta ha equazione $X_1(2X_0 X_2^2 - 5X_1^3) = 0$. Intersecandola con la curva stessa si trovano i punti singolari e i punti di tangenza di rette tangenti alla curva e passanti per il punto dato. Sostituendo la parametrizzazione della curva nella polare troviamo l'equazione $\alpha^7 \beta^8 (2\beta^5 - 3\alpha^5) = 0$, da cui si riconosce 15 volte il punto singolare (corrispondente sia ad $\alpha = 0$, sia a $\beta = 0$), e cinque altri punti distinti, corrispondenti a $\alpha = \sqrt[5]{2}$ e $\beta = \zeta^i \sqrt[5]{3}$, con ζ radice primitiva quinta dell'unità e $i = 0, 1, 2, 3, 4$; ovvero si tratta dei punti di coordinate $\begin{pmatrix} 2^{3/5} 3^{2/5} \zeta^{2i} \\ 2^{2/5} 3^{3/5} \zeta^{3i} \end{pmatrix}$.

Le tangenti cercate passano per il punto dato e per questi punti, di cui uno solo reale. Si osservi anche che la retta per il punto dato e per il punto singolare è una tangente; quindi in totale si contano 6 tangenti, di cui due reali.

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & 2X_1 X_2^2 & 2X_1^2 X_2 \\ 2X_1 X_2^2 & 2X_0 X_2^2 - 20X_1^3 & 4X_0 X_1 X_2 \\ 2X_1^2 X_2 & 4X_0 X_1 X_2 & 2X_0 X_1^2 - 20X_2^3 \end{pmatrix} &= 8X_1^2 X_2^2 \det \begin{pmatrix} 0 & X_2 & X_1 \\ X_2 & X_0 X_2^2 - 10X_1^3 & 2X_0 X_1 X_2 \\ X_1 & 2X_0 X_1 X_2 & X_0 X_1^2 - 10X_2^3 \end{pmatrix} = \\ &= 8X_1^2 X_2^2 (X_0 X_1^2 X_2^2 + 5X_1^5 + 5X_2^5). \end{aligned}$$

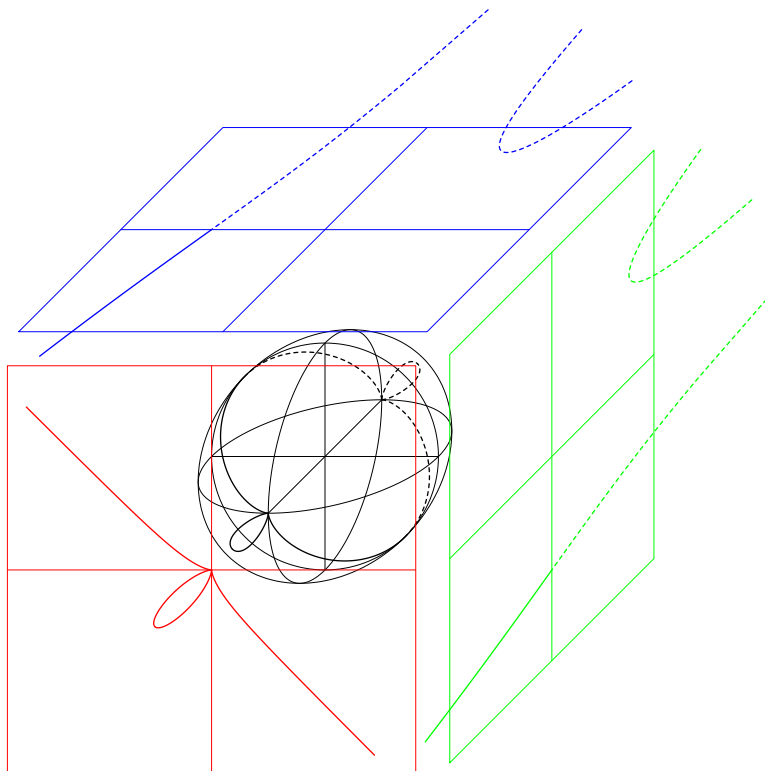
Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\alpha^{20} \beta^{20} (\alpha^5 + \beta^5) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato 40 volte, e altri cinque punti distinti che sono quindi dei flessi (uno solo reale). Si tratta dei cinque punti della curva nella retta $X_0 = 0$.

- (5)

In una qualunque delle disomogeneizzazioni standard, possiamo esplicitare una delle variabili e riuscire a studiare l'andamento della curva:

- (0) l'espressione $X^2Y^2 - X^5 - Y^5 = 0$ è complicata (ma simmetrica in X e Y): la sostituzione $X = X' + Y'$, $Y = X' - Y'$ permette però di ricondursi ad una biquadratica in Y' (di cui scompaiono le potenze dispari): da questo si può studiare il grafico (simmetrico rispetto a Y');
- (1) l'espressione $ZX^2 - X^5 - 1 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = \frac{X^5+1}{X^2}$;
- (2) l'espressione $ZY^2 - 1 - Y^5 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = \frac{Y^5+1}{Y^2}$;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura (nel piano (X, Y) , in rosso, si nota un asintoto sul punto di flesso reale, che è qui un punto improprio):



2.2. SECONDA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^2X_2^2 - X_1^5 - X_2^5 = 0$ (si ricordi dalla “prima prova” che è razionale e $\begin{pmatrix} \alpha^5 + \beta^5 \\ \alpha^3\beta^2 \\ \alpha^2\beta^3 \end{pmatrix}$ ne è una parametrizzazione);

- (1) se ne determini la polare rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e si classifichi proiettivamente tale quartica;
- (2) usando il risultante rispetto a X_2 delle due curve nel riferimento dato, determinarne i punti di intersezione e le relative molteplicità;
- (3) verificare se possibile i risultati precedenti mediante l'uso di parametrizzazioni;
- (4) si consideri ora il fascio di quartiche formato dalle polari della quintica data rispetto ai punti della retta di equazione $X_0 = 0$; determinare il ciclo base di tale fascio (cioè i punti, con molteplicità, per cui passano tutte le quartiche del fascio); quali curve del fascio sono razionali?

Soluzione.

- (1) La polare richiesta ha equazione $X_2(2X_0X_1^2 - 5X_2^3) = 0$; si tratta di una quartica riducibile, formata da una retta e una cubica avente un unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è doppio con una unica tangente $X_1 = 0$: si tratta quindi di una cubica cuspidale.
- (2) Intersecare la retta $X_2 = 0$ con la curva è elementare e dà il punto origine usuale con molteplicità 5; consideriamo allora la curva data con la parte cubica della polare; il risultante richiesto è dato

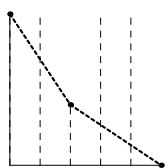
Il fascio può essere descritto così: si tratta delle quartiche che hanno un punto triplo nell'origine con due tangenti fissate (8 condizioni lineari: controllare sul triangolo dei monomi quartici) e passano per ulteriori 5 punti (altre 5 condizioni lineari indipendenti); chiaramente non possono ridursi in due coniche irriducibili, poiché vi sarebbero al più due tangenti distinte nell'origine (e questi casi sono quelli delle due polari rispetto ai punti fondamentali), e contengono rette se e solo se una delle tangenti all'origine annulla tutto il polinomio (per esempio perché è di primo grado in X_0). Scrivendo il fascio nella forma affine come $XY(\lambda X + \mu Y) - 5(\mu X^4 + \lambda Y^4)$ si vede che ciò succede, a parte i due casi noti, per $\lambda^5 + \mu^5 = 0$ (basta calcolare un discriminante), altre cinque curve del fascio riducibili. Tutte le altre sono razionali.

2.3. TERZA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0 X_1^2 X_2^2 - X_1^5 - X_2^5 = 0$.

- (1) Si determinino i posti della curva di centro nell'origine affine usuale;
- (2) Si determini la polare della curva rispetto al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e, utilizzando i risultati del punto precedente, si determini la molteplicità di intersezione nell'origine della curva data con questa polare; è possibile dedurne quanto vale la classe della curva?
- (3) Tenendo presente i risultati ottenuti sulla curva data, che cosa si può dire della curva duale (numero e tipo di singolarità, numero di flessi e bitangenti)? Se il tempo lo permette, si determini l'equazione della curva duale.

Soluzione.

- (1) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^5 - X^2 Y^2 + X^5$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:

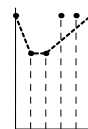


e presenta quindi due lati, uno di pendenza $-3/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[X^{1/2}]]$ che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]]$), e l'altro di pendenza $-2/3$ e lunghezza 3 (tre radici in $K[[X^{1/3}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]]$ per la curva data). La curva presenta dunque in $K[[X]][Y]$ due fattori irriducibili, corrispondenti a due posti con centro nell'origine (punto singolare).

- (a) Le radici di ordine $3/2$ sono della forma $Y = cX^{3/2} + \dots$ dove c risolve $c \pm 1 = 0$, cioè $c = \pm 1$. Per continuare lo sviluppo, sostituiamo $Y = X^{3/2}(1 + Y_1)$ nella curva, e otteniamo:

$$\begin{aligned} X^{15/2}(1 + Y_1)^5 - X^5(1 + Y_1)^2 + X^5 &= \\ = X^{15/2} + (5X^{15/2} - 2X^5)Y_1 + (10X^{15/2} - X^5)Y_1^2 + 10X^{15/2}Y_1^3 + 5X^{15/2}Y_1^4 + X^{15/2}Y_1^5 \end{aligned}$$

il cui poligono di Newton ha un lato negativo di pendenza $-5/2$ e lunghezza 1. Dunque $Y_1 = dX^{5/2} + \dots$ ove d risolve $5d + 1 = 0$, cioè $d = -1/5$. Sostituendo, troviamo che $Y = \pm(X^{3/2} - \frac{1}{5}X^4 + \dots)$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=T^3 - T^8/5 + \dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $Y = 0$.



- (b) Le radici di ordine $2/3$ sono della forma $Y = cX^{2/3} + \dots$ dove c risolve $c^4 - c = 0$, e possiamo scegliere $c = 1$ (le altre saranno ottenute coniugando con le radici cubiche di 1, cioè sostituendo $X^{1/3}$ con $\zeta X^{1/3}$, con $\zeta^3 = 1$). Per continuare lo sviluppo, sostituiamo $Y = X^{2/3}(1 + Y_1)$ nella curva, e otteniamo:

$$X^{10/3}(1 + Y_1)^5 - X^{10/3}(1 + Y_1)^2 + X^5 = X^5 + 3X^{10/3}Y_1 + 9X^{10/3}Y_1^2 + 5X^{10/3}Y_1^3 + 10X^{10/3}Y_1^4 + X^{10/3}Y_1^5$$

il cui poligono di Newton ha un lato negativo di pendenza $-5/3$ e lunghezza 1. Dunque $Y_1 = dX^{5/3} + \dots$ ove d risolve $-3d - 1 = 0$, cioè $d = -1/3$. Sostituendo, troviamo che $Y = X^{2/3} - \frac{1}{3}X^{7/3} + \dots$, e questo basta per dire che il ramo \mathfrak{Q} corrispondente (alle tre radici di ordine $2/3$) ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^3 \\ Y=T^2 - \frac{1}{3}T^7 + \dots \end{cases}$ (si noti che non è normalizzata) e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $X = 0$.



Peraltro, la simmetria della curva in X, Y , cioè l'invarianza sotto la proiettività τ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ permette subito di dire che $\mathfrak{Q} = \tau\mathfrak{P}$ (si deducevano subito allora parametrizzazione normalizzata di \mathfrak{Q} , e le sue caratteristiche).

- (2) La polare \mathcal{D} richiesta ha equazione $(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y})(Y^5 - X^2Y^2 + X^5) = -2XY^2 + 5X^4 + 5Y^4 - 2YX^2$ e possiamo calcolare la molteplicità di intersezione con la curva nell'origine O sommando i due contributi dati dai due posti: se $g(X, Y)$ è l'equazione di \mathcal{D} ,

(a) $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}) = \text{ord}_T(g(\mathfrak{P}(T))) = \text{ord}_T(-2T^7 + \dots) = 7$,

(b) $m_{\Omega}(\mathcal{D}) = \text{ord}_T(g(\Omega(T))) = \text{ord}_T(-2T^7 + \dots) = 7$ (prevedibile, visto che anche la polare è simmetrica in X, Y , cioè invariante per τ).

Dunque abbiamo $m_O(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}) + m_{\Omega}(\mathcal{D}) = 14$. Poiché la retta $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è tangente alla curva nell'origine, unico punto singolare della curva, abbiamo che la classe di \mathcal{C} si può calcolare come $\text{deg } \mathcal{C}(\text{deg } \mathcal{C} - 1) - m_O(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 20 - 14 = 6$ (formula di Plücker).

- (3) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:

- (1) ha grado 5 e classe 6;
- (2) ha esattamente 5 flessi semplici (dal primo compito, potremmo anche ottenere questo risultato ora usando i posti nell'origine per vedere la molteplicità di intersezione nell'origine della curva con la propria hessiana);
- (3) ha un solo punto singolare che presenta due rami: entrambi di molteplicità 2 e classe 1, cioè posti cuspidali ordinari.

Da questo possiamo dedurre che la curva duale \mathcal{C}^* :

- (1) ha grado 6 e classe 5;
- (2) ha esattamente 5 cuspidi semplici;
- (3) ha una sola bitangente, in due punti di flesso ordinari.

Le eventuali altre singolarità di \mathcal{C}^* possono essere punti doppi ordinari, oppure punti tripli non ordinari con due tangenti distinte (altre più grandi singolarità sono escluse dal grado di \mathcal{C}), ma questi ultimi dovrebbero corrispondere a bitangenti di \mathcal{C} in un suo punto di flesso: per il flesso reale si controlla subito che la tangente non è bitangente, e per gli altri si ragiona usando l'invarianza della curva sotto le proiettività $\tau_{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$ (con $\zeta^5 = 1$) che permuta i flessi tra loro...

Siccome allora la classe di \mathcal{C}^* si calcola, in base ai punti singolari, come $\text{deg } \mathcal{C}^*(\text{deg } \mathcal{C}^* - 1) - 2\tau^* - 3\kappa^*$ (con τ^* i nodi, κ^* le cuspidi), e risulta $30 - 2\tau^* - 15 = 5$ (grado di \mathcal{C}), ne concludiamo che \mathcal{C}^* ha esattamente 5 nodi (e \mathcal{C} esattamente 5 bitangenti).

L'altra formula di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* dà $3 \text{deg } \mathcal{C}^*(\text{deg } \mathcal{C}^* - 2) - 6\tau^* - 8\kappa^*$, e si ottiene $72 - 40 - 30 = 2$, come avevamo già detto.

Per trovare l'equazione della curva duale bisogna ricorrere alla nozione di risultante, e vi sono due strategie possibili:

- (cart) per la prima, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1^2 X_2^2 \\ \xi_1 = 2X_0 X_1 X_2^2 - 5X_1^4 \\ \xi_2 = 2X_0 X_1^2 X_2 - 5X_2^4 \\ 0 = X_0 \xi_0 + X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 \end{cases}$$

che possiamo semplificare passando in coordinate affini tramite $X_2 = 1$, $\xi = \xi_1/\xi_0$, $\eta = \xi_2/\xi_0$. Otteniamo allora di dover eliminare X_0, X_1 dal sistema

$$\begin{cases} X_1^2 \xi = 2X_0 X_1 - 5X_1^4 \\ X_1^2 \eta = 2X_0 X_1^2 - 5 \\ 0 = X_0 + X_1 \xi + \eta \end{cases}$$

e ricavando X_0 dall'ultima equazione, e sostituendo, ci resta da eliminare X dal seguente sistema

$$\begin{cases} 5X^3 + 3\xi X + 2\eta = 0 \\ 2\xi X^3 + 3\eta X^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

Ora basta eliminare X , e l'equazione cercata per \mathcal{C}^* è

$$R_X(5X^3 + 3\xi X + 2\eta, 2\xi X^3 + 3\eta X^2 + 5) = 0.$$

Dunque, basta calcolare il determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3\xi & 2\eta \\ & 5 & 0 & 3\xi & 2\eta \\ 2\xi & 3\eta & 0 & 5 \\ & 2\xi & 3\eta & 0 & 5 \\ & & 2\xi & 3\eta & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \alpha^5 + \beta^5 \\ \alpha^3 \beta^2 \\ \alpha^2 \beta^3 \end{pmatrix}$ e ponendo $\alpha = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 1 + \beta^5 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \beta} \begin{pmatrix} 1 + \beta^5 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \beta^5 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix} \times \beta \begin{pmatrix} 5\beta^3 \\ 2 \\ 3\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \beta^3 \\ -3\beta + 2\beta^6 \\ 2 - 3\beta^5 \end{pmatrix}$$

Dunque basta eliminare β dai sistemi

$$\begin{cases} \xi_0 = \beta^3 \\ \xi_1 = -3\beta + 2\beta^6 \\ \xi_2 = 2 - 3\beta^5 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \beta^2 \xi = -3 + 2\beta^5 \\ \beta^3 \eta = 2 - 3\beta^5 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2\beta^5 - \xi\beta^2 - 3 = 0 \\ 3\beta^5 + \eta\beta^3 - 2 = 0 \end{cases}$$

o ancora

$$\begin{cases} 2\eta\beta^3 + 3\xi\beta^2 + 5 = 0 \\ 5\beta^3 + 3\eta\beta + 2\xi = 0 \end{cases}$$

(si tratta di combinazioni delle precedenti eliminando i termini dominanti, oppure i termini costanti), il che porta agli stessi conti precedentemente svolti: annullamento del determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3\eta & 2\xi \\ & 5 & 0 & 3\eta & 2\xi \\ 2\eta & 3\xi & 0 & 5 \\ & 2\eta & 3\xi & 0 & 5 \\ & & 2\eta & 3\xi & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

(la matrice non è proprio quella di prima: ma bastano due specchi per ottenerla; si tratta di una simmetria dei risultanti su cui può essere utile riflettere).

P.S. Per scrivere esplicitamente l'equazione della curva duale lo sviluppo dei quei determinanti, per quanto noioso, è possibile, anche se forse non conveniente: riprendendo la strategia cartesiana, si potrebbe ulteriormente ridurre i gradi del parametro X eliminando ad ogni passaggio i termini dominante e noto:

$$\begin{cases} -2\xi I + 5II \\ -2\eta II + 5I \end{cases} \begin{cases} 15\eta X^2 - 6\xi^2 X + (25 - 4\xi\eta) = 0 \\ (25 - 4\xi\eta)X^2 - 6\eta^2 X + 15\xi = 0 \end{cases}$$

poi

$$\begin{cases} (25 - 4\xi\eta)I - 15\eta II \\ (25 - 4\xi\eta)II - 15\xi I \end{cases} \begin{cases} 6(15\eta^3 - \xi^2(25 - 4\xi\eta))X + ((25 - 4\xi\eta)^2 - 15^2\xi\eta) = 0 \\ ((25 - 4\xi\eta)^2 - 15^2\xi\eta)X - 6(15\xi^3 - \eta^2(25 - 4\xi\eta)) = 0 \end{cases}$$

che infine dà un banale determinante d'ordine 2, ma appesantito da un fattore spurio $(25 - 4\xi\eta)$ che abbiamo introdotto nell'ultimo passaggio; tolto questo si trova un'equazione tipo

$$(4\xi\eta - 5^2)^3 - 2^2 3^3 5(\xi^5 + \eta^5) - 3^3 7\xi^2 \eta^2 + 23^2 5^4 \xi\eta = 0.$$

2.4. PRIMO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^3X_2 - X_1^5 - X_2^5 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^3X_2 = 0 \\ X_1^2(3X_0X_2 - 5X_1^2) = 0 \\ X_0X_1^3 - 5X_2^2 = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quadruplo con complesso tangente dato da $X^3Y = 0$, dunque con due tangenti distinte (una di molteplicità 3); entrambe le tangenti hanno molteplicità di intersezione 5 con la curva nel punto singolare.

- (2) Poiché è una quintica (irriducibile) con un punto quadruplo, si tratta di una curva razionale. Consideriamo come al solito il fascio di rette per l'origine, che permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X = \frac{\lambda}{\lambda^5+1} \\ Y = \frac{\lambda^2}{\lambda^5+1} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \lambda^5 + \mu^5 \\ X_1 = \lambda\mu^4 \\ X_2 = \lambda^2\mu^3 \end{cases}.$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_1^2(3X_0X_2 - 5X_1^2) + \beta(X_0X_1^3 - 5X_2^2) = 0.$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^{11}\mu^3[3\alpha\mu^6 - 4\beta\lambda\mu^5 - 2\alpha\lambda^5\mu + \beta\lambda^6] = 0.$$

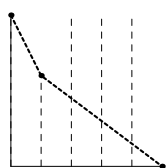
Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità $11 + 3 = 14$, e in generale altri 6 punti distinti (il polinomio in λ, μ tra parentesi quadrata avrà radici multiple solo per i valori di α, β che ne annullano il discriminante). Possiamo anche concludere che la classe della curva è 6, poiché quella descritta è in effetti la situazione generica (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 3X_1^2X_2 & X_1^3 \\ 3X_1^2X_2 & 6X_0X_1X_2 - 20X_1^3 & 3X_0X_1^2 \\ X_1^3 & 3X_0X_1^2 & -20X_2^3 \end{pmatrix} = 2X_1^4(3X_0X_1^3X_2 + 5X_1^5 + 45X_2^5)$$

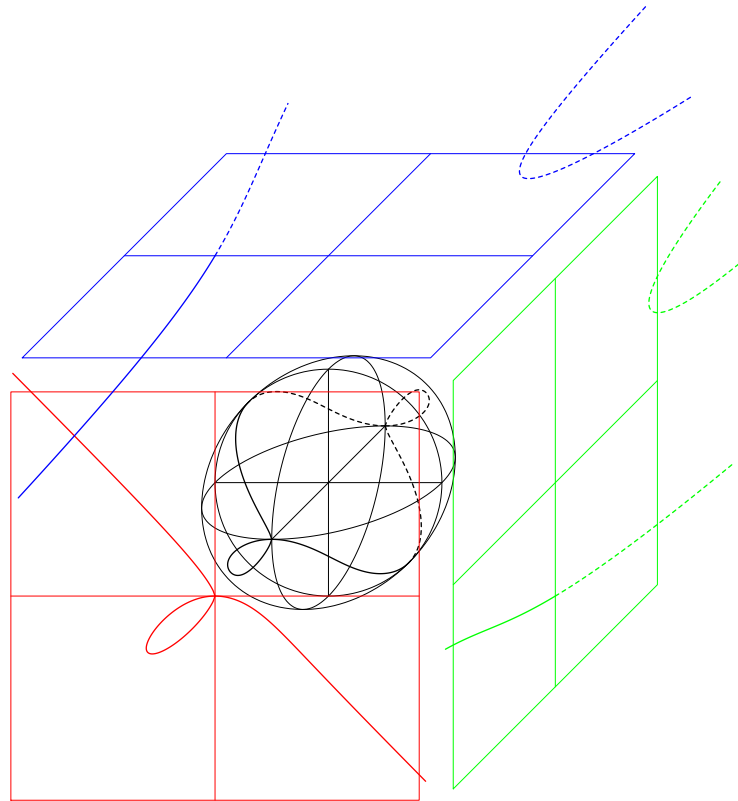
(dopo un po' di conti). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso eventualmente il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^{31}\mu^9(\lambda^5 + 6\mu^5) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato $31 + 9 = 40$ volte, e 5 punti distinti di flesso semplice identificati dagli zeri dell'altro fattore.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^5 - X^3Y + X^5$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi due lati, uno di pendenza -2 e lunghezza 1 (un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$), e l'altro di pendenza $-3/4$ e lunghezza 4 (quattro radici in $K[[X^{1/4}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$ per la curva data). La curva presenta dunque in $K[[X]][Y]$ due fattori irriducibili, corrispondenti a due posti con centro nell'origine (punto singolare).

- (a) La radice di ordine 2 è del tipo $Y = X^2 + X^7 + \dots$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T \\ Y=T^2+T^7+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 1, classe 1 e tangente $Y = 0$.
- (b) Le radici di ordine 3/4 sono della forma $Y = X^{3/4} - \frac{1}{4}X^2 + \dots$ (e simili sostituendo X con ζX , ζ radice quarta dell'unità), e questo basta per dire che il ramo \mathfrak{Q} corrispondente (alle quattro radici di ordine 3/4) ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^4 \\ Y=T^3-\frac{1}{4}T^8+\dots \end{cases}$, (si noti che non è normalizzata) e dunque molteplicità 3, classe 1 e tangente $X = 0$.
- (6) Consideriamo i due posti \mathfrak{P} e \mathfrak{Q} nell'origine. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 3 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 4 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$ e $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 11 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 12 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$.
- Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = 9$ e $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{H}) = 31$. Si potevano dedurre questi risultati dai conti dei punti in (3) e (4)?
- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti:
- (0) $X^3Y - X^5 - Y^5$ (è difficile da studiare);
 - (1) $ZX^3 - X^5 - 1 = 0$ dà $Z = \frac{1+X^5}{X^3} = X^2 + \frac{1}{X^3}$;
 - (2) $ZY - 1 - Y^5 = 0$ dà $Z = \frac{1+Y^5}{Y} = Y^4 + \frac{1}{Y}$;
- e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si noti l'asintoto nel piano X, Y in rosso, e anche il diverso andamento dei due posti nell'origine; dove sarà il flesso reale?).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 5 e classe 6, possiede un solo punto singolare con due posti (uno lineare ordinario, l'altro cuspidale doppio ordinario), possiede 5 punti di flesso semplice. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 6 e classe 5, possiede una bitangente in due punti di cui uno semplice, l'altro di flesso doppio, possiede 5 cuspidi ordinarie.

Usando la formula di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $5 = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - ?$ da cui $? = 10$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare 5 nodi (non ci possono essere altri tipi di singolarità per \mathcal{C}^* , come si vede controllando le possibili multitangenti di \mathcal{C}), e la curva \mathcal{C} deve possedere 5

2.5. SECONDO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^4 - X_0X_1^2X_2^2 - X_2^5 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^2(X_1^2 - X_2^2) = 0 \\ X_0X_1(4X_1^2 - 2X_2^2) = 0 \\ -X_2(X_0X_1^2 + 5X_2^3) = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quadruplo con complesso tangente dato da $X^2(X+Y)(X-Y) = 0$, dunque con tre tangenti distinte (una di molteplicità 2); tutte le tangenti hanno molteplicità di intersezione 5 con la curva nel punto singolare.

- (2) Poiché è una quintica (irriducibile) con un punto quadruplo, si tratta di una curva razionale. Consideriamo come al solito il fascio di rette per l'origine, che permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X = \lambda^3(\lambda^2 - 1) \\ Y = \lambda^2(\lambda^2 - 1) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^5 \\ X_1 = \lambda^3(\lambda^2 - \mu^2) \\ X_2 = \lambda^2\mu(\lambda^2 - \mu^2) \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_0X_1(4X_1^2 - 2X_2^2) - \beta X_2(X_0X_1^2 - 5X_2^3) = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^7\mu^4(\lambda^2 - \mu^2)^3[4\alpha\lambda^3 - 5\beta\lambda^2\mu - 2\alpha\lambda\mu^2 + 3\beta\mu^3] = 0 .$$

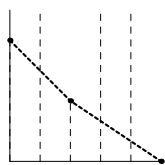
Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità $7 + 6 = 13$, il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 4 (corrispondente a $\mu = 0$) e in generale altri 3 punti distinti (il polinomio in λ, μ tra parentesi quadrata avrà radici multiple solo per i valori di α, β che ne annullano il discriminante). Possiamo anche concludere che la classe della curva è 7 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4X_1^3 - 2X_1X_2^2 & -2X_1^2X_2 \\ 4X_1^3 - 2X_1X_2^2 & 12X_0X_1^2 - 2X_0X_2^2 & -4X_0X_1X_2 \\ -2X_1^2X_2 & -4X_0X_1X_2 & -2X_0X_1^2 - 20X_2^3 \end{pmatrix} = 8X_1^2 \left(-X_0X_1^2X_2^2(2X_1^2 - 3X_2^2) - (2X_1^2 - X_2^2)^2(X_0X_1^2 + 10X_2^3) \right)$$

(dopo un po' di conti). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso eventualmente il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo (dopo lunghi conti) l'equazione $\lambda^{20}\mu^3(\lambda^2 - \mu^2)^9(10\lambda^4 - 9\lambda^2\mu^2 + 3\mu^4) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato $20 + 18 = 38$ volte, il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 3 (un flesso triplo) e 4 punti distinti di flesso semplice identificati dagli zeri dell'altro fattore. In totale, contati con le molteplicità sono 7 flessi.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^5 + X^2Y^2 - X^4$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi due lati, uno di pendenza -1 e lunghezza 2 (due fattori irriducibili in $K[[X]]$), e l'altro di pendenza $-2/3$ e lunghezza 3 (tre radici in $K[[X^{1/3}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]]$ per la curva data). La curva presenta dunque in $K[[X]][Y]$ tre fattori irriducibili, corrispondenti a tre posti con centro nell'origine (punto singolare).

È però più conveniente lo studio in quanto polinomio nella X , poiché in tal caso si presenta come biquadratico $X^4 - X^2Y^2 - Y^5$ e possiamo esplicitare le soluzioni come

$$X^2 = \frac{1}{2}Y^2\left(1 \pm (1 + 4Y)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}Y^2\left(1 \pm (1 + 2Y - 2Y^2 + \dots)\right) = \begin{cases} Y^2(1 + Y - Y^2 + \dots) \\ Y^3(-1 + Y + \dots) \end{cases}$$

trovando quindi due radici $X = \pm Y(1 + Y - Y^2 + \dots)^{1/2}$ in $K[[Y]]$ corrispondenti a due posti \mathfrak{P}_{\pm} di parametrizzazioni $\begin{cases} X = \pm T(1 + T/2 + \dots) \\ Y = T \end{cases}$ (molteplicità 1, classe 1 e tangenti $X \mp Y$ rispettivamente), e altre due radici $X = \pm Y^{3/2}(-1 + Y + \dots)^{1/2}$ in $K[[Y^{1/2}]]$ corrispondenti ad un posto Ω di parametrizzazione $\begin{cases} X = T^3(1 - T/2 + \dots) \\ Y = T^2 \end{cases}$ (molteplicità 2, classe 1 e tangente $X = 0$).

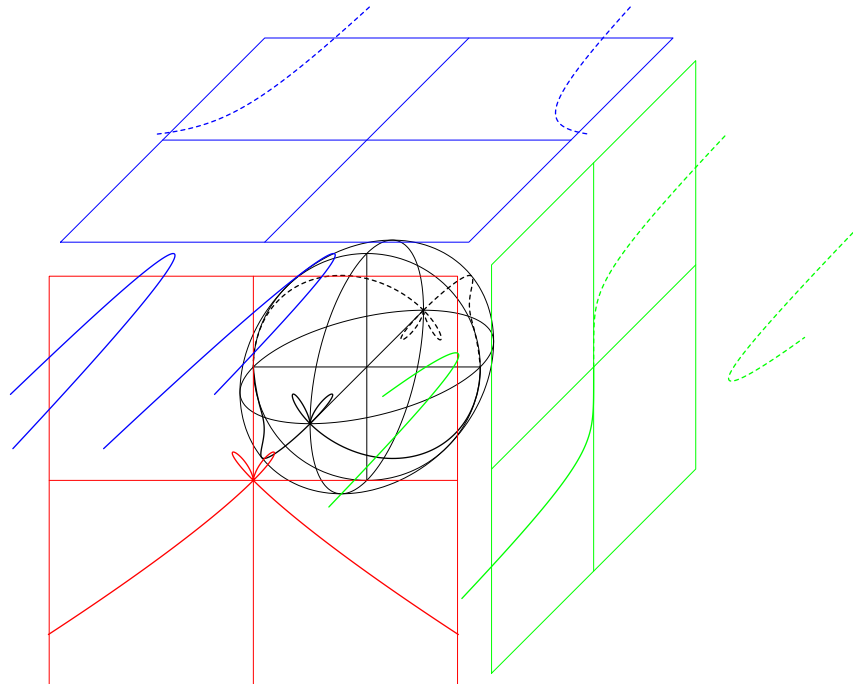
- (6) Consideriamo i tre posti \mathfrak{P}_{\pm} e Ω nell'origine. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}_{\pm}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha \neq \pm\beta \\ 4 & \text{se } \alpha = \pm\beta \end{cases}$ e $m_{\Omega}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 7 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 8 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$.

Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}_{\pm}}(\mathcal{H}) = 10$ e $m_{\Omega}(\mathcal{H}) = 20$.

Si potevano dedurre questi risultati dai conti dei punti in (3) e (4)?

- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti:
 (0) $X^4 - X^2Y^2 - Y^5$ (è la biquadratica in X prima usata per trovare i posti);
 (1) $ZX^4 - ZX^2 - 1 = 0$ dà $Z = \frac{1}{X^4 - X^2} = \frac{1}{X^2(X^2 - 1)}$;
 (2) $Z - ZY^2 - Y^5 = 0$ dà $Z = \frac{Y^5}{1 - Y^2}$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si noti la bella figura nel piano X, Y in rosso che mostra chiaramente i posti nel punto singolare).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 5 e classe 7, possiede un solo punto singolare con tre posti (due lineari ordinari, l'altro cuspidale ordinario), possiede un flesso triplo e 4 punti di flesso semplice. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 7 e classe 5, possiede una tritangente in due punti semplici, l'altro di flesso, possiede 4 cuspidi ordinarie e una di molteplicità 4 e classe 1 (cuspidi tripla ordinaria?).

Usando la formula generalizzata di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $5 = 7 \cdot 6 - 4 \cdot 3 - (16 - 1) - ?$ da cui $? = 10$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare 5 nodi (!), e la curva \mathcal{C} deve possedere 5 bitangenti. Usando la formula generalizzata di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che

2.6. TERZO APPELLO. È data la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^4 - X_1^5 - X_2^5 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^4 = 0 \\ 4X_0X_1^3 - 5X_1^4 = 0 \\ -5X_2^4 = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quadruplo con complesso tangente dato da $X_1^4 = 0$, dunque con una tangente quadrupla (e molteplicità di intersezione 5 con la curva nel punto singolare).

- (2) Il fascio di rette per il punto singolare permette di parametrizzare la curva nel modo seguente:

$$\begin{cases} X_0 = \lambda^5 + \mu^5 \\ X_1 = \lambda^5 \\ X_2 = \lambda^4\mu \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_1^3(4X_0 - 5X_1) - 5\beta X_2^4 = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo $\lambda^{15}(-\alpha\lambda^5 - 5\beta\lambda\mu^4 + 4\alpha\mu^5)$. Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità 15, e in generale altri 5 punti distinti (il polinomio in λ, μ tra parentesi quadrata avrà radici multiple quando $\alpha = 0$ oppure $\alpha^5 + \beta^5 = 0$; è divertente calcolarne il discriminante). Possiamo anche concludere che la classe della curva è 5 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4X_1^3 & 0 \\ 4X_1^3 & 12X_0X_1^2 - 20X_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & -20X_2^3 \end{pmatrix} = 320X_1^6X_2^3$$

(senza quasi conti). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, esclusi eventualmente i punti singolari, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^{42}\mu^3 = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato 42 volte, e il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ contato 3 volte (flesso triplo, cioè con tangente avente molteplicità di intersezione 5 con la curva nel punto di tangenza).

- (5) Come polinomio in Y, X , la curva si scrive $X^4 - X^5 - Y^5$ e chiaramente nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si trova un unico posto \mathfrak{P} , che si ottiene dalle radici di $Y^5 = X^4(X - 1)$ (in $K[[X^{1/5}]]$), di parametrizzazione $\begin{cases} X = T^5 \\ Y = T^4(T^5 - 1)^{1/5} \end{cases}$, molteplicità 4, classe 1, tangente $X = 0$.

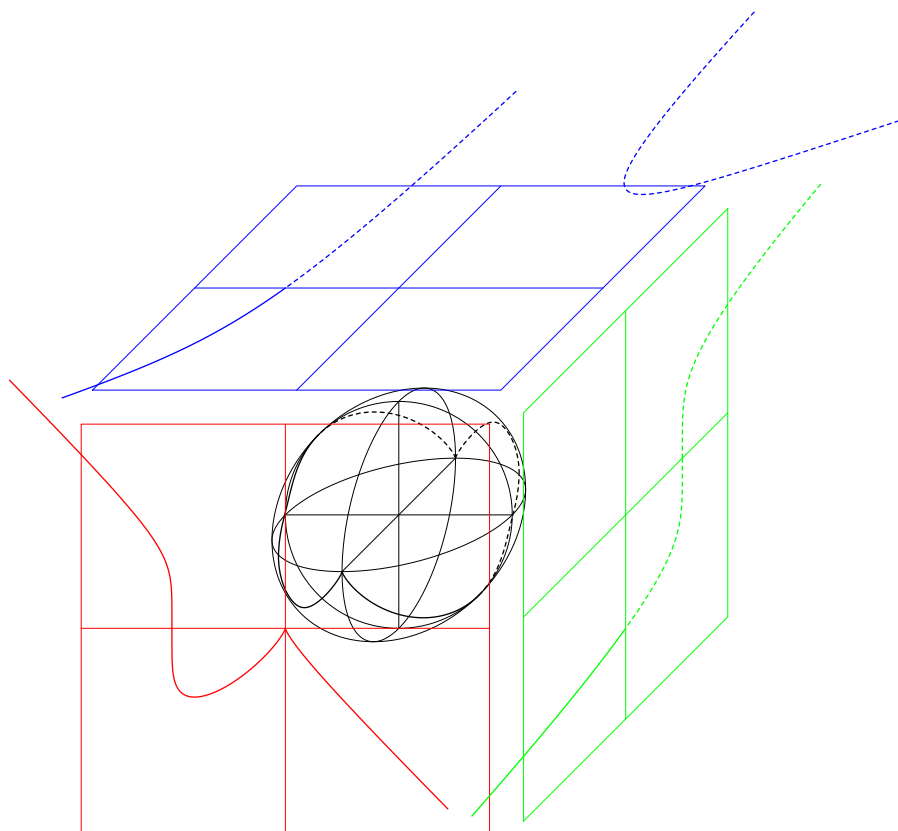
- (6) Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 15 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 16 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$
Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = 42$

- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti, tutte molto facili per capire lo scheletro reale:

- (0) $X^4 - X^5 = Y^5$ (non è proprio ovvio);

- (1) $ZX^4 - X^5 - 1 = 0$ dà $Z = X + \frac{1}{X^4}$;
 (2) $Z - 1 - Y^5 = 0$ dà $Z = 1 + Y^5$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si noti il flesso molto spinto, e l'asintoto nel piano X, Y in rosso).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 5 e classe 5, possiede un punto singolare con un unico posto di molteplicità 4 e classe 1; possiede un flesso che è un posto di molteplicità 1 e classe 4. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* la situazione è esattamente la stessa; dunque non vi sono altre singolarità, né bitangenti (sia per \mathcal{C} che per \mathcal{C}^*).

In effetti, a meno di equivalenza proiettiva, esiste una unica classe di curve quintiche dotate di un cuspidone e di un flessone come la nostra; si può trovare una equazione canonica nella forma $X_0X_1^4 + X_2^5 = 0$. Di conseguenza la nostra curva è autoduale (a meno di proiettività).

Per trovare l'equazione della curva duale bisogna ricorrere alla nozione di risultante, e vi sono due strategie possibili:

- (param) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \lambda^5 + \mu^5 \\ \lambda^5 \\ \lambda^4 \mu \end{pmatrix}$ e ponendo $\lambda = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 1 + \mu^5 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} 1 + \mu^5 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mu^5 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5\mu^4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\mu^5 - 1 \\ -5\mu^4 \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare μ dai sistemi

$$\begin{cases} \xi_0 = 1 \\ \xi_1 = 4\mu^5 - 1 \\ \xi_2 = -5\mu^4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \xi = 4\mu^5 - 1 \\ \eta = -5\mu^4 \end{cases}$$

che si può fare alla mano ottenendo $5^5(\xi + 1)^4 + 4^4\eta^5 = 0$ (equazione proiettiva $5^5\xi_0(\xi_1 +$

$\xi_0)^4 + 4^4 \xi_2^5 = 0$), ovvero tramite $R_\mu(4\mu^5 - 1 - \xi, 5\mu^4 + \eta) = 0$ cioè

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi \\ & -4 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi \\ 5 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 5 & 0 & 0 \\ & & & & 5 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \eta \\ & & & & & \eta \end{vmatrix} = 0 .$$

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1^4 \\ \xi_1 = 4X_0X_1^3 - 5X_1^4 \\ \xi_2 = -5X_2^4 \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

e disomogeneizzando rispetto a ξ_0 e X_1 dobbiamo eliminare Z, Y dal sistema

$$\begin{cases} \xi = 4Z - 5 \\ \eta = -5Y^4 \\ 0 = Z + \xi + Y\eta \end{cases}$$

e sostituendo infine Z nelle prime due equazioni, dobbiamo eliminare Y dal sistema

$$\begin{cases} 4\eta Y + 5\xi + 5 = 0 \\ 5Y^4 + \eta = 0 \end{cases}$$

che si può fare alla mano, oppure con il determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & \eta \\ 4\eta & 5\xi+5 & & & \\ & 4\eta & 5\xi+5 & & \\ & & 4\eta & 5\xi+5 & \\ & & & 4\eta & 5\xi+5 \end{vmatrix} = 0 .$$

ottenendo lo stesso risultato.

2.7. QUARTO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0^2 X_2^3 - X_1^5 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [sugg.: si consideri un opportuno fascio di coniche];
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 2X_0X_2^3 = 0 \\ -5X_1^4 = 0 \\ 3X_0^2X_2^2 = 0 \end{cases}$$

ed è facile vedere che solo i due punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfano al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il primo punto è triplo con complesso tangente dato da $X_2^3 = 0$, dunque con una tangente tripla (e molteplicità di intersezione 5 con la curva nel punto singolare); disomogeneizzando rispetto a X_2 si vede che il secondo punto è doppio con complesso tangente dato da $X_0^2 = 0$, dunque con una tangente doppia (e molteplicità di intersezione 5 con la curva nel punto singolare). I due punti singolari sono cuspidi, entrambe non ordinarie.

- (2) Il fascio di coniche bitangenti nei due punti singolari alle tangenti alla curva ha la proprietà che ogni conica interseca la quintica almeno 5 volte nel punto triplo, e almeno 4 nel punto doppio; rimane un solo ulteriore punto di intersezione, che parametrizza la curva tramite il fascio di coniche.

Il fascio è dato da $\lambda X_0 X_2 + \mu X_1^2$, e intersecandolo con la quintica otteniamo che il punto di intersezione diverso dai punti singolari è

$$\begin{cases} X_0 = \mu^5 \\ X_1 = \lambda^3 \mu^2 \\ X_2 = \lambda^5 \end{cases} .$$

Si noti che il risultato era anche prevedibile alla mano, per esempio osservando che $Y^3 = X^5$ è identicamente risolto per $X = \lambda^3$ e $Y = \lambda^5$, e poi omogeneizzando...

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$2\alpha X_0 X_2^3 + 3\beta X_0^2 X_2^2 = 0 \quad \text{ovvero} \quad X_0 X_2^2 (2\alpha X_2 + 3\beta X_0) = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^{10} \mu^5 (2\alpha \lambda^5 + 3\beta \mu^5) .$$

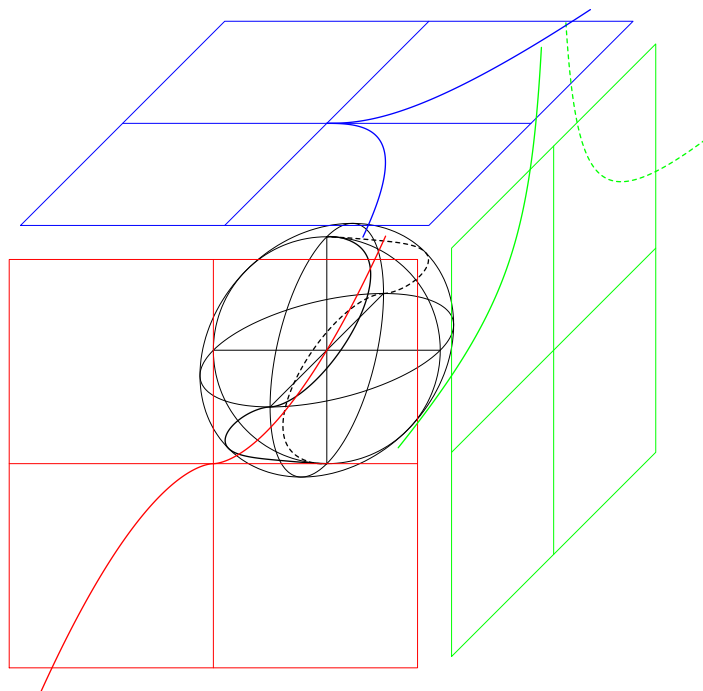
Otteniamo dunque i punti singolari con molteplicità 10 e 5, e in generale altri 5 punti distinti (il polinomio in λ, μ tra parentesi quadrata avrà radici multiple solo per $\alpha\beta = 0$). Possiamo anche concludere che la classe della curva è 5 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 2X_2^3 & 0 & 6X_0X_2^2 \\ 0 & -20X_1^3 & 0 \\ 6X_0X_2^2 & 0 & 6X_0^2X_2 \end{pmatrix} = 480X_0^2X_1^3X_2^4$$

(senza quasi conti). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, esclusi eventualmente i punti singolari, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^{29} \mu^{16} = 0$. Dunque vediamo solo i punti singolari contati 29 e 16 volte, e concludiamo che la curva non presenta flessi.

- (5) Come polinomio in Y, X , la curva si scrive $Y^3 - X^5$ e chiaramente nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si trova un unico posto \mathfrak{P} , di parametrizzazione $\begin{cases} X = T^3 \\ Y = T^5 \end{cases}$, molteplicità 3, classe 2, tangente $Y = 0$.
Come polinomio in Z, X , la curva si scrive $Z^2 - X^5$ e chiaramente nel punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si trova un unico posto \mathfrak{Q} , di parametrizzazione $\begin{cases} X = T^2 \\ Z = T^5 \end{cases}$, molteplicità 2, classe 3, tangente $Z = 0$.
- (6) Consideriamo i due posti \mathfrak{P} e \mathfrak{Q} nei due punti singolari. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 10 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 15 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$ e $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 5 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 10 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$.
Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = 29$ e $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{H}) = 16$.
- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti, tutte molto facili per capire lo scheletro reale:
- (0) $X^3 = Y^5$;
 - (1) $Z^2 X^3 = 1$;
 - (2) $Z^2 = Y^5$;
- e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si noti che un punto singolare non lo sembra proprio: chi è?).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 5 e classe 5, possiede due punti singolari ciascuno con un unico posto: uno di molteplicità 2 e classe 3, l'altro di molteplicità 3 e classe 2. Nessun flesso. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* la situazione è esattamente la stessa; dunque non vi sono altre singolarità, né flessi, né bitangenti (sia per \mathcal{C} che per \mathcal{C}^*).
Si faccia attenzione comunque al fatto che quintiche aventi quella configurazione di punti singolari ne esistono di non proiettivamente equivalenti (una rete?).
Per trovare l'equazione della curva duale bisogna ricorrere alla nozione di risultante, e vi sono due strategie possibili:

(param) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \mu^5 \\ \lambda^3 \mu^2 \\ \lambda^5 \end{pmatrix}$ e ponendo $\mu = 1$ abbiamo che una

parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^3 \\ \lambda^5 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^3 \\ \lambda^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^3 \\ \lambda^5 \end{pmatrix} \times \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5\lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 2\lambda^5 \\ -5\lambda^2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare λ dai sistemi

$$\begin{cases} \xi_0 = 2\lambda^5 \\ \xi_1 = -5\lambda^2 \\ \xi_2 = 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2\lambda^5\xi = -5\lambda^2 \\ 2\lambda^5\eta = 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2\lambda^3\xi + 5 = 0 \\ 2\lambda^5\eta - 3 = 0 \end{cases}$$

che si può fare alla mano ottenendo $2^2 3^3 \xi^5 + 5^5 \eta^3 = 0$ (equazione proiettiva $2^2 3^3 \xi_1^5 + 5^5 \xi_0^2 \xi_2^3 = 0$), ovvero tramite $R_\lambda(2\xi\lambda^3 + 5, 5\eta\lambda^2 + 3\xi) = 0$ cioè

$$\begin{vmatrix} 2\xi & 0 & 0 & 5 \\ 2\xi & 0 & 0 & 5 \\ 5\eta & 0 & 3\xi & \\ & 5\eta & 0 & 3\xi \\ & & 5\eta & 0 & 3\xi \end{vmatrix} = 0.$$

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = 2X_0X_2^3 \\ \xi_1 = -5X_1^4 \\ \xi_2 = 3X_0^2X_2^2 \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

e disomogeneizzando rispetto a ξ_0 e X_1 dobbiamo eliminare Z, Y dal sistema

$$\begin{cases} 2ZY^3\xi = -5 \\ 2Y\eta = 3Z \\ 0 = Z + \xi + Y\eta \end{cases}$$

e sostituendo infine Z nelle prime due equazioni, dobbiamo eliminare Y dal sistema

$$\begin{cases} 2\eta\xi Y^4 + 2\xi^2 Y^3 - 5 = 0 \\ 5\eta Y + 3\xi = 0 \end{cases}$$

che si può fare alla mano, oppure da

$$\begin{vmatrix} 2\eta\xi & 2\xi^2 & 0 & 0 & -5 \\ 5\eta & 3\xi & & & \\ & \eta & 3\xi & & \\ & & \eta & 3\xi & \\ & & & 5\eta & 3\xi \end{vmatrix} = 0$$

ottenendo lo stesso risultato (dalla prima colonna si cancella un η parassita).

2.8. QUINTO APPELLO. È data la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1X_2(4X_1^2 - X_2^2) - X_1^5 - X_2^5 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1X_2(4X_1^2 - X_2^2) = 0 \\ X_0X_2(12X_1^2 - X_2^2) - 5X_1^4 = 0 \\ X_0X_1(4X_1^2 - 3X_2^2) - 5X_1^4 = 0 \end{cases}$$

ed è (noioso ma) facile vedere che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quadruplo con complesso tangente dato da $X_1X_2(4X_1^2 - X_2^2) = 0$, dunque con quattro tangenti distinte, tutte con molteplicità di intersezione massima con la curva nel punto singolare.

- (2) Il fascio di rette per il punto singolare permette di parametrizzare la curva nel modo seguente:

$$\begin{cases} X_0 = \lambda^5 + \mu^5 \\ X_1 = \lambda\mu^2(4\mu^2 - \lambda^2) \\ X_2 = \lambda^2\mu(4\mu^2 - \lambda^2) \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha(X_0X_2(4X_1^2 - X_2^2) - 5X_1^4) + \beta(X_0X_1(4X_1^2 - X_2^2) - 5X_2^4) = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene (dopo un po' di pazienza) una espressione del tipo

$$\lambda^3\mu^3(4\mu^2 - \lambda^2)^3(\alpha\lambda((4\mu^2 - \lambda^2)(\lambda^5 - 4\mu^5) + 8\mu^2(\lambda^5 + \mu^5)) + \beta\mu((4\mu^2 - \lambda^2)(-4\lambda^5 + \mu^5) - 2\lambda^2(\lambda^5 + \mu^5))) = 0 .$$

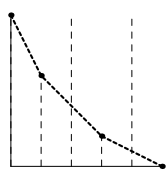
Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità 12, e in generale altri 8 punti distinti (il polinomio in λ, μ tra parentesi quadrata avrà radici multiple quando?). Possiamo anche concludere che la classe della curva è 8 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & X_2(12X_1^2 - X_2^2) & X_1(4X_1^2 - 3X_2^2) \\ X_2(12X_1^2 - X_2^2) & 4X_1(6X_0X_2 - 5X_1^2) & 3X_0(4X_1^2 - X_2^2) \\ X_1(4X_1^2 - 3X_2^2) & 3X_0(4X_1^2 - X_2^2) & -2X_2(3X_0X_1 + 10X_2^2) \end{pmatrix} = 6X_0X_1X_2(12X_1^2 - X_2^2)(4X_1^2 - X_2^2)(4X_1^2 - 3X_2^2) - 4X_1^3(6X_0X_2 - 5X_1^2)(4X_1^2 - 3X_2^2)^2 + 2X_2^3(3X_0X_1 + 10X_2^2)(12X_1^2 - X_2^2)^2$$

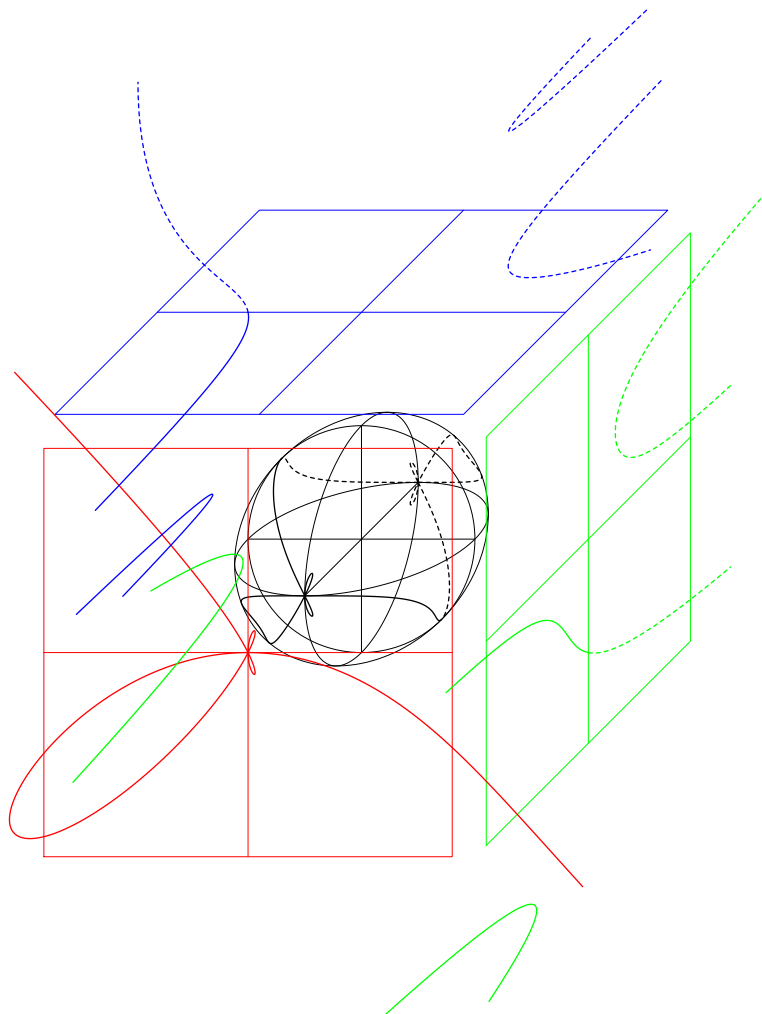
Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, esclusi eventualmente i punti singolari, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione ??????. Dunque vediamo ciascun punto singolare contato 9 volte, e di conseguenza altri 9 punti di flesso.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^5 + XY^3 - 4X^3Y + X^4$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi tre lati, di pendenze e lunghezze rispettivamente -2 e 1 (un fattore irriducibile in $K[[X]]$), -1 e 2 (due fattori irriducibili in $K[[X]]$), $-1/2$, 2 (un fattore irriducibile in $K[[X]]$ dovuto a due radici in $K[[X^{1/2}]]$). La curva presenta dunque in $K[[X]][Y]$ quattro fattori irriducibili, corrispondenti a quattro posti con centro nell'origine (punto singolare). Sono tutti lineari e di classe 1.

- (6) Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono 3 genericamente, e 4 per il caso dei parametri che vedono le tangenti nei posti.
Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono 9 per ciascuno dei quattro posti.
- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti, di cui due molto facili per capire lo scheletro reale:
- (0) $XY(4X^2 - Y^2) - X^5 - Y^5 = 0$ (non è ovvio cosa farne...);
 - (1) $ZY(4 - Y^2) - 1 - Y^5 = 0$ dà $Z = \frac{1+Y^5}{Y(4-Y^2)}$;
 - (2) $ZX(4X^2 - 1) - X^5 - 1 = 0$ dà $Z = \frac{1+X^5}{X(4X^2-1)}$;
- e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si noti il bel fiocco, l'asintoto e il mancato flesso nel piano X, Y in rosso; peraltro negli altri piani affini rappresentati le due asole piccole sono artificialmente attirate vicino alla figura: altrimenti sarebbero fuori foglio).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 5 e classe 8, possiede un solo punto singolare con quattro posti (tutti lineari ordinari), 9 punti di flesso semplice. Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 8 e classe 5, possiede una quadritangente in quattro punti semplici, possiede 9 cuspidi ordinarie.
Usando la formula generalizzata di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $5 = 8 \cdot 7 - 9 \cdot 3 - ?$ da cui $? = 24$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare 12 nodi, e la curva \mathcal{C} deve possedere 12 bitangenti.
Usando la formula generalizzata di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che $8 \cdot 6 \cdot 3 - 8 \cdot 9 - 6 \cdot 12 = 0$ (giusto, perché \mathcal{C} non ha posti cuspidali, quindi non vi sono flessi per la curva duale)
Per trovare l'equazione della curva duale bisogna ricorrere alla nozione di risultante, e vi sono due strategie possibili:

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \lambda^5 + \mu^5 \\ \lambda\mu^2(4\mu^2 - \lambda^2) \\ \lambda^2\mu(4\mu^2 - \lambda^2) \end{pmatrix}$ e ponendo $\mu = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene dai soliti conti?

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1 X_2 (4X_1^2 - X_2^2) \\ \xi_1 = X_0 X_2 (12X_1^2 - X_2^2) - 5X_1^4 \\ \xi_2 = X_0 X_1 (4X_1^2 - 3X_2^2) - 5X_1^4 \\ 0 = X_0 \xi_0 + X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 \end{cases}$$

e disomogeneizzando rispetto a ξ_0 e X_1 dobbiamo eliminare Z, Y dal sistema

$$\begin{cases} Y(4 - Y^2)\xi = ZY(12 - Y^2) - 5 \\ Y(4 - Y^2)\eta = Z(4 - 3Y^2) - 5Y^4 \\ 0 = Z + \xi + Y\eta \end{cases}$$

e sostituendo infine Z nelle prime due equazioni, dobbiamo eliminare Y dal sistema

$$\begin{cases} \eta Y^4 + 2\xi Y^3 - 12\eta Y^2 - 16\xi Y - 5 = 0 \\ 5Y^4 - \eta Y^3 - 3\xi Y^2 + 8\eta Y + 4\xi = 0 \end{cases}$$

che si può fare con il determinante

$$\begin{vmatrix} \eta & 2\xi & -12\eta & -16\xi & -5 \\ \eta & 2\xi & -12\eta & -16\xi & -5 \\ \eta & 2\xi & -12\eta & -16\xi & -5 \\ 5 & -\eta & -3\xi & 8\eta & 4\xi \\ 5 & -\eta & -3\xi & 8\eta & 4\xi \\ 5 & -\eta & -3\xi & 8\eta & 4\xi \end{vmatrix} = 0.$$

3. 2007/8: sestiche razionali (con un punto quintuplo).

3.1. PRIMA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^5 - X_0X_1^3X_2^2 - X_2^6 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare la polare rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tale punto;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^3(X_1^2 - X_2^2) = 0 \\ X_0X_1^2(5X_1^2 - 3X_2^2) = 0 \\ -2X_2(X_0X_1^3 + 3X_2^4) = 0 \end{cases}$$

e si trova l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quintuplo, con complesso tangente dato da $X_1^3(X_1^2 - X_2^2) = 0$, e dunque formato dalla retta $X_1 = 0$ tre volte, e dalle rette $X_1 \pm X_2 = 0$ ciascuna con molteplicità 1. Ciascuna delle tre tangenti al punto singolare ha intersezione d'ordine 6 con la curva in tale punto.

- (2) Poiché è una sestica (irriducibile: si ragioni sul fatto che è di primo grado in X_0) si tratta di una curva razionale. I punti della curva si rappresentano tramite le parametrizzazioni affini e proiettiva seguenti:

$$\begin{cases} X = \frac{1-t^2}{t^6} \\ Y = \frac{1-t^2}{t^5} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X_0 = \beta^6 \\ X_1 = \alpha^4(\alpha^2 - \beta^2) \\ X_2 = \alpha^3\beta(\alpha^2 - \beta^2) \end{cases}.$$

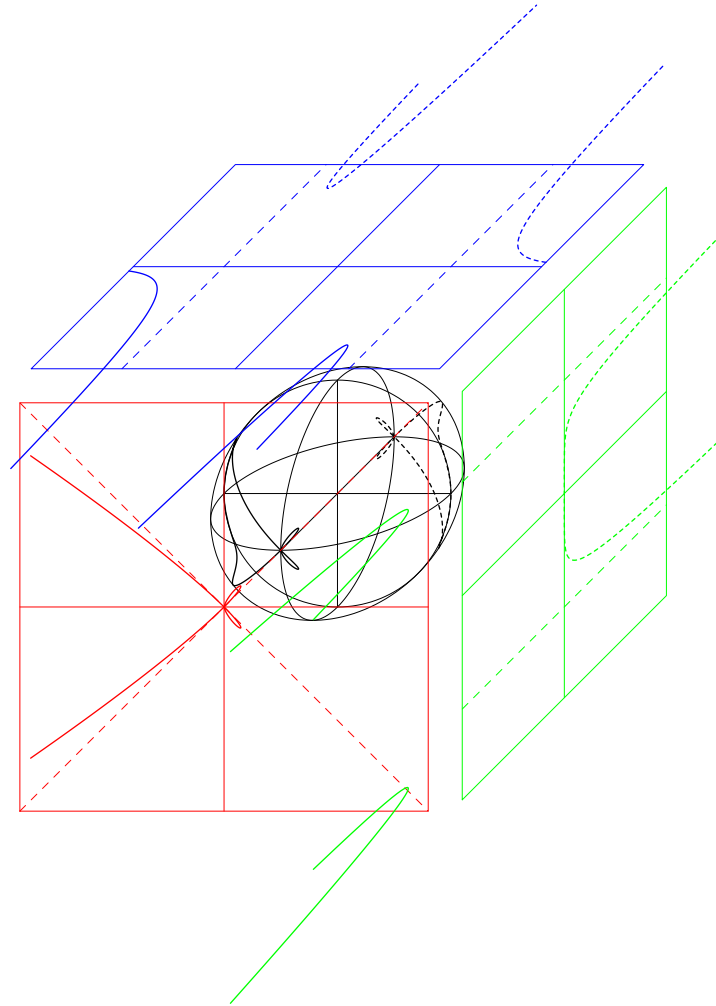
- (3) La polare richiesta ha equazione $X_0X_1^2(5X_1^2 - 3X_2^2) - 2X_2(X_0X_1^3 + 3X_2^4) = 0$. Sostituendo la parametrizzazione della curva nella polare troviamo l'equazione $\alpha^{14}\beta^5(\alpha^2 - \beta^2)^4(\alpha - \beta)(6\alpha^2 + 11\alpha\beta + 3\beta^2) = 0$, da cui si riconosce 23 volte il punto singolare, 5 volte il punto corrispondente a $\beta = 0$, e ulteriori due punti reali. Insieme vi sono quindi quattro tangenti: due semplici, una quintupla, e una delle tangenti nell'origine; non è chiaro con che molteplicità contare quest'ultima (se non confrontando con una polare generica, e allora si vede che è 1), né da questi dati dedurre la classe della curva (che comunque risulta 8).
- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 0 & X_1^2(5X_1^2 - 3X_2^2) & -2X_1^3X_2 \\ X_1^2(5X_1^2 - 3X_2^2) & 2X_0X_1(10X_1^2 - 3X_2^2) & -6X_0X_1^2X_2 \\ -2X_1^3X_2 & -6X_0X_1^2X_2 & -2(X_0X_1^3 + 15X_2^4) \end{pmatrix} = \\ & = X_1^4 \det \begin{pmatrix} 0 & (5X_1^2 - 3X_2^2) & -2X_1X_2 \\ (5X_1^2 - 3X_2^2) & 2X_0X_1(-5X_1^2 + 6X_2^2) & 0 \\ -2X_1X_2 & 0 & -2(X_0X_1^3 + 15X_2^4) \end{pmatrix} = \\ & = 2X_1^4(4X_0X_1^3X_2^2(5X_1^2 - 6X_2^2) + (X_0X_1^3 + 15X_2^4)(5X_1^2 - 3X_2^2)^2). \end{aligned}$$

Procediamo sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\alpha^{32}\beta^4(\alpha^2 - \beta^2)^{12}(75\alpha^4 + 50\alpha^2\beta^2 + 36\beta^4) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato 56 volte, un punto (corrispondente a $\beta = 0$) contato quattro volte, e altri quattro punti distinti (nessuno reale). Insieme sono cinque punti, diventano 8 se contati con le molteplicità di intersezione.

- (5) Vediamo le disomogeneizzazioni standard:
 - (0) l'espressione $X^5 - X^3Y^2 - Y^6 = 0$ è complicata (ma simmetrica in Y);
 - (1) l'espressione $Z(X^5 - X^3) - 1 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = \frac{1}{X^3(1-X^2)}$;
 - (2) l'espressione $Z(1 - Y^2) - Y^6 = 0$ è lineare in Z e si esplicita $Z = \frac{Y^6}{1-Y^2}$;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura (nel piano (X, Y) , in rosso, si nota la struttura del punto singolare; negli altri piani le asole piccole sono attirate artificialmente verso la figura: in realtà sono molto più distanti):



3.2. SECONDA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^5 - X_0X_1^3X_2^2 - X_2^6 = 0$ (si ricordi dalla “prima prova” che è razionale e $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta^4(\beta^2 - \alpha^2) \\ \alpha\beta^3(\beta^2 - \alpha^2) \end{pmatrix}$ ne è una parametrizzazione);

- (1) se ne determini la polare rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e si classifichi proiettivamente tale quintica;
- (2) usando il risultante rispetto a X_2 delle due curve nel riferimento dato, determinarne i punti di intersezione e le relative molteplicità;
- (3) verificare se possibile i risultati precedenti mediante l'uso di parametrizzazioni;
- (4) si consideri ora il fascio di quintiche formato dalle polari della curva data rispetto ai punti della retta di equazione $X_0 = 0$; determinare il ciclo base di tale fascio (cioè i punti, con molteplicità, per cui passano tutte le quintiche del fascio); le curve del fascio hanno sempre componenti razionali?

Soluzione.

- (1) La polare richiesta ha equazione $X_2(X_0X_1^3 + 3X_2^4) = 0$; si tratta di una curva riducibile, formata da una retta e una quartica avente un unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è triplo con una unica tangente $X_1 = 0$: essendo irriducibile si tratta quindi di una curva razionale con parametrizzazione $\begin{pmatrix} -3\beta^4 \\ \alpha^4 \\ \alpha^3\beta \end{pmatrix}$; ha un unico flesso in $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, con tangente la retta impropria...

(2) Il risultante richiesto è dato da:

$$\begin{aligned}
 & R_{X_2}(X_2(X_0X_1^3 + 3X_2^4), X_0X_1^5 - X_0X_1^3X_2^2 - X_2^6) = \\
 & R_{X_2}(X_2, X_0X_1^5 - X_0X_1^3X_2^2 - X_2^6) R_{X_2}(X_0X_1^3 + 3X_2^4, X_0X_1^5 - X_0X_1^3X_2^2 - X_2^6) = \\
 & \stackrel{\times}{=} X_0X_1^5 R_{X_2}(X_0X_1^3 + 3X_2^4, 3X_0X_1^5 - 2X_0X_1^3X_2^2) = \\
 & = X_0X_1^5 R_{X_2}(X_0X_1^3 + 3X_2^4, X_0X_1^3(3X_1^2 - 2X_2^2)) = \\
 & = X_0X_1^5 R_{X_2}(X_0X_1^3 + 3X_2^4, X_0X_1^3) R_{X_2}(X_0X_1^3 + 3X_2^4, 3X_1^2 - 2X_2^2) = \\
 & \stackrel{\times}{=} X_0X_1^5(X_0X_1^3)^4(4X_0X_1^3 + 3(3X_1^2)^2)^2 = \\
 & = X_0^5X_1^{23}(4X_0 + 27X_1)^2
 \end{aligned}$$

ove nel secondo e nel penultimo passaggio si sono usate sostituzioni (e il simbolo $\stackrel{\times}{=}$ significa “uguale a meno di invertibili”). Da questo si ricava che l’intersezione è formata dal punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di molteplicità 23 (corrisponde a $X_1^{23} = 0$), dal punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di molteplicità 5 (corrisponde a $X_0^5 = 0$), e da due punti distinti, ciascuno di molteplicità uno, corrispondenti alla radice del fattore $(4X_0 + 27X_1)^2$, poiché sulla retta di quell’equazione le due curve hanno in comune i punti di coordinate $\begin{pmatrix} 27 \\ -4 \\ \pm 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Giustamente, in totale sono $23 + 5 + 2 = 30 = 5 \cdot 6$ punti.

(3) Sostituire la parametrizzazione della quintica nella polare: si ottiene in tal caso l’equazione

$$\alpha^5\beta^{15}(\beta^2 - \alpha^2)^4(3\beta^2 - 2\alpha^2) = 0,$$

che riporta gli stessi risultati ($\beta = 0$ e $\beta^2 - \alpha^2 = 0$ danno lo stesso punto). Si poteva anche procedere con le parametrizzazioni delle componenti della polare.

(4) Il fascio richiesto è dato dalle quartiche di equazioni

$$\lambda X_0X_1^2(5X_1^2 - 3X_2^2) + \mu X_2(X_0X_1^3 + 3X_2^4) = 0$$

al variare dei parametri λ, μ non entrambi nulli. Per trovare il ciclo base, è sufficiente intersecare due qualsiasi curve del fascio, per esempio le due riducibili che abbiamo a disposizione. Per intersecare le due curve possiamo ricorrere al risultante rispetto a X_2 , ottenendo:

$$\begin{aligned}
 & R_{X_2}(X_2(X_0X_1^3 + 3X_2^4), X_0X_1^2(5X_1^2 - 3X_2^2)) = \\
 & = R_{X_2}(X_2, X_0X_1^2) R_{X_2}(X_2, 5X_1^2 - 3X_2^2) R_{X_2}(X_0X_1^3 + 3X_2^4, X_0X_1^2) R_{X_2}(X_0X_1^3 + 3X_2^4, 5X_1^2 - 3X_2^2) = \\
 & \stackrel{\times}{=} (X_0X_1^2)^2 (5X_1^2)^2 (X_0X_1^2)^4 (3X_0X_1^3 + 25X_1^4)^2 = \\
 & = X_0^5X_1^{18}(3X_0 + 25X_1)^2,
 \end{aligned}$$

da cui si ricava il punto origine (da $X_1 = 0$) con molteplicità 18, il punto improprio delle ascisse (da $X_0 = 0$) con molteplicità 5, e due ulteriori punti ciascuno di molteplicità 1 poiché per il fattore $3X_0 + 25X_1$ le due curve si intersecano nei punti $\begin{pmatrix} 25 \\ -3 \\ \pm\sqrt{15} \end{pmatrix}$. In totale quindi 25 punti di intersezione.

Forse era ancora più semplice osservare che una delle due generatrici del fascio si spezza in rette, ed intersecare ogni retta con l’altra generatrice...

(4’) Chiaramente l’origine affine usuale è punto quadruplo per tutte le curve del fascio; sono perciò razionali o riducibili aventi come componenti rette e una ulteriore curva razionale. Quali sono le curve riducibili del fascio? Scrivendo il fascio nella forma

$$X_0X_1^2(5\lambda X_1^2 + \mu X_1X_2 - 3\lambda X_2^2) + 3\mu X_2^5$$

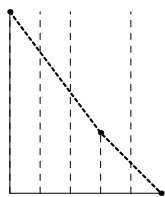
si vede che non possono esserci prodotti di coniche e cubiche irriducibili (guardando i possibili complessi tangenti nel punto singolare) e che le curve contengono rette per l’origine solo per $\mu = 0$ oppure $\lambda = 0$. Quindi il fascio contiene solo due curve riducibili, che sono proprio le due generatrici scelte. Si poteva capire anche in modo più elementare?

3.3. TERZA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^5 - X_0X_1^3X_2^2 - X_2^6 = 0$.

- (1) Si determinino i posti della curva di centro nell'origine affine usuale;
- (2) Si determini la polare della curva rispetto al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e, utilizzando i risultati del punto precedente, si determini la molteplicità di intersezione nell'origine della curva data con questa polare; è possibile dedurne quanto vale la classe della curva?
- (3) Tenendo presente i risultati ottenuti sulla curva data, che cosa si può dire della curva duale (numero e tipo di singolarità, numero di flessi e multitangenti)? Se il tempo lo permette, si determini l'equazione della curva duale.

Soluzione.

- (1) Come polinomio in X , la curva si scrive $X^5 - Y^2X^3 - Y^6$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi due lati, uno di pendenza $-4/3$ e lunghezza 3 (tre radici in $K[[Y^{1/3}]]$ che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[Y]]$), e l'altro di pendenza $-2/2 = -1$ e lunghezza 2 (tre radici in $K[[Y]]$, che danno luogo ad altrettanti fattori irriducibili in $K[[Y]]$ per la curva data). La curva presenta dunque in $K[[Y]][X]$ tre fattori irriducibili, corrispondenti a tre posti con centro nell'origine (punto singolare).

- (a) Le radici di ordine $4/3$ sono della forma $X = cY^{4/3} + \dots$ dove c risolve $c^3 + 1 = 0$. Questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X = -T^4 + \dots \\ Y = T^3 \end{cases}$, e dunque molteplicità 3, classe 1 e tangente $Y = 0$.
- (b) Le radici di ordine 1 sono della forma $X = \pm Y + Y^2/2 + \dots$ e questo basta per dire che i rami \mathfrak{Q}_{\pm} corrispondenti hanno parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X = \pm T + T^2/2 + \dots \\ Y = T \end{cases}$, e dunque molteplicità 1, classe 1 e tangente $X \mp Y = 0$. (la simmetria in Y poteva aiutare?)

Studiare il poligono come polinomio rispetto a Y portava ovviamente agli stessi risultati, ma con qualche sgradevolezza sulla parametrizzazione del posto pesante (non normalizzata e con coefficienti non reali!); in compenso si poteva sfruttare la biquadraticità in Y per gli altri due posti.

- (2) La polare \mathcal{D} richiesta ha equazione $(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y})(Y^6 + X^3Y^2 - X^5) = 3X^2Y^2 - 5X^4 + 6Y^5 + 2X^3Y$ e possiamo calcolare la molteplicità di intersezione con la curva nell'origine O sommando i tre contributi dati dai due posti: che risultano 14, 5 e 4 rispettivamente per \mathfrak{P} , \mathfrak{Q}_{\pm} , totale 23.

Poiché la retta $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è tangente alla curva nell'origine, non possiamo usare questo calcolo per dedurre la classe della curva: la polare non è generica per uno dei posti. Peraltro, non è difficile capire che i due posti \mathfrak{Q}_{\pm} hanno contributo generico 4 alle polari, e quindi la classe risulta $30 - 22 = 8$.

- (3) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:
 - (1) ha grado 6 e classe 8;
 - (2) ha esattamente 4 flessi semplici, posti di tipo $(1, 2)$ e un flessone quadruplo, posto di tipo $(1, 5)$;
 - (3) ha un solo punto singolare che presenta tre rami (con tangenti distinte): due di molteplicità 1 e classe 1, il terzo di molteplicità 3 e classe 1;
 - (4) dallo scheletro reale vediamo almeno tre bitangenti reali;

Da questo possiamo dedurre che la curva duale \mathcal{C}^* :

- (1) ha grado 8 e classe 6;
- (2) ha esattamente 4 cuspidi semplici e una cuspidi quadrupla (un posto di tipo $(5, 1)$);
- (3) ha una tritangente, in due punti semplici e uno di flesso doppio;
- (4) possiede almeno tre nodi (punti doppi ordinari).

Le eventuali altre singolarità di \mathcal{C}^* possono essere punti doppi ordinari, oppure punti tripli non ordinari con due tangenti distinte oppure punti tripli ordinari (altre più grandi singolarità sono escluse dalla presenza di un punto quintuplo nella curva duale...); una puntuale disanima delle possibilità per \mathcal{C} (tritangenti in punti semplici, oppure bitangenti in punti di flesso) tenendo conto della simmetria e del coniugio complesso, escludono i punti tripli – che darebbero contributi troppo alti alle formule di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* .

3.4. PRIMO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^5 - 2X_0X_1^3X_2^2 + X_0X_1X_2^4 - X_2^6 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1(X_1^2 - X_2^2)^2 = 0 \\ X_0(X_1^2 - X_2^2)(5X_1^2 - X_2^2) = 0 \\ -2X_2(2X_0X_1(X_1^2 - X_2^2) + 3X_2^4) = 0 \end{cases}$$

e si vede che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quintuplo con complesso tangente dato da $X(X^2 - Y^2)^2 = 0$, dunque con tre tangenti distinte (due di molteplicità 2); tutte le tangenti hanno molteplicità di intersezione 6 con la curva nel punto singolare.

- (2) Poiché è una sestica (irriducibile) con un punto quintuplo, si tratta di una curva razionale. Il fascio di rette per l'origine permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X = \frac{(1-\lambda^2)^2}{\lambda^6} \\ Y = \frac{(1-\lambda^2)^2}{\lambda^5} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \lambda^6 \\ X_1 = \mu^2(\mu^2 - \lambda^2)^2 \\ X_2 = \lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)^2 \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha X_0(X_1^2 - X_2^2)(5X_1^2 - X_2^2) - 2\beta X_2(2X_0X_1(X_1^2 - X_2^2) + 3X_2^4) = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^5 \mu^4 (\mu^2 - \lambda^2)^9 [\alpha \lambda (5\mu^2 - \lambda^2) - 2\beta \mu (3\mu^2 - \lambda^2)] = 0 .$$

Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità $4 + 18 = 22$, il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 5 e in generale altri 3 punti distinti. Possiamo anche concludere che la classe della curva è 8 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

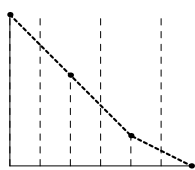
$$\det \begin{pmatrix} 0 & (X_1^2 - X_2^2)(5X_1^2 - X_2^2) & -4X_1X_2(X_1^2 - X_2^2) \\ (X_1^2 - X_2^2)(5X_1^2 - X_2^2) & 4X_0X_1(5X_1^2 - 3X_2^2) & -4X_0X_2(3X_1^2 - X_2^2) \\ -4X_1X_2(X_1^2 - X_2^2) & -4X_0X_2(3X_1^2 - X_2^2) & -2(2X_0X_1^3 - 6X_0X_1X_2^2 + 15X_2^4) \end{pmatrix} =$$

$$(X_1^2 - X_2^2)^2 \left(32X_0X_1X_2^2(5X_1^2 - X_2^2)(3X_1^2 - X_2^2) - 64X_0X_1^3X_2^2(5X_1^2 - X_2^2) \right.$$

$$\left. + 2(2X_0X_1^3 - 6X_0X_1X_2^2 + 15X_2^4)(5X_1^2 - X_2^2)^2 \right)$$

(abbiamo solo raccolto i fattori evidenti). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso eventualmente il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione (questo richiede qualche conto) $\lambda^4 \mu^{12} (\mu^2 - \lambda^2)^2 6(2\lambda^2(\lambda^2 - 5\mu^2) + 3(5\mu^2 - \lambda^2)^2) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato $12 + 52 = 64$ volte, il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ contato 4 volte (è l'unico punto della curva sulla retta $X_0 = 0$...) e 4 punti distinti di flesso semplice identificati dagli zeri dell'ultimo fattore.

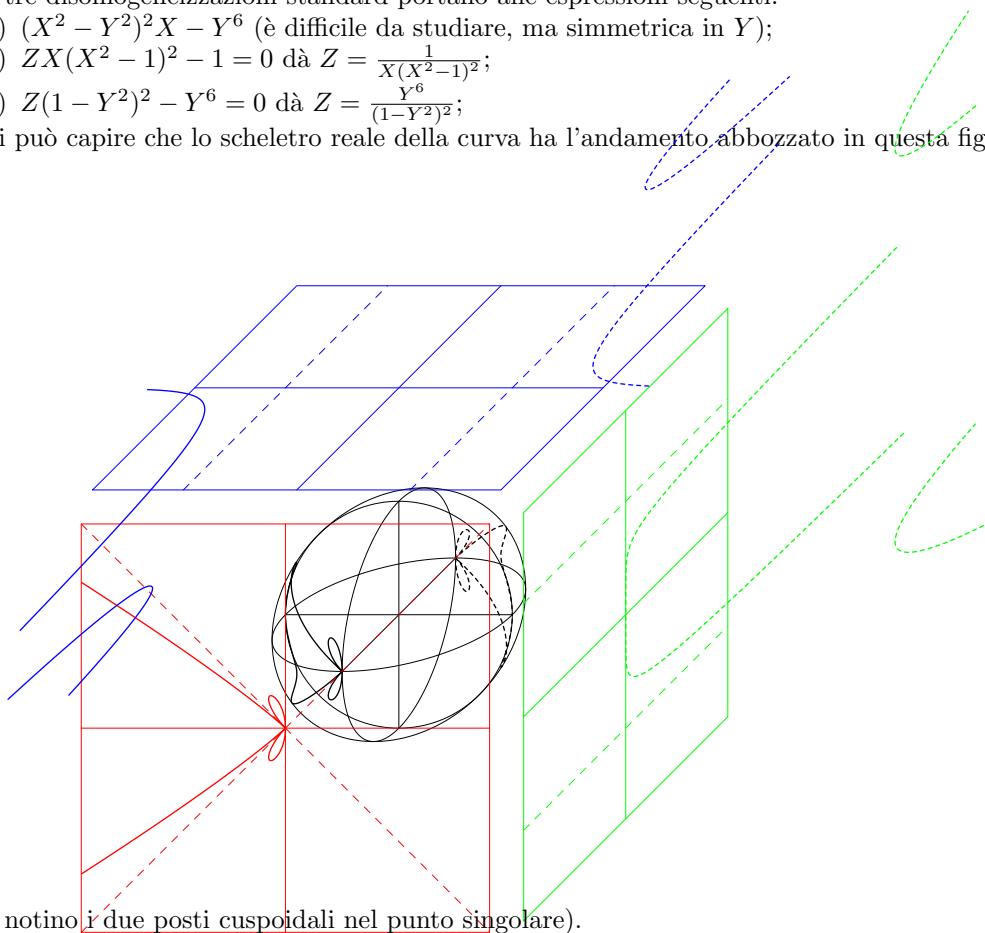
- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^6 - XY^4 + 2X^3Y^2 - X^5 = Y^6 - X(X^2 - Y^2)^2$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi due lati, uno di pendenza -1 e lunghezza 4 (due o quattro fattori irriducibili in $K[[X]][Y]$?), e l'altro di pendenza $-1/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[X^{1/2}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$ per la curva data). Vedremo ora che la curva presenta in $K[[X]][Y]$ tre fattori irriducibili, corrispondenti a tre posti con centro nell'origine (punto singolare).

- (a) Le radici di ordine $1/2$ sono del tipo $Y = \pm X^{1/2} + \dots$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=T+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 1, classe 1 e tangente $X = 0$.
 - (b) Le radici di ordine 1 sono della forma $Y = cX + \dots$ dove c risolve l'equazione $(c^2 - 1)^2 = 0$ che ha soluzioni multiple (!) e quindi bisogna vedere come continua lo sviluppo; il poligono di Newton secondario (quello di $f_1(X, Y_1) = f(X, X(\pm 1 + Y_1))$ rispetto a Y_1) comincia con un lato di lunghezza 2 e pendenza $-1/2$, e quindi lo sviluppo continua con $Y = \pm X + dX^{3/2} + \dots$ (con $d = \pm 1/2$) e questo basta per dire che vi sono due posti Ω_{\pm} corrispondenti (alle quattro radici di ordine 1) e che hanno parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=\pm T^2+dT^3+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $X \mp Y = 0$.
- (6) Consideriamo i tre posti \mathfrak{P} e Ω_{\pm} nell'origine. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 4 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 5 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$ e $m_{\Omega_{\pm}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 9 & \text{se } \alpha \mp \beta \neq 0 \\ 10 & \text{se } \alpha \mp \beta = 0 \end{cases}$.
- Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = 12$ e $m_{\Omega_{\pm}}(\mathcal{H}) = 26$.
- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti:
- (0) $(X^2 - Y^2)^2 X - Y^6$ (è difficile da studiare, ma simmetrica in Y);
 - (1) $ZX(X^2 - 1)^2 - 1 = 0$ dà $Z = \frac{1}{X(X^2-1)^2}$;
 - (2) $Z(1 - Y^2)^2 - Y^6 = 0$ dà $Z = \frac{Y^6}{(1-Y^2)^2}$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si notino i due posti cuspidali nel punto singolare).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 6 e classe 8, possiede un solo punto singolare con tre posti (uno lineare ordinario, gli altri cuspidali doppi ordinari), possiede 4 punti di flesso semplice e un flesso quadruplo; inoltre ha almeno 3 bitangenti reali. Di

conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 8 e classe 6, possiede una tritangente in tre punti di cui uno semplice, gli altri di flesso, possiede 4 cuspidi ordinarie, e una cuspidi quintupla ordinaria; inoltre possiede almeno 3 nodi.

Usando la formula di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $6 = 8 \cdot 7 - 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 24 - ?$ da cui $? = 8$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare altre singolarità, che uno studio accurato può dimostrare essere 4 ulteriori nodi. Quindi la curva \mathcal{C} deve possedere altre 4 bitangenti. Usando la formula di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che $8 \cdot 6 \cdot 3 - 6 \cdot 7 - 8 \cdot 4 - 68 = 2$ (giusto, perché si tratta di due dei tre punti di tritangenza, duali dei posti cuspidali doppi di \mathcal{C}).

Per trovare l'equazione della curva duale proviamo le due strategie usuali:

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \lambda^6 \\ \mu^2(\mu^2 - \lambda^2)^2 \\ \lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)^2 \end{pmatrix}$ e ponendo $\lambda = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mu^2(\mu^2 - 1)^2 \\ \mu(\mu^2 - 1)^2 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^2(\mu^2 - 1)^2 \\ \mu(\mu^2 - 1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^2(\mu^2 - 1)^2 \\ \mu(\mu^2 - 1)^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu(\mu^2 - 1)(3\mu^2 - 1) \\ (\mu^2 - 1)(5\mu^2 - 1) \end{pmatrix} = (\mu^2 - 1) \begin{pmatrix} -\mu^2(\mu^2 - 1)^3 \\ -(5\mu^2 - 1) \\ 2\mu(3\mu^2 - 1) \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare μ dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = -\mu^2(\mu^2 - 1)^3 \\ \xi_1 = -(5\mu^2 - 1) \\ \xi_2 = 2\mu(3\mu^2 - 1) \end{cases} .$$

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1(X_1^2 - X_2^2)^2 \\ \xi_1 = X_0(X_1^2 - X_2^2)(5X_1^2 - X_2^2) \\ \xi_2 = -2X_2(2X_0X_1(X_1^2 - X_2^2) + 3X_2^4) \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

e disomogeneizzando rispetto a ξ_0 e X_2 dobbiamo eliminare Z, X dal sistema

$$\begin{cases} X(X^2 - 1)\xi = Z(5X^2 - 1) \\ X(X^2 - 1)^2\eta = -2(2ZX(X^2 - 1) + 3) \\ 0 = Z + X\xi + \eta \end{cases}$$

e sostituendo infine Z nelle prime due equazioni, dobbiamo eliminare X dal sistema ...

3.5. SECONDO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1^2X_2^3 - X_1^6 - X_2^6 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singularità, flessi, multitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^2X_2^3 = 0 \\ 2X_1(X_0X_2^2 - 3X_1^4) = 0 \\ 3X_2^2(X_0X_1^2 - 2X_2^3) = 0 \end{cases}$$

e si vede che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quintuplo con complesso tangente dato da $X_1^2X_2^3 = 0$, dunque con due tangenti distinte (di molteplicità 2 e 3 rispettivamente); tutte le tangenti hanno molteplicità di intersezione 6 con la curva nel punto singolare.

- (2) Poiché è una sestica (irriducibile) con un punto quintuplo, si tratta di una curva razionale. Il fascio di rette per l'origine permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X = \frac{\lambda^3}{1+\lambda^6} \\ Y = \frac{\lambda^4}{1+\lambda^6} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^6 + \lambda^6 \\ X_1 = \mu^3\lambda^3 \\ X_2 = \mu^2\lambda^4 \end{cases}.$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$2\alpha X_1(X_0X_2^2 - 3X_1^4) + 3\beta X_2^2(X_0X_1^2 - 2X_2^3) = 0.$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^{14}\mu^9[2\alpha\lambda(\lambda^6 - 2\mu^6) + 3\beta\mu(\mu^6 - \lambda^6)] = 0.$$

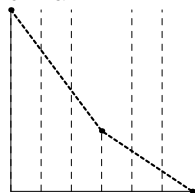
Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità $14 + 9 = 23$, e in generale altri 7 punti distinti. Possiamo anche concludere che la classe della curva è 7 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2X_1X_2^3 & 3X_1^2X_2^2 \\ 2X_1X_2^3 & 2(X_0X_2^3 - 15X_1^4) & 6X_0X_1X_2^2 \\ 3X_1^2X_2^2 & 6X_0X_1X_2^2 & 6X_2(X_0X_1^2 - 5X_2^3) \end{pmatrix} = 30(X_1X_2^2)^2(9X_1^6 + X_0X_1^2X_2^3 + 4X_2^6)$$

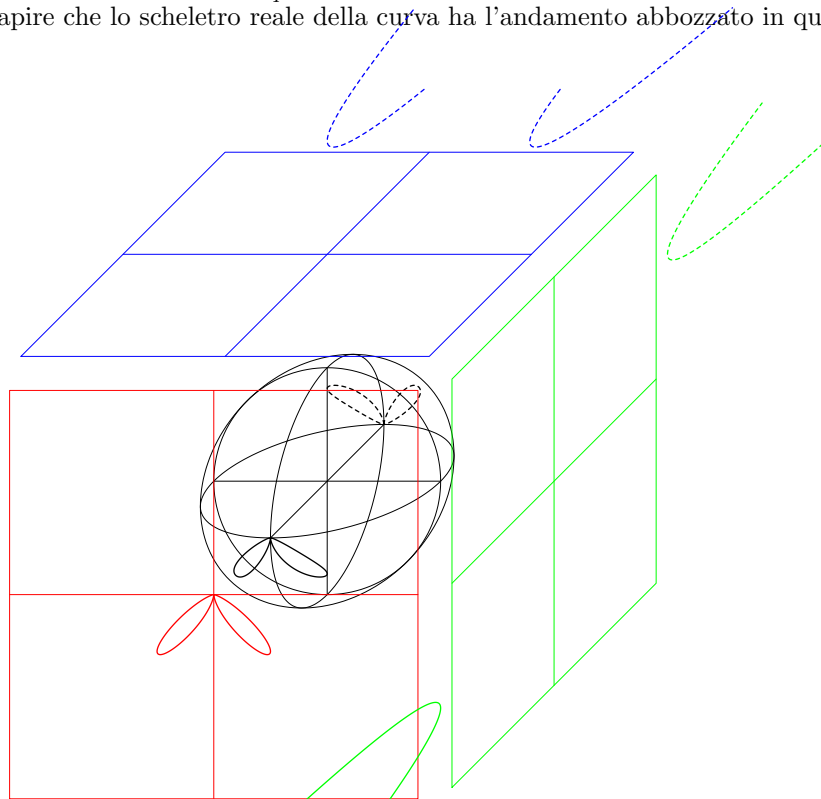
(abbiamo raccolto i fattori evidenti, e usato qualche operazione elementare). Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso eventualmente il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^{40}\mu^{26}(2\mu^6 + \lambda^6) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato $40 + 26 = 66$ volte, e 6 punti distinti (nessuno reale) di flesso semplice identificati dagli zeri dell'ultimo fattore.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^6 - X^2Y^3 + X^6$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi due lati, uno di pendenza $-4/3$ e lunghezza 3 (tre radici in $K[[X^{1/3}]]$, un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$), e l'altro di pendenza $-2/3$ e lunghezza 3 (tre radici in $K[[X^{1/3}]]$, che danno luogo ad un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$ per la curva data).

- (a) Le radici di ordine $4/3$ sono del tipo $Y = cX^{4/3} + \dots$, con $c^3 = 1$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^3 \\ Y=T^4+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 3, classe 1 e tangente $Y = 0$.
- (b) Le radici di ordine $2/3$ sono della forma $Y = cX^{2/3} + \dots$ dove c risolve l'equazione $c^3 = 1$, e questo basta per dire che il posto \mathfrak{Q} corrispondente ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^3 \\ Y=T^2+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $X = 0$.
- (6) Consideriamo i due posti \mathfrak{P} e \mathfrak{Q} nell'origine. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 14 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 15 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$ e $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 9 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 10 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$.
Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = 40$ e $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{H}) = 26$.
- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti:
- (0) $X^2Y^3 - X^6 - Y^6$ (è sofisticata da studiare, ma simmetrica in X , e presenta una simmetria complessa in Y : sostituire Y con ηY , $\eta^3 = 1$, non cambia la curva...);
 - (1) $ZX^2 - X^6 - 1 = 0$ dà $Z = \frac{1+X^6}{X^2}$;
 - (2) $ZY^3 - 1 - Y^6 = 0$ dà $Z = \frac{1+Y^6}{Y^3}$;
- e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



- (si notino i due posti cuspidali nel punto singolare: perché uno si vede poco?).
- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 6 e classe 7, possiede un solo punto singolare con due posti (cuspidali ordinari di molteplicità 2 e 3), possiede 6 punti di flesso semplice; inoltre ha almeno 3 bitangenti (una reale, e le sue trasformate per la simmetria in Y). Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 7 e classe 6, possiede una bitangente in due punti di flesso, possiede 6 cuspidi ordinarie; inoltre possiede almeno 3 nodi. Usando la formula di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $6 = 7 \cdot 6 - 6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - ?$ da cui $? = 12$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare altre singolarità. Eventuali (due) punti tripli ordinari di \mathcal{C}^* devono corrispondere a (due) tritangenti di \mathcal{C} , che a causa della simmetria complessa in Y devono essere (se esistono) della forma $X = k$; intersecando \mathcal{C} con queste rette troviamo delle equazioni bicubiche $Y^6 - k^2Y^3 + k^6 = 0$ che presentano soluzioni multiple per $k^4(1 - 4k^2) = 0$; quindi i valori $k = \pm 1/2$ identificano effettivamente tritangenti di \mathcal{C} . Quindi \mathcal{C}^* ha due punti tripli (reali, ma

lo scheletro reale non mostrerà che una tangente...) e non vi possono essere ulteriori singolarità. Usando la formula di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che $7 \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 8 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 18 = 3$ (giusto, perché si tratta dei due punti di bitangenza, duali dei posti cuspidali, uno doppio, di \mathcal{C}).

Per trovare l'equazione della curva duale proviamo le due strategie usuali:

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \mu^6 + \lambda^6 \\ \mu^3 \lambda^3 \\ \mu^2 \lambda^4 \end{pmatrix}$ e ponendo $\lambda = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^3 \\ \mu^2 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^3 \\ \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^3 \\ \mu^2 \end{pmatrix} \times \mu \begin{pmatrix} 6\mu^4 \\ 3\mu^3 \\ 2\mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -\mu^3 \\ 2(2\mu^6 - 1) \\ 3\mu(-\mu^6 + 1) \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare μ dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = -\mu^3 \\ \xi_1 = 2(2\mu^6 - 1) \\ \xi_2 = 3\mu(-\mu^6 + 1) \end{cases} .$$

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1^2 X_2^3 \\ \xi_1 = 2X_1(X_0 X_2^2 - 3X_1^4) \\ \xi_2 = 3X_2^2(X_0 X_1^2 - 2X_2^3) \\ 0 = X_0 \xi_0 + X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 \end{cases}$$

In ciascuno dei due casi si arriva ad annullare un determinante della forma

$$\begin{vmatrix} 3\xi & 4\eta & 0 & 6 \\ 3\xi & 4\eta & 0 & 6 \\ & 3\xi & 4\eta & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 3\xi & 2\eta \\ & 6 & 0 & 0 & 3\xi & 2\eta \\ & & 6 & 0 & 0 & 3\xi & 2\eta \end{vmatrix}$$

che dà una equazione di grado 7, come atteso. Si potrebbero sfruttare le simmetrie di \mathcal{C} per prevedere o determinare l'equazione di \mathcal{C}^* ?

3.6. TERZO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1X_2^4 - X_1^6 - X_2^6 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singularità, flessi, multitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1X_2^4 = 0 \\ X_0X_2^4 - 6X_1^5 = 0 \\ 2X_2^3(X_0X_1 - 3X_2^2) = 0 \end{cases}$$

e si vede che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quintuplo con complesso tangente dato da $X_1X_2^4 = 0$, dunque con due tangenti distinte (di molteplicità 1 e 4 rispettivamente); tutte le tangenti hanno molteplicità di intersezione 6 con la curva nel punto singolare.

- (2) Poiché è una sestica (irriducibile) con un punto quintuplo, si tratta di una curva razionale. Il fascio di rette per l'origine permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X = \frac{\lambda^4}{1+\lambda^6} \\ Y = \frac{\lambda^5}{1+\lambda^6} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^6 + \lambda^6 \\ X_1 = \mu^2\lambda^4 \\ X_2 = \mu\lambda^5 \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha(X_0X_2^4 - 6X_1^5) + 2\beta X_2^3(X_0X_1 - 3X_2^2) = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^{19}\mu^4[\alpha\lambda(\lambda^6 - 5\mu^6) + 2\beta\mu(2\mu^6 - \lambda^6)] = 0 .$$

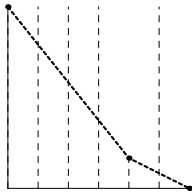
Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità $19 + 4 = 23$, e in generale altri 7 punti distinti. Possiamo anche concludere che la classe della curva è 7 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & X_2^4 & 4X_1X_2^3 \\ X_2^4 & -30X_1^4 & 4X_0X_2^3 \\ 4X_1X_2^3 & 4X_0X_2^3 & 6X_2^2(2X_0X_1 - 5X_2^2) \end{pmatrix} = 10X_2^6(48X_1^6 + 2X_0X_1X_2^4 + 3X_2^6)$$

Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso eventualmente il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^{54}\mu^{12}(10\mu^6 + \lambda^6) = 0$. Dunque vediamo il punto singolare contato $54 + 12 = 66$ volte, e 6 punti distinti (nessuno reale) di flesso semplice identificati dagli zeri dell'ultimo fattore.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^6 - XY^4 + X^6$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



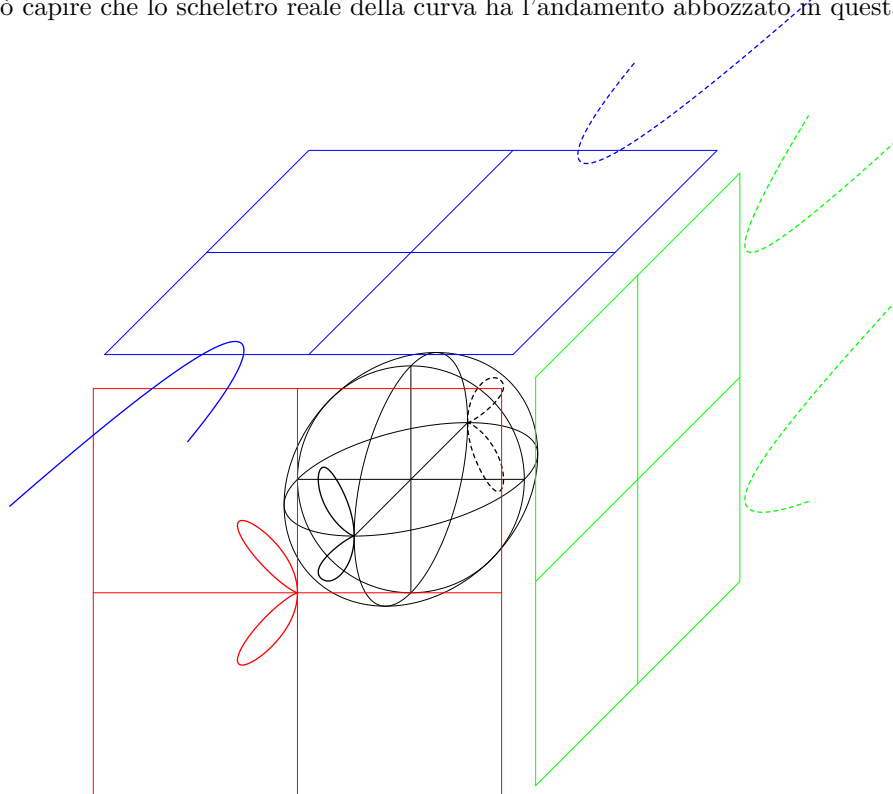
e presenta quindi due lati, uno di pendenza $-5/4$ e lunghezza 4 (quattro radici in $K[[X^{1/4}]]$, un fattore irriducibile in $K[[X]][[Y]]$), e l'altro di pendenza $-1/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[X^{1/2}]]$, un fattore irriducibile in $K[[X]][[Y]]$).

- (a) Le radici di ordine $5/4$ sono del tipo $Y = cX^{5/4} + \dots$, con $c^4 = 1$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^4 \\ Y=T^5+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 4, classe 1 e tangente $Y = 0$.
- (b) Le radici di ordine $1/2$ sono della forma $Y = cX^{1/2} + \dots$ dove c risolve l'equazione $c^2 = 1$, e questo basta per dire che il posto \mathfrak{Q} corrispondente ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=T^3+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $X = 0$.
- (6) Consideriamo i due posti \mathfrak{P} e \mathfrak{Q} nell'origine. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da

$$m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 19 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 20 & \text{se } \beta = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 4 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 5 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} .$$

Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = 54$ e $m_{\mathfrak{Q}}(\mathcal{H}) = 12$.

- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti:
- (0) $XY^4 - X^6 - Y^6$ (è sofisticata da studiare, ma simmetrica in Y , e presenta delle stabilità più complicate: sostituire Y con ηY e X con $\eta^2 X$, $\eta^6 = 1$, non cambia la curva... si tratta di 6 proiettività che fissano globalmente la curva);
- (1) $ZX - X^6 - 1 = 0$ dà $Z = \frac{1+X^6}{X}$;
- (2) $ZY^4 - 1 - Y^6 = 0$ dà $Z = \frac{1+Y^6}{Y^4}$;
- e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si notino i due posti nel punto singolare: uno lineare e uno cuspidale).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 6 e classe 7, possiede un solo punto singolare con due posti (uno lineare, l'altro cuspidale ordinario di molteplicità 4), possiede 6 punti di flesso semplice; inoltre ha almeno 3 bitangenti (una reale, e le sue trasformate: si possono anche calcolare facilmente, visto che sono verticali). Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 7 e classe 6, possiede una bitangente in due punti, uno semplice e uno di flesso, possiede 6 cuspidi ordinarie; inoltre possiede almeno 3 nodi. Usando la formula di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $6 = 7 \cdot 6 - 6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - ?$ da cui $? = 12$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare altre singolarità. Eventuali (due) punti tripli ordinari di \mathcal{C}^*

devono corrispondere a (due) tritangenti di \mathcal{C} , che a causa delle simmetrie complesse devono essere (se esistono) della forma $X = k$; ma queste sono solo bitangenti. Quindi possiamo concludere che la curva \mathcal{C} presenta altre 6 bitangenti (una reale e le sue trasformate?). Usando la formula di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che $7 \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 8 - 3 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 3$ (giusto, perché si tratta di uno dei due punti di bitangenza, duale del posto cuspidale triplo di \mathcal{C}).

Per trovare l'equazione della curva duale proviamo le due strategie usuali:

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \mu^6 + \lambda^6 \\ \mu^2 \lambda^4 \\ \mu \lambda^4 \end{pmatrix}$ e ponendo $\lambda = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^2 \\ \mu \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^2 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^2 \\ \mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6\mu^5 \\ 2\mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu^2 \\ 5\mu^6 - 1 \\ -4\mu^7 + 2\mu \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare μ dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = -\mu^2 \\ \xi_1 = 5\mu^6 - 1 \\ \xi_2 = -4\mu^7 + 2\mu \end{cases}.$$

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_1 X_2^4 \\ \xi_1 = X_0 X_2^4 - 6X_1^5 \\ \xi_2 = 2X_2^3 (X_0 X_1 - 3X_2^2) \\ 0 = X_0 \xi_0 + X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2 \end{cases}$$

In ciascuno dei due casi si arriva ad annullare un determinante della forma

$$\begin{vmatrix} 4\xi & 5\eta & 6 \\ 4\xi & 5\eta & 6 \\ & 4\xi & 5\eta & 6 \\ & & 4\xi & 5\eta & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2\xi & \eta \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2\xi & \eta \end{vmatrix}$$

che dà una equazione di grado 7, come atteso. ?? Si potrebbero sfruttare le simmetrie di \mathcal{C} per prevedere o determinare l'equazione di \mathcal{C}^* ?

3.7. QUARTO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_1X_2^2(X_1^2 - X_2^2) - X_1^6 - X_2^6 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso (10) della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, multitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1X_2^2(X_1^2 - X_2^2) = 0 \\ X_0X_2^2(3X_1^2 - X_2^2) - 6X_1^5 = 0 \\ 2X_0X_1X_2(X_1^2 - 2X_2^2) - 6X_2^5 = 0 \end{cases}$$

e si vede che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quintuplo con complesso tangente dato da $X_1X_2^2(X_1^2 - X_2^2) = 0$, dunque con tre tangenti distinte (una di molteplicità 2, le altre semplici); tutte le tangenti hanno molteplicità di intersezione 6 con la curva nel punto singolare.

- (2) Poiché è una sestica (irriducibile) con un punto quintuplo, si tratta di una curva razionale. Il fascio di rette per l'origine permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X = \frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{1+\lambda^6} \\ Y = \frac{\lambda^3(1-\lambda^2)}{1+\lambda^6} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^6 + \lambda^6 \\ X_1 = \mu^2\lambda^2(\mu^2 - \lambda^2) \\ X_2 = \mu\lambda^3(\mu^2 - \lambda^2) \end{cases}.$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$\alpha(X_0X_2^2(3X_1^2 - X_2^2) - 6X_1^5) + 2\beta X_2(X_0X_1(X_1^2 - 2X_2^2) - 3X_2^4) = 0.$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^9\mu^4(\mu^2 - \lambda^2)^4[\alpha\lambda((\lambda^6 + \mu^6)(3\mu^2 - \lambda^2) - 6\mu^6(\mu^2 - \lambda^2)) + 2\beta\mu((\lambda^6 + \mu^6)(2\mu^2 - 4\lambda^2) - 6\lambda^6(\mu^2 - \lambda^2))] = 0.$$

Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità $9 + 4 + 8 = 21$, e in generale altri 9 punti distinti. Possiamo anche concludere che la classe della curva è 9 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & X_2^2(3X_1^2 - X_2^2) & 2X_1X_2(X_1^2 - 2X_2^2) \\ X_2^2(3X_1^2 - X_2^2) & 6X_0X_1X_2^2 - 30X_1^4 & 2X_0X_2(3X_1^2 - 2X_2^2) \\ 2X_1X_2(X_1^2 - 2X_2^2) & 2X_0X_2(3X_1^2 - 2X_2^2) & 2X_0X_1(X_1^2 - 6X_2^2) - 30X_2^4 \end{pmatrix}$$

che dà come risultato

$$\begin{aligned} & 2X_2^2(4X_0X_1X_2^2(3X_1^2 - X_2^2)(3X_1^2 - 2X_2^2)(X_1^2 - 2X_2^2) \\ & \quad - 12X_1^3(X_1^2 - 2X_2^2)^2(X_0X_2^2 - 5X_1^3) \\ & \quad - 2X_2^2(3X_1^2 - X_2^2)^2(X_0X_1(X_1^2 - 6X_2^2) - 15X_2^4)) \end{aligned}$$

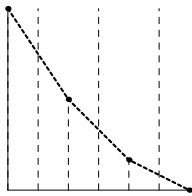
visibilmente un po' complicato...

Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, escluso eventualmente il punto singolare, possiamo procedere sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana; conviene sostituire la parametrizzazione nella matrice, il che permette di raccogliere molti fattori, e troviamo l'equazione

$$\lambda^{26} \mu^{12} (\mu^2 - \lambda^2)^{12} (\mu^6 (3\mu^4 - 9\mu^2 \lambda^2 + 10\lambda^4) + \lambda^6 (6\mu^4 - 3\mu^2 \lambda^2 + \lambda^4)) = 0$$

(anche questo non è particolarmente semplice da ottenere, comunque). Dunque vediamo il punto singolare contato $12 + 26 + 24 = 62$ volte, e 10 punti distinti di flesso semplice identificati dagli zeri dell'ultimo fattore.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^6 + XY^4 - X^3Y^2 + X^6$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi tre lati, uno di pendenza $-3/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[X^{1/2}]]$, un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$), un altro di pendenza $-2/2 = -1$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[X]]$, due fattori irriducibili in $K[[X]][Y]$) e l'ultimo di pendenza $-1/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[X^{1/2}]]$, un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$).

- (a) Le radici di ordine $3/2$ sono del tipo $Y = cX^{3/2} + \dots$, con $c^2 = 1$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{B} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=\pm T^3+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 2, classe 1 e tangente $Y = 0$.
- (b) Le radici di ordine 1 sono della forma $Y = cX + \dots$ dove c risolve l'equazione $c^2 = 1$, e questo basta per dire che i posti Ω_{\pm} corrispondenti hanno parametrizzazioni del tipo $\begin{cases} X=T \\ Y=\pm T+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 1, classe 1 (bisogna controllare il termine successivo dello sviluppo?) e tangenti $X \mp Y = 0$.
- (c) Le radici di ordine $1/2$ sono del tipo $Y = cX^{1/2} + \dots$, con $c^2 = -1$, e questo basta per dire che il ramo corrispondente \mathfrak{R} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=iT+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 1, classe 1 e tangente $X = 0$.
- (6) Consideriamo i due posti \mathfrak{B} , Ω_{\pm} e \mathfrak{R} nell'origine. Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da

$$m_{\mathfrak{B}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 9 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 10 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}, \quad m_{\Omega_{\pm}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 4 & \text{se } \alpha \mp \beta \neq 0 \\ 5 & \text{se } \alpha \mp \beta = 0 \end{cases}, \quad m_{\mathfrak{R}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 4 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 5 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}.$$

Le molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) sono date da $m_{\mathfrak{B}}(\mathcal{H}) = 26$, $m_{\Omega_{\pm}}(\mathcal{H}) = 12$ e $m_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) = 12$.

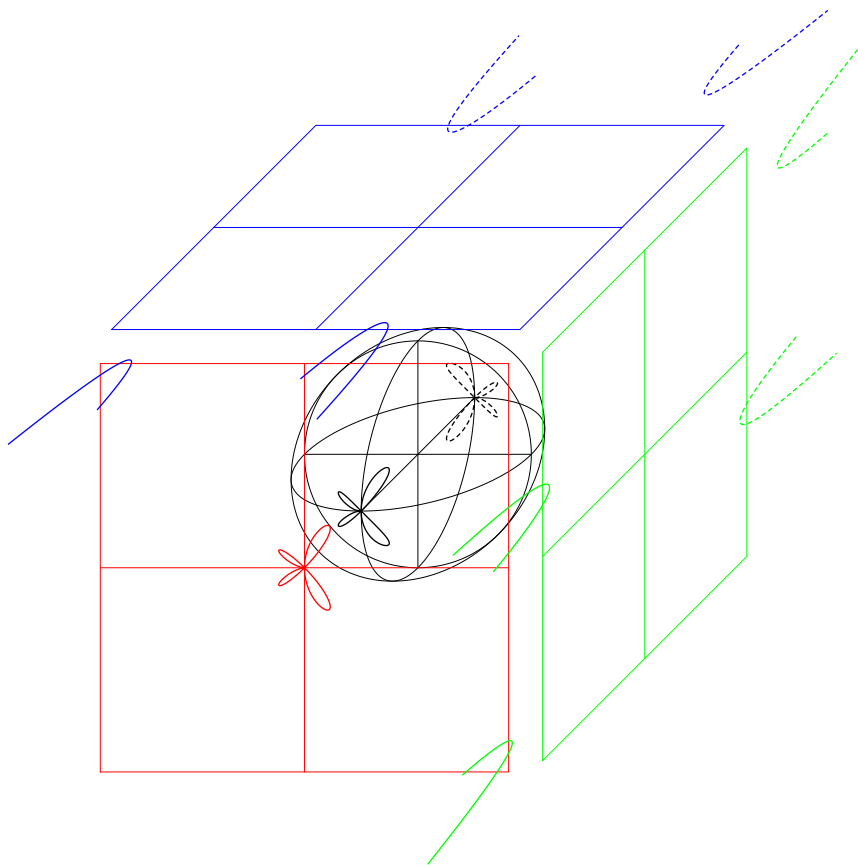
- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti:

(0) $XY^2(X^2 - Y^2) - X^6 - Y^6$ (è sofisticata da studiare, ma simmetrica in Y);

(1) $ZX(X^2 - 1) - X^6 - 1 = 0$ dà $Z = \frac{1+X^6}{X(X^2-1)}$;

(2) $ZY^2(1 - Y^2) - 1 - Y^6 = 0$ dà $Z = \frac{1+Y^6}{Y^2(1-Y^2)}$;

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si notino i posti nel punto singolare: tre lineari e uno cuspidale semplice).

- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 6 e classe 9, possiede un solo punto singolare con quattro posti (tre lineari, l'altro cuspidale ordinario semplice), possiede 10 punti di flesso semplice; inoltre ha almeno 6 bitangenti (si vedono nello scheletro reale). Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 9 e classe 6, possiede una quadritangente in tre punti semplici e uno di flesso semplice, possiede 10 cuspidi ordinarie; inoltre possiede almeno 6 nodi.

Usando la formula di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $6 = 9 \cdot 8 - 10 \cdot 3 - 6 \cdot 2 - ?$ da cui $? = 24$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare altre singolarità (ordinarie). Studiando le rette verticali troviamo altre due bitangenti complesse (non tritangenti); restano poi altri punti singolari con un contributo di 20: sono 10 nodi (oppure 2 tripli con 4 nodi, ma questo non è possibile: tritangenti non reali non verticali devono venire a multipli di 4, sfruttando le simmetrie del coniugio e della Y ; e quattro tritangenti rovinano le formule di Plücker). Usando la formula di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che $9 \cdot 7 \cdot 3 - 10 \cdot 8 - 18 \cdot 6 = 1$ (giusto, perché si tratta di uno dei due punti di quadritangenza, duale del posto cuspidale di \mathcal{C}).

Per trovare l'equazione della curva duale proviamo le due strategie usuali:

- (param) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \mu^6 + \lambda^6 \\ \mu^2 \lambda^2 (\mu^2 - \lambda^2) \\ \mu \lambda^3 (\mu^2 - \lambda^2) \end{pmatrix}$ e ponendo $\lambda = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^2(\mu^2 - 1) \\ \mu(\mu^2 - 1) \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^2(\mu^2 - 1) \\ \mu(\mu^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu^2(\mu^2 - 1) \\ \mu(\mu^2 - 1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6\mu^5 \\ 2\mu(2\mu^2 - 1) \\ 3\mu^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu^2(\mu^2 - 1)^2 \\ 3\mu^8 - 5\mu^6 - 3\mu^2 + 1 \\ -2\mu^9 + 4\mu^7 + 4\mu^3 - 2\mu \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta (!) eliminare μ dal sistema corrispondente...

3.8. QUINTO APPELLO. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_2^5 - X_1^6 - X_2^6 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_2^5 = 0 \\ 6X_1^5 = 0 \\ X_2^4(5X_0 - 6X_2) = 0 \end{cases}$$

e si vede che solo il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa al sistema. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è quintuplo con complesso tangente dato da $X_2^5 = 0$, dunque con unica tangente.

- (2) Poiché è una sestica (irriducibile) con un punto quintuplo, si tratta di una curva razionale. Il fascio di rette per l'origine permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X = \frac{\lambda^5}{1+\lambda^6} \\ Y = \frac{\lambda^6}{1+\lambda^6} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^6 + \lambda^6 \\ X_1 = \mu\lambda^5 \\ X_2 = \lambda^6 \end{cases} .$$

- (3) Le polari richieste hanno equazioni

$$6\alpha X_1^5 + \beta X_2^4(5X_0 - 6X_2) = 0 .$$

Per trovare il numero delle tangenti richieste, intersechiamo la curva con le polari, sfruttando la parametrizzazione trovata della curva: si ottiene una espressione del tipo

$$\lambda^{24}[6\alpha\mu^5\lambda + \beta(5\lambda^6 - \mu^6)] = 0 .$$

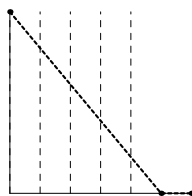
Otteniamo dunque il punto singolare con molteplicità 24, e in generale altri 6 punti distinti. Possiamo anche concludere che la classe della curva è 6 (perché?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5X_2^4 \\ 0 & 30X_1^4 & 0 \\ 5X_2^4 & 0 & 10X_2^3(2X_0 - 3X_2) \end{pmatrix}$$

che dà come risultato $X_1^4X_2^8$. Poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, vediamo il punto singolare contato 68 volte, e un ulteriore punto corrispondente a $\mu = 0$, dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con molteplicità 4: quindi un solo flesso d'ordine 4, corrispondente ad un posto della curva di molteplicità 1 e classe 5.

- (5) Come polinomio in Y , la curva si scrive $Y^6 - Y^5 + X^6$ e il suo poligono di Newton ha questa forma:



e presenta quindi un solo lato di pendenza negativa $-6/5$ e lunghezza 5 (cinque radici in $K[[X^{1/5}]]$, un fattore irriducibile in $K[[X]][[Y]]$). Il ramo corrispondente \mathfrak{P} ha parametrizzazione del tipo $\begin{cases} X=T^5 \\ Y=T^6+\dots \end{cases}$, e dunque molteplicità 5, classe 1 e tangente $Y = 0$.

- (6) Le molteplicità di intersezione con le polari $\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}$ in (3) sono date da $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} 24 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 25 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$.

La molteplicità di intersezione con l'hessiana \mathcal{H} in (4) è $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{H}) = 68$.

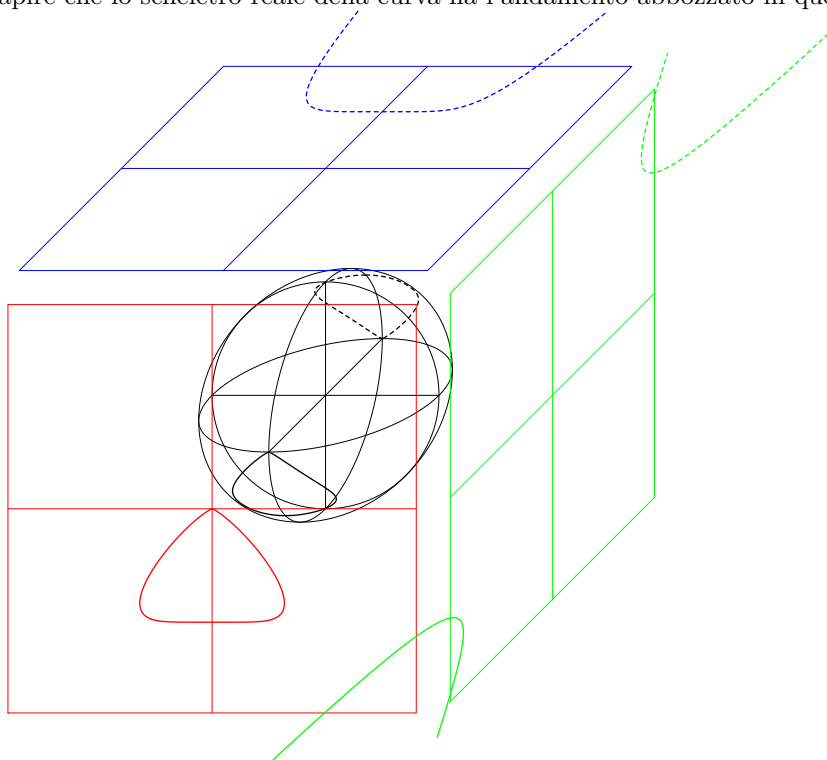
(7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano alle espressioni seguenti:

$$(0) Y^5 - X^6 - Y^6 = 0;$$

$$(1) Z - X^6 - 1 = 0 \text{ dà } Z = 1 + X^6;$$

$$(2) ZY^5 - 1 - Y^6 = 0 \text{ dà } Z = \frac{1+Y^6}{Y^5};$$

e si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(si noti che sia il punto singolare che il flessione sono piuttosto in incognito). Può essere di qualche interesse osservare che la curva, pur presentando nello scheletro reale solo la simmetria ovvia, possiede varie simmetrie complesse tramite rotazione sulla X : sostituire X con ωX (ω radice sesta dell'unità) non altera l'equazione.

(8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (almeno) i seguenti: ha grado 6 e classe 6, possiede un solo punto singolare con un unico posto (molteplicità cinque e classe uno), possiede un punto di flesso quadruplo (posto di molteplicità uno e classe cinque). Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo le stesse cose.

In effetti viene il dubbio che la curva sia autoduale: esplorando il triangolo dei monomi sestici possiamo vedere che una curva avente un posto di molteplicità 5, classe 1, centro in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con tangente $X_2 = 0$ e un posto di molteplicità 1, classe 5, centro in $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con tangente $X_0 = 0$ è unica a meno di equivalenza proiettiva ed ha equazione del tipo $X_1^6 = X_0 X_2^5$.

Per trovare l'equazione della curva duale proviamo le due strategie usuali:

(*param*) Ricordando la parametrizzazione di \mathcal{C} data da $\begin{pmatrix} \mu^6 + \lambda^6 \\ \mu^2 \lambda^2 (\mu^2 - \lambda^2) \\ \mu \lambda^3 (\mu^2 - \lambda^2) \end{pmatrix}$ e ponendo $\lambda = 1$ abbiamo che una parametrizzazione per \mathcal{C}^* si ottiene da

$$\begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^6 + 1 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6\mu^5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6\mu^5 \\ 1 - 5\mu^6 \end{pmatrix}$$

(che dà equazioni parametriche per \mathcal{C}^* , che è curva razionale, tale essendo \mathcal{C}). Dunque basta eliminare μ dal sistema corrispondente, e otteniamo $6^6(1 + \eta)^5 = 5^5 \xi^6$.

(*cart*) Usando invece le equazioni cartesiane, si tratta di eliminare le variabili X_0, X_1, X_2 dal sistema

$$\begin{cases} \xi_0 = X_2^5 \\ \xi_1 = -6X_1^5 \\ \xi_2 = X_2^2(5X_0 - 6X_2) \\ 0 = X_0\xi_0 + X_1\xi_1 + X_2\xi_2 \end{cases}$$

Dopo qualche conto si arriva ad annullare un determinante della forma

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 5\xi & 6(1+\eta) & & & & \\ & 5\xi & 6(1+\eta) & & & \\ & & 5\xi & 6(1+\eta) & & \\ & & & 5\xi & 6(1+\eta) & \\ & & & & 5\xi & 6(1+\eta) \end{vmatrix}$$

che dà un'equazione di grado 6, simile a prima.

3.9. APPELLO FANTASMA. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) di equazione $X_0X_2(X_2^2 - 3X_1^2)(X_2^2 - X_1^2/3) - X_1^6 - X_2^6 = 0$;

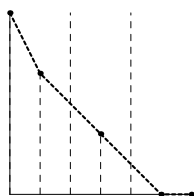
- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione;
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, multitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione. Trattandosi di un appello fantasma, che è solo occasione per fare il disegno di un punto quintuplo ordinario, riportiamo solo i risultati (facili in astratto, essendo il punto ordinario, anche se i conti possono essere notevoli).

- (1) Il solo punto singolare è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quintuplo ordinario (cinque rette tangenti distinte e ben visibili).
- (2) Poiché è una sestica (irriducibile) con un punto quintuplo, si tratta di una curva razionale. Il fascio di rette per l'origine permette di parametrizzare la curva tramite

$$\begin{cases} X_0 = \mu^6 + \lambda^6 \\ X_1 = \lambda\mu(\lambda^2 - 3\mu^2)(\lambda^2 - \mu^2/3) \\ X_2 = \lambda^2(\lambda^2 - 3\mu^2)(\lambda^2 - \mu^2/3) \end{cases} .$$

- (3) La classe della curva è 10 ($6 \cdot 5 - 5 \cdot 4$).
- (4) Vi sono 12 flessi contati con molteplicità ($6 \cdot 12 - 3 \cdot 5 \cdot 4$).
- (5) Come polinomio in Y , la curva ha poligono di Newton ha questa forma:



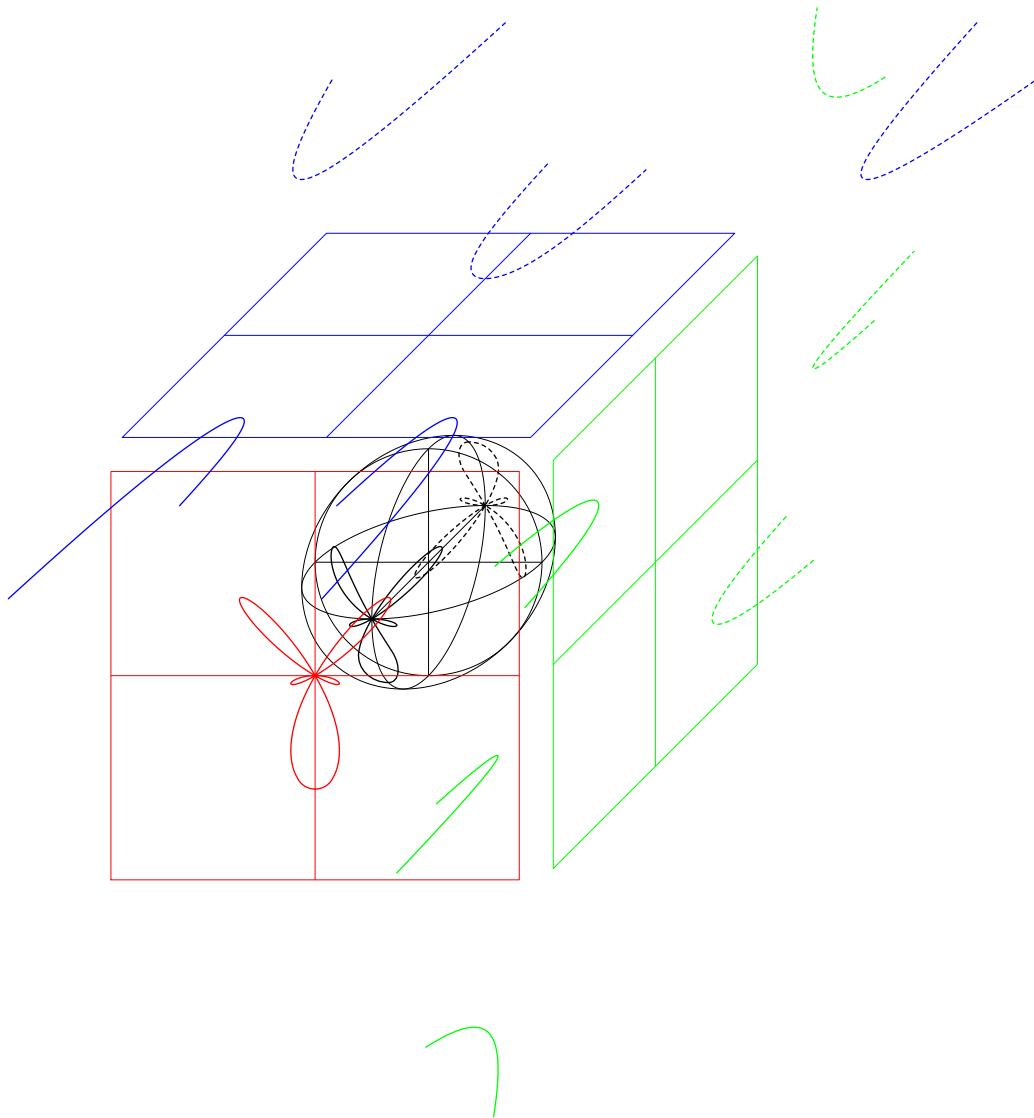
e presenta quindi due lati, uno di pendenza $-4/4$ e lunghezza 4 (quattro radici in $K[[X^1]]$, quattro fattori irriducibili in $K[[X]][Y]$), e l'altro di pendenza $-1/2$ e lunghezza 2 (due radici in $K[[X^{1/2}]]$, un fattore irriducibile in $K[[X]][Y]$). Tutti i posti sono lineari di classe 1.

- (6) Facile.
- (8) I risultati finora noti sulla curva data \mathcal{C} sono (quasi) i seguenti: ha grado 6 e classe 10, possiede un solo punto singolare con cinque posti (lineari di classe 1), possiede 12 punti di flesso; inoltre ha almeno 10 bitangenti (reali, dal disegno). Di conseguenza per la curva \mathcal{C}^* sappiamo che: ha grado 10 e classe 6, possiede una quintangente in cinque punti, tutti semplici, possiede 12 cuspidi; inoltre possiede almeno 10 nodi.

Usando la formula di Plücker per la classe di \mathcal{C}^* troviamo $6 = 10 \cdot 9 - 12 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - ?$ da cui $? = 28$, e di conseguenza \mathcal{C}^* deve presentare altre singolarità, tipo altri 14 punti doppi (peraltro, cercando le rette orizzontali bitangenti di \mathcal{C} , ne troviamo altre 10 complesse, oltre le due reali). Usando la formula di Plücker per i flessi di \mathcal{C}^* risulta allora che $10 \cdot 8 \cdot 3 - 12 \cdot 8 - 10 \cdot 6 - 14 \cdot 6 = 0$ (giusto, perché \mathcal{C} non ha posti cuspidali).

Attenzione: non abbiamo giustificato che i flessi di \mathcal{C} siano semplici, né che \mathcal{C} non abbia tritangenti...

- (7) Le tre disomogeneizzazioni standard portano al grafico:



(si notino i cinque posti nel punto singolare).

4. 2008/9: quartiche razionali (con due punti singolari?).

4.1. PRIMA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_1^4 + X_0X_1^3 - X_0^2X_2^2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [Sugg.: usare il fascio di coniche bitangenti nei punti singolari alle tangenti nei punti stessi, nella forma $\lambda X_0X_2 = \mu X_1^2$. Perché il suggerimento dovrebbe funzionare?];
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare i punti del piano rispetto ai quali la curva polare è singolare;
- (5) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (6) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} X_1^3 - 2X_0X_2^2 = 0 \\ X_1^2(4X_1 + 3X_0) = 0 \\ -2X_0^2X_2 = 0 \end{cases}$$

e si trovano due punti singolari $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il primo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_2^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_2 = 0$ doppia, avente molteplicità d'intersezione 3 con la curva nel punto stesso (cuspidi ordinaria). Disomogeneizzando rispetto a X_2 si vede che il secondo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_0^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_0 = 0$ doppia, avente molteplicità d'intersezione 4 con la curva nel punto stesso (supercuspide, qualcuno direbbe un tacnodo).

- (2) La curva è una quartica con due punti doppi; che sia irriducibile si può vedere da qualche forma disomogeneizzata; che sia razionale non è ovvio, ma il fascio di coniche proposto ha l'aspetto di intersecare la quartica 3 volte nella cuspidi, e 4 nel tacnodo: quindi delle 8 intersezioni tra quartica e coniche sembra rimanere un punto variabile sul fascio di coniche, e che quindi parametrizza la quartica. Sostituendo direttamente $Y = \mu X^2$ nella quartica $X^4 + X^3 - Y^2 = 0$ otteniamo $X^3(X+1-\mu^2X) = 0$ (3 volte l'origine singolare, e un punto variabile con μ) e la parametrizzazione

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\mu^2-1} \\ Y = \frac{\mu}{(\mu^2-1)^2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X_0 = (\mu^2 - \lambda^2)^2 \\ X_1 = \lambda^2(\mu^2 - \lambda^2) \\ X_2 = \lambda^3\mu \end{cases} .$$

In alternativa, si potevano parametrizzare le coniche non degeneri del fascio, usando il punto origine, nella forma $\begin{pmatrix} \mu s^2 \\ \lambda st \\ \lambda t^2 \end{pmatrix}$, ove i parametri quadratici s, t parametrizzano le coniche al variare dei parametri lineari λ, μ del fascio, e sostituire nella equazione della quartica (si trova così che vi sono effettivamente 3 intersezioni comuni nella cuspidi e 4 nel tacnodo, dopo di che si calcola l'intersezione residua che varia con i parametri λ, μ del fascio).

- (3) Le polari hanno equazioni $\alpha(X_1^3 - 2X_0X_2^2) + \beta(-2X_0^2X_2) = 0$, ovvero $\alpha X_1^3 - 2X_0X_2(\alpha X_2 + \beta X_0) = 0$. Sostituendo la parametrizzazione della curva nelle polari troviamo l'equazione

$$\lambda^3(\mu^2 - \lambda^2)^2(\alpha\lambda^3(\mu^2 + \lambda^2) + 2\beta\mu(\mu^2 - \lambda^2)^2) = 0 ,$$

da cui si riconosce 3 volte la cuspidi, 4 volte il tacnodo, e ulteriori cinque punti non singolari (dal polinomio di quinto grado, che non ha in generale radici corrispondenti ai punti singolari). Insiemeisticamente vi sono quindi cinque tangenti, in generale: la classe della curva risulta 5 (perché si può dire?).

- (4) Una generica polare ha espressione del tipo $q_0(X_1^3 - 2X_0X_2^2) + q_1X_1(4X_1^2 + 3X_0X_1) + q_2(-2X_0^2X_2) = 0$ al variare del punto $Q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ nel piano proiettivo. Tale curva è singolare se e solo se il sistema

delle derivate parziali rispetto alle X ha soluzioni non banali (nelle variabili X): il sistema si scrive $H_g(X)Q = 0$ (usando la matrice hessiana della curva data), ovvero esplicitamente:

$$\begin{cases} q_0(-2X_2^2) + q_1(3X_1^2) + q_2(-4X_0X_2) = 0 \\ q_0(3X_1^2) + q_1(12X_1^2 + 6X_0X_1) = 0 \\ q_0(-4X_0X_2) + q_2(-2X_0^2) = 0 \end{cases}$$

Nota: l'annullamento del determinante della matrice hessiana (che identifica la curva hessiana) dà i punti per cui esiste una polare che ha quel punto come punto singolare, cioè i punti dell'hessiana sono i punti singolari delle polari. Ma non è questo che viene chiesto: viene chiesto di determinare i punti rispetto ai quali la polare è singolare (non quali siano i punti singolari delle polari...). Si tratterebbe quindi di determinare i nuclei delle matrici hessiane (per i valori che annullano il determinante).

Usando le fattorizzazioni delle ultime due equazioni possiamo distinguere quattro casi, da cui si ottengono i seguenti risultati: la polare rispetto al punto Q ammette punti singolari se e solo se Q soddisfa all'equazione $q_0q_2(q_0 + 4q_1)(q_2^2(q_0 + 4q_1)^2 + 8q_0q_1^3) = 0$, cioè se e solo se Q appartiene all'unione di tre rette e una quartica...

- (5) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

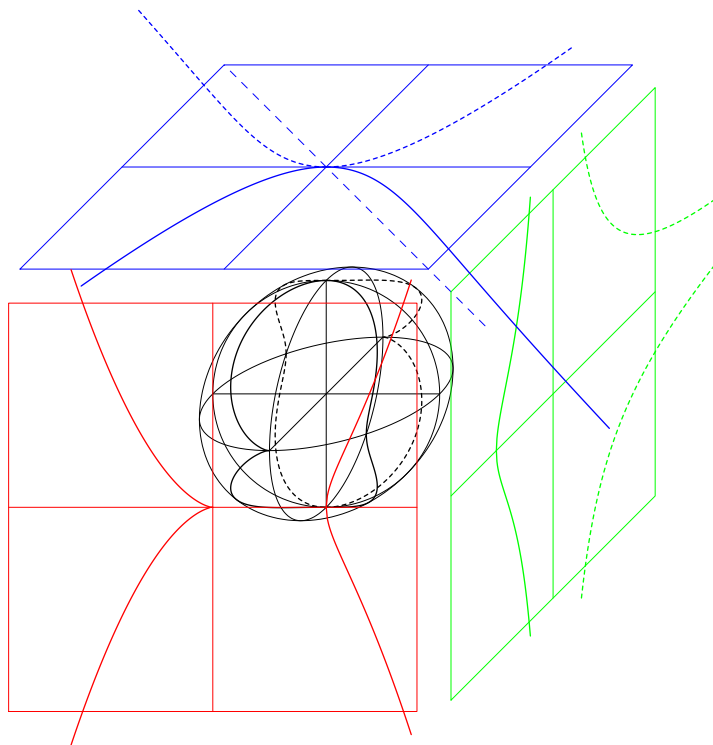
$$\det \begin{pmatrix} -2X_2^2 & 3X_1^2 & -4X_0X_2 \\ 3X_1^2 & 6X_1(2X_1+X_0) & 0 \\ -4X_0X_2 & 0 & -2X_0^2 \end{pmatrix} \cong X_0^2X_1(4X_2^2(2X_1+X_0) - X_1^3),$$

e si spezza in tre rette (una doppia) e una cubica cuspidale. Procediamo sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^8(\mu^2 - \lambda^2)^6(3\lambda^4 + 6\lambda^2\mu^2 - \mu^4) = 0$ da cui vediamo la cuspidale contata 8 volte, il tacnodo contato 12 volte, e altri quattro punti distinti (di cui due reali) non singolari e quindi flessi semplici.

- (6) Vediamo le disomogeneizzazioni standard:

- (0) l'espressione $X^4 + X^3 - Y^2 = 0$ è esplicitabile facilmente (e simmetrica) in Y ;
- (1) l'espressione $1 + Z - Z^2Y^2 = 0$ è esplicitabile in Y usando $Y^2 = \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2}$;
- (2) l'espressione $X^4 + ZX^3 - Z^2 = 0$ è più sofisticata, ma biquadratica in Z ;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



4.2. SECONDA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_1^4 + X_0X_1^3 - X_0^2X_2^2 = 0$;

- (1) usando il risultante rispetto a X_1 , determinare l'intersezione della curva con la polare rispetto al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- (2) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (3) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le polari della curva; quali polari sono generiche per ciascun posto? quali per ciascun punto singolare?
- (4) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, parametrizzazioni) della curva duale.
- (5) tenendo conto solo delle seguenti caratteristiche della curva: classe, simmetria in X_2 , singolarità (e loro complessi tangente), che cosa si può dire dell'equazione della curva duale? Che famiglia di curve viene determinata (per dualità) da tali condizioni? Quali ulteriori dati della curva possiamo usare per determinare la curva duale?

Soluzione.

- (1) La polare richiesta ha equazione $X_1^3 - 2X_0X_2^2 = 0$ (peraltro è una cubica cuspidale, quindi razionale, e i risultati possono essere controllati per sostituzione), e il risultante richiesto è

$R_{X_1}(X_1^4 + X_0X_1^3 - X_0^2X_2^2, X_1^3 - 2X_0X_2^2) = R_{X_1}(X_1^4 + \frac{1}{2}X_0X_1^3, X_1^3 - 2X_0X_2^2) \stackrel{\times}{=} X_0^4X_2^6(X_0^2 + 16X_2^2)$ dove nel primo passaggio si è eliminato il termine noto del primo polinomio (sottraendo metà del secondo moltiplicato per X_0), e nel secondo si sono sostituiti gli zeri del primo nel secondo (risultato a meno di invertibili). Dunque risultano i punti singolari $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con molteplicità 4, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con molteplicità 6, e due punti semplici distinti, con molteplicità 1 ciascuno, complessi coniugati non reali, precisamente $\begin{pmatrix} \pm 4i \\ \mp 2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (2) Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $X^4 + X^3 - Y^2 = 0$ che mostra una cuspidale ordinaria (poligono di Newton rispetto a Y con unico lato di pendenza $-3/2$); le due radici $Y = \pm X^{3/2}(1 + X)^{1/2} = \pm X^{3/2}(1 + \frac{1}{2}X + \dots)$ danno luogo ad un unico posto \mathfrak{P} di parametrizzazione $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=T^3 + \frac{1}{2}T^5 + \dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 2, classe 1, tangente $Y = 0$ ($X_2 = 0$).

Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $X^4 + X^3Z - Z^2 = 0$ che mostra un tacnodo (poligono di Newton rispetto a Z con unico lato di pendenza $-4/2 = -2$); le due radici $Z = \pm X^2 + \frac{1}{2}X^3 \pm \frac{1}{8}X^4 + \dots$ danno luogo a due posti \mathfrak{Q}_{\pm} di parametrizzazione $\begin{cases} X=T \\ Z=\pm T^2 + \frac{1}{2}T^3 + \dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 1, classe 1, tangente $Z = 0$ ($X_0 = 0$).

- (3) Le polari sono espresse dalle equazioni $\alpha(X_1^3 - 2X_0X_2^2) + \beta X_1^2(4X_1 + 3X_0) - 2\gamma X_0^2X_2 = 0$ al variare di $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ in \mathbb{P}^2 .

Sostituendo l'unico posto \mathfrak{P} della cuspidale si ottiene si ottiene una espressione del tipo $-2\gamma T^3 + 3\beta T^4 - \gamma T^5 + (4\beta - \alpha)T^6 + \dots$, da cui si ricava che gli ordini richiesti sono: 3 se $\gamma \neq 0$, 4 se $\gamma = 0 \neq \beta$, 6 se $\gamma = \beta = 0$. Quindi le polari generiche per il posto cuspidale sono quelle rispetto ai punti che non siano della tangente al posto stesso.

Sostituendo i posti \mathfrak{Q} del tacnodo si ottiene si ottiene una espressione del tipo $-2\alpha T^2 + (2\alpha + 4\beta)T^3 - (\dots - 2\gamma)T^4 + \dots$, da cui si ricava che gli ordini richiesti sono: 2 se $\alpha \neq 0$, 3 se $\alpha = 0 \neq \beta$, 4 se $\alpha = \beta = 0$. Quindi le polari generiche per i due posti sono quelle rispetto ai punti che non siano della tangente al punto singolare.

- (4) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:
 - (1) ha grado 4 e classe 5;
 - (2) ha esattamente 4 flessi semplici;
 - (3) ha un punto singolare (tacnodo) che presenta due posti, entrambi di molteplicità 1 e classe 1 e tangenti coincidenti, e un punto singolare cuspidale (unico posto di molteplicità 2 e classe 1).

Da questo possiamo dedurre che la curva duale:

- (1) ha grado 5 e classe 4;

- (2) ha esattamente 4 cuspidi semplici;
 (3) ha un tacnodo (singolarità esattamente come quella della curva data: due posti lineari di classe 1 con centro e tangenti coincidenti) e un punto di flesso semplice.

Siccome allora la classe della duale si calcola, in base ai punti singolari, come $20 - 4(3) - (4) = 4$ (grado della curva), ne concludiamo che la duale non ha altri punti singolari (e la curva data non possiede bitangenti).

La formula di Plücker per i flessi della curva duale dà $45 - 4(8) - (12) = 1$, come avevamo già previsto (una sola cuspidi semplice nella curva data).

Una parametrizzazione della curva duale si può ottenere sostituendo la parametrizzazione della curva data $\begin{pmatrix} (\mu^2 - \lambda^2)^2 \\ \lambda^2(\mu^2 - \lambda^2) \\ \lambda^3\mu \end{pmatrix}$ nelle espressioni della duale $\begin{cases} \xi_0 = X_1^3 - 2X_0X_2^2 \\ \xi_1 = X_1^2(4X_1 + 3X_0) \\ \xi_2 = -2X_0^2X_2 \end{cases}$ e semplificando i termini comuni; si ottiene la parametrizzazione $\begin{pmatrix} -\lambda^3(\mu^2 + \lambda^2) \\ \lambda(\mu^2 - \lambda^2)(3\mu^2 + \lambda^2) \\ -2\mu(\mu^2 - \lambda^2)^2 \end{pmatrix}$.

- (5) La curva duale è una quintica, simmetrica rispetto alla variabile ξ_2 (niente potenze dispari di ξ_2), che presenta un flesso semplice con tangente $\xi_0 = 0$ nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (quindi i coefficienti di $\xi_2^5, \xi_2^4\xi_1$ sono nulli, mentre $\xi_0\xi_2^4, \xi_1^3\xi_2^2$ non devono annullarsi) e un tacnodo con tangente $\xi_2 = 0$ nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (quindi i coefficienti di $\xi_0^5, \xi_0^4\xi_1, \xi_0^4\xi_2, \xi_0^3\xi_1^2, \xi_0^3\xi_1\xi_2, \xi_0^3\xi_2^2, \xi_0\xi_1^4$ devono essere non nulli). Quindi nel triangolo dei monomi di quinto grado otteniamo l'annullamento di molti termini:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & * \xi_0^3 \xi_2^2 \\ & & & & & 0 & 0 & \xi_0^2 \xi_1 \xi_2^2 & 0 \\ * \xi_0 \xi_1^4 & 0 & \xi_0 \xi_1^2 \xi_2^2 & 0 & * \xi_0 \xi_2^4 \\ \xi_1^5 & 0 & * \xi_1^3 \xi_2^2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

in cui sono segnati con * quelli che devono avere coefficiente non nullo. Un facile controllo (la retta $X_1 = 0$ non è tangente alla curva data) garantisce anche che ξ_1^5 merita *. Si contano quindi 7 coefficienti liberi, di cui 5 non nulli, e dunque lo spazio di quintiche determinato è dato da un sottospazio di dimensione proiettiva 6 (dello spazio delle quintiche, dimensione proiettiva $20 = \binom{5+2}{2} - 1$), tolti alcuni suoi iperpiani. Per determinare la duale servono dunque ancora 6 condizioni lineari indipendenti. Sarebbe possibile determinare, a meno di proporzionalità, i coefficienti dei lati del triangolo dei monomi (basta studiare le tangenti alla curva data dai punti fondamentali del piano), ma forse è anche più semplice imporre l'esistenza della cuspidi, duali dei flessi della curva data (di questi punti ce ne sarebbero 4, ma due a due simmetrici, e della simmetria abbiamo già tenuto conto...). Ulteriore possibilità, specie se rimangono liberi pochi coefficienti: imporre che la parametrizzazione della curva duale annulli identicamente il polinomio...

- 4.3. PRIMO APPELLO.** Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_1^4 + X_1^2 X_2^2 - X_0^2 X_2^2 = 0$;
- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
 - (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [*Sugg.: usare il fascio di coniche bitangenti nei punti singolari a qualche tangente alla curva in quei punti, per esempio $\lambda X_1^2 = \mu X_2(X_1 - X_0)$];*];
 - (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
 - (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
 - (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
 - (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le polari della curva;
 - (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
 - (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, parametrizzazione) della curva duale. Quale famiglia di curve viene determinata per dualità considerando solo classe, simmetrie e singolarità della curva data?

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} -2X_0X_2^2 = 0 \\ 2X_1(2X_1^2 + X_2^2) = 0 \\ 2X_2(X_1^2 - X_0^2) = 0 \end{cases}$$

e si trovano due punti singolari $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il primo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_2^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_2 = 0$ doppia, avente molteplicità d'intersezione 4 con la curva nel punto stesso (supercuspide, qualcuno direbbe un tacnodo). Disomogeneizzando rispetto a X_2 si vede che il secondo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_1^2 - X_0^2 = 0$, e dunque formato dalle rette $X_1 \pm X_0 = 0$, aventi molteplicità d'intersezione 4 con la curva nel punto stesso (un nodo, ma con posti di flesso...).

- (2) La curva è una quartica con due punti doppi; che sia irriducibile si può vedere da qualche forma disomogeneizzata; che sia razionale non è ovvio, ma il fascio di coniche proposto ha l'aspetto di intersecare la quartica 3 volte nel nodo, e 4 nel tacnodo: quindi delle 8 intersezioni tra quartica e coniche sembra rimanere un punto variabile sul fascio di coniche, e che quindi parametrizza la quartica. Sostituendo direttamente $Y = \lambda X^2/(X - 1)$ nella quartica $X^4 + X^2 Y^2 - Y^2 = 0$ otteniamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} X = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ Y = -\frac{1}{2\lambda} \frac{(1-\lambda^2)^2}{1+\lambda^2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X_0 = 2\lambda\mu(\mu^2 + \lambda^2) \\ X_1 = 2\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2) \\ X_2 = -(\mu^2 - \lambda^2)^2 \end{cases}.$$

In alternativa, si potevano parametrizzare le coniche non degeneri del fascio, usando il punto origine, nella forma $\begin{pmatrix} \mu t - \lambda s \\ \mu s t \\ \mu t^2 \end{pmatrix}$, ove i parametri quadratici s, t parametrizzano le coniche al variare dei parametri lineari λ, μ del fascio, e sostituire nella equazione della quartica (si trova così che vi sono effettivamente 3 intersezioni comuni nel nodo e 4 nel tacnodo, dopo di che si calcola l'intersezione residua che varia con i parametri λ, μ del fascio).

- (3) Le polari hanno equazioni $\alpha(-2X_0X_2^2) + \beta 2X_2(X_1^2 - X_0^2) = 0$, ovvero $X_2(-\alpha X_0X_2 + \beta(X_1^2 - X_0^2)) = 0$. Sostituendo la parametrizzazione della curva nelle polari troviamo l'equazione

$$\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)^2(-\alpha(\mu^4 - \lambda^4)(\mu^2 - \lambda^2) + 8\beta\mu^3\lambda^3) = 0,$$

da cui si riconosce 2 volte il nodo, 4 volte il tacnodo, e ulteriori sei punti non singolari (dal polinomio di sesto grado, che non ha in generale radici corrispondenti ai punti singolari). Insiemeisticamente vi sono quindi sei tangenti, in generale: la classe della curva risulta 6 (perché si può dire?).

- (4) La curva hessiana ha equazione data dal determinante della matrice delle derivate seconde:

$$\det \begin{pmatrix} -2X_2^2 & 0 & -4X_0X_2 \\ 0 & 12X_1^2 + 2X_2^2 & 4X_1X_2 \\ -4X_0X_2 & 4X_1X_2 & 2(X_1^2 - X_0^2) \end{pmatrix} \stackrel{\times}{=} X_2^2(6X_0^2X_1^2 + X_0^2X_2^2 - X_1^2X_2^2 + 2X_1^4),$$

e si spezza in due rette (una doppia) e una quartica. Procediamo sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^4 \mu^4 (\mu^2 - \lambda^2)^6 (3\lambda^4 + 2\lambda^2 \mu^2 + 3\mu^4) = 0$ da cui vediamo il nodo contato 8 volte, il tacnodo contato 12 volte, e altri quattro punti distinti (nessuno reale) non singolari e quindi flessi semplici.

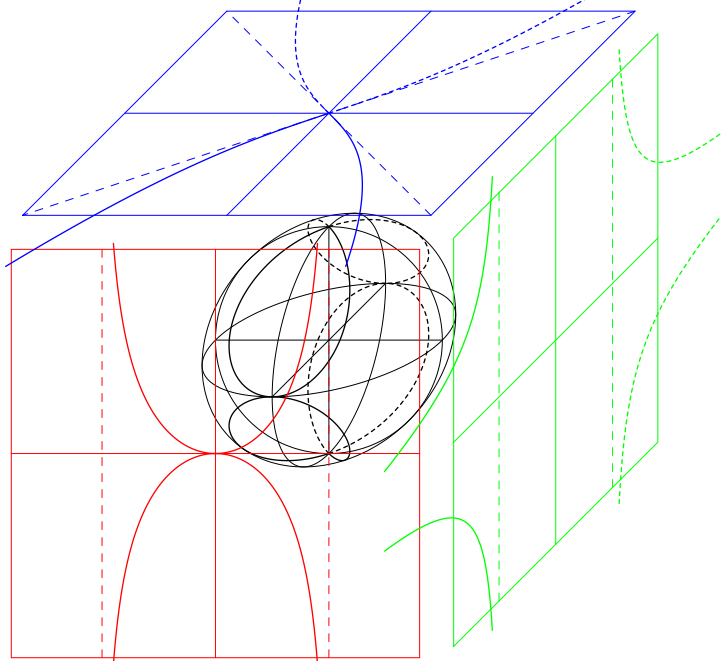
(7) Vediamo le disomogeneizzazioni standard:

(0) l'espressione $X^4 + X^2 Y^2 - Y^2 = 0$ è esplicitabile facilmente (e simmetrica) in Y ;

(1) l'espressione $1 + Y^2 - Z^2 Y^2 = 0$ è esplicitabile in Z usando $Z^2 = 1 + \frac{1}{Y^2}$;

(2) l'espressione $X^4 + X^2 - Z^2 = 0$ è esplicitabile in Z usando $Z^2 = X^2(1 + X^2)$;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(5) Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $X^4 + X^2 Y^2 - Y^2 = 0$ che mostra un tacnodo (poligono di Newton rispetto a Y con unico lato di pendenza $-4/2$); le due radici $Y = \pm X^2(1 - X^2)^{-1/2} = \pm X^2(1 + \frac{1}{2}X^2 + \dots)$ danno luogo a due posti \mathfrak{P}_{\pm} di parametrizzazione $\begin{cases} X=T \\ Y=\pm T^2 \pm \frac{1}{2}T^4 + \dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 1, classe 1, tangente $Y = 0$ ($X_2 = 0$).

Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $X^4 + X^2 - Z^2 = 0$ che mostra un nodo (poligono di Newton rispetto a Z con unico lato di pendenza $-2/2 = -1$); le due radici $Z = \pm X(1 + \frac{1}{2}X^2 + \dots)$ danno luogo a due posti \mathfrak{Q}_{\pm} di parametrizzazione $\begin{cases} X=T \\ Z=\pm T \pm \frac{1}{2}T^3 + \dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 1, classe 2, tangenti $Z \mp X = 0$ ($X_0 \mp X_1 = 0$).

(6) Le polari sono espresse dalle equazioni $-\alpha(X_0 X_2^2) + \beta X_1(2X_1^2 + X_2^2) + \gamma X_2(X_1^2 - X_0^2) = 0$ al variare di $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ in \mathbb{P}^2 .

Sostituendo i posti \mathfrak{P}_{\pm} del nodo si ottiene una espressione del tipo $(\beta \pm \alpha)T + (2\beta \pm \frac{1}{2}\alpha)T^3 - \gamma T^4 + \dots$, da cui si ricava che gli ordini richiesti sono: 1 se $\alpha \neq \pm\beta$, 3 se $\alpha = \pm\beta$ ma $\alpha \neq \pm 4\beta$, 4 altrimenti (cioè per $\alpha = \beta = 0$).

Sostituendo i posti \mathfrak{Q}_{\pm} del tacnodo si ottiene una espressione del tipo $-\gamma T^2 + 2\beta T^3 - (\dots - \alpha)T^4 + \dots$, da cui si ricava che gli ordini richiesti sono: 2 se $\gamma \neq 0$, 3 se $\gamma = 0 \neq \beta$, 4 se $\gamma = \beta = 0$.

I tre casi si distinguono a seconda che il punto sia fuori dalla tangente al posto, oppure sulla tangente ma non il centro, oppure il centro del posto stesso.

(8) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:

(1) ha grado 4 e classe 6;

(2) ha esattamente 4 flessi semplici;

- (3) ha un punto singolare (tacnodo) che presenta due posti, entrambi di molteplicità 1 e classe 1 e tangenti coincidenti, e un punto singolare doppio che presenta due posti, entrambi di molteplicità 1 e classe 2 e tangenti distinte (posti di flesso).

Da questo possiamo dedurre che la curva duale:

- (1) ha grado 6 e classe 4;
- (2) ha esattamente 6 cuspidi semplici, due delle quali (quelle provenienti dal nodo con posti di flesso) hanno la tangente comune (bitangente in due posti cuspidali!);
- (3) ha un tacnodo (singolarità esattamente come quella della curva data: due posti lineari di classe 1 con centro e tangenti coincidenti).

Siccome allora la classe della duale si calcola, in base ai punti singolari, come $30 - 6(3) - (4) - ? = 4$ (grado della curva), ne concludiamo che $? = 4$. Quindi la duale deve avere altri punti singolari, necessariamente due doppi ordinari, corrispondenti a due bitangenti della curva originale; in effetti, viste le simmetrie, le bitangenti devono essere del tipo $Y = c$, e imponendo a $X^4 + c^2 X^2 - c^2$ di avere soluzioni multiple (annullamento del discriminante in X), si trova $c^2(c^2 + 4) = 0$, donde due valori di c (immaginari)...

La formula di Plücker per i flessi della curva duale dà $72 - 6(8) - (12) - 2(6) = 0$, come potevamo già dire (nessun posto cuspidale nella curva data).

Una parametrizzazione della curva duale si può ottenere sostituendo la parametrizzazione della curva data $\begin{pmatrix} 2\lambda\mu(\mu^2 + \lambda^2) \\ 2\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2) \\ -(\mu^2 - \lambda^2)^2 \end{pmatrix}$ nelle espressioni della duale $\begin{cases} \xi_0 = -X_0 X_2^2 \\ \xi_1 = X_1(2X_1^2 + X_2^2) \\ \xi_2 = X_2(X_1^2 - X_0^2) \end{cases}$ e semplificando i termini comuni; si ottiene una parametrizzazione del tipo $\begin{pmatrix} -(\mu^2 + \lambda^2)(\mu^2 - \lambda^2)^2 \\ (\mu^2 - \lambda^2)(\mu^4 + 6\lambda^2\mu^2 + \lambda^4) \\ 8\lambda^3\mu^3 \end{pmatrix}$.

La curva duale è una sestica, simmetrica rispetto alle tre variabili ξ_i (niente potenze dispari di nessuna, ma non sono condizioni indipendenti: se è simmetrica rispetto a due variabili, lo è anche rispetto alla terza, essendo di grado pari! e se il grado fosse dispari?), che presenta due cuspidi semplici con tangente comune $\xi_2 = 0$ nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (quindi un lato del triangolo deve essere proporzionale a $(\xi_0^2 - \xi_1^2)^3 = 0$) e un tacnodo con tangente $\xi_0 = 0$ nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (quindi i coefficienti di $\xi_2^6, \xi_2^4 \xi_1^2$ sono nulli, mentre $\xi_0^2 \xi_2^4, \xi_1^4 \xi_2^2$ devono essere non nulli). Quindi nel triangolo dei monomi di sesto grado otteniamo l'annullamento di molti termini:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & +\xi_0^6 & & \\
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & -3\xi_0^4 \xi_1^2 & 0 & * \xi_0^4 \xi_2^2 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 3\xi_0^2 \xi_1^4 & 0 & \xi_0^2 \xi_1^2 \xi_2^2 & 0 & * \xi_0^2 \xi_2^4 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\xi_1^6 & 0 & * \xi_1^4 \xi_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

in cui sono segnati quelli già identificati, e con * quelli che devono avere coefficiente non nullo. Si contano quindi 4 coefficienti liberi, di cui 3 non nulli, e dunque lo spazio di sestiche determinato è dato da un sottospazio di dimensione proiettiva 4 (dello spazio delle sestiche, dimensione proiettiva $27 = \binom{6+2}{2} - 1$), tolti tre suoi iperpiani. Per determinare la duale servono dunque ancora 4 condizioni lineari indipendenti. Peraltro, considerando le intersezioni della curva duale con gli assi coordinati (corrisponde a cercare le rette tangenti alla curva originale dai punti fondamentali) si possono calcolare quasi subito gli altri lati del triangolo, che risultano essere $-\xi_1^4(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ e $\xi_0^2(\xi_0^2 + 4\xi_2^2)^2$.

4.4. SECONDO APPELLO. Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^2 - X_1^3X_2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [Sugg.: usare il fascio di coniche bitangenti nei punti singolari a qualche tangente alla curva in quei punti, per esempio nella forma $\lambda X_1^2 = \mu(X_0X_2 - X_1^2)$];
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data [Sugg.: usare la forma affine con $X_2 \neq 0$];
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le polari della curva;
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazioni) della curva duale. Mostrare che la curva duale è proiettivamente equivalente alla curva data.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) = 0 \\ -4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_1^2X_2 = 0 \\ 2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - X_1^3 = 0 \end{cases}$$

e si trovano due punti singolari $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il primo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_2^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_2 = 0$ doppia, avente molteplicità d'intersezione 4 con la curva nel punto stesso (supercuspide, qualcuno direbbe una cuspide ramfoide, per motivi che saranno chiari dopo...). Disomogeneizzando rispetto a X_2 si vede che il secondo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_0^2 = 0$, e dunque formato dalla retta doppia $X_0 = 0$, avente molteplicità d'intersezione 3 con la curva nel punto stesso (una cuspide usuale dunque).

- (2) La curva è una quartica con due punti doppi; che sia irriducibile si può vedere da qualche forma disomogeneizzata; che sia razionale non è ovvio, ma il fascio di coniche proposto ha l'aspetto di intersecare la quartica 3 volte nella cuspide, e 4 nella supercuspide: quindi delle 8 intersezioni tra quartica e coniche sembra rimanere un punto variabile sul fascio di coniche, e che quindi parametrizza la quartica. Sostituendo direttamente $Y - X^2 = \lambda X^2$ nella quartica $(Y - X^2)^2 - X^3Y = 0$ otteniamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} X_0 = \lambda + 1 \\ X_1 = \lambda^2 \\ X_2 = \lambda^4 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^3(\lambda + \mu) \\ X_1 = \mu^2\lambda^2 \\ X_2 = \lambda^4 \end{cases}.$$

In alternativa, si potevano parametrizzare le coniche non degeneri del fascio, nella forma $\begin{pmatrix} \mu s^2 \\ \mu t s \\ \lambda t^2 \end{pmatrix}$, ove i parametri quadratici s, t parametrizzano le coniche al variare dei parametri lineari λ, μ del fascio, e sostituire nella equazione della quartica (si trova così che vi sono effettivamente 3 intersezioni comuni nella cuspide e 4 nella supercuspide, dopo di che si calcola l'intersezione residua che varia con i parametri λ, μ del fascio).

- (3) Le polari hanno equazioni $2\alpha X_2(X_0X_2 - X_1^2) + \beta(2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - X_1^3) = 0$, ovvero $2(X_0X_2 - X_1^2)(\alpha X_2 + \beta X_0) - \beta X_1^3 = 0$. Sostituendo la parametrizzazione della curva nelle polari troviamo l'equazione $\lambda^5 \mu^3 (2\alpha \lambda^4 + 2\beta \lambda \mu^3 + 2\beta \mu^4) = 0$, da cui si riconosce 3 volte la cuspide, 5 volte la supercuspide, e ulteriori quattro punti non singolari (dal polinomio di quarto grado, che non ha in generale radici corrispondenti ai punti singolari). Insieme vi sono quindi quattro tangenti, in generale: la classe della curva risulta 4 (perché si può dire?).

(4) Per la curva hessiana seguendo il suggerimento abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{4}{3}((Z-X^2)^2 - X^3) & -4X(Z-X^2) - 3X^2 & 2(Z-X^2) \\ -4X(Z-X^2) - 3X^2 & -4Z + 12X^2 - 6X & -4X \\ 2(Z-X^2) & -4X & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(Z-X^2)^2 - \frac{4}{3}X^3 & -3X^2 & 0 \\ -3X^2 & -4Z + 12X^2 - 6X & -4X \\ 0 & -4X & 2 \end{pmatrix}$$

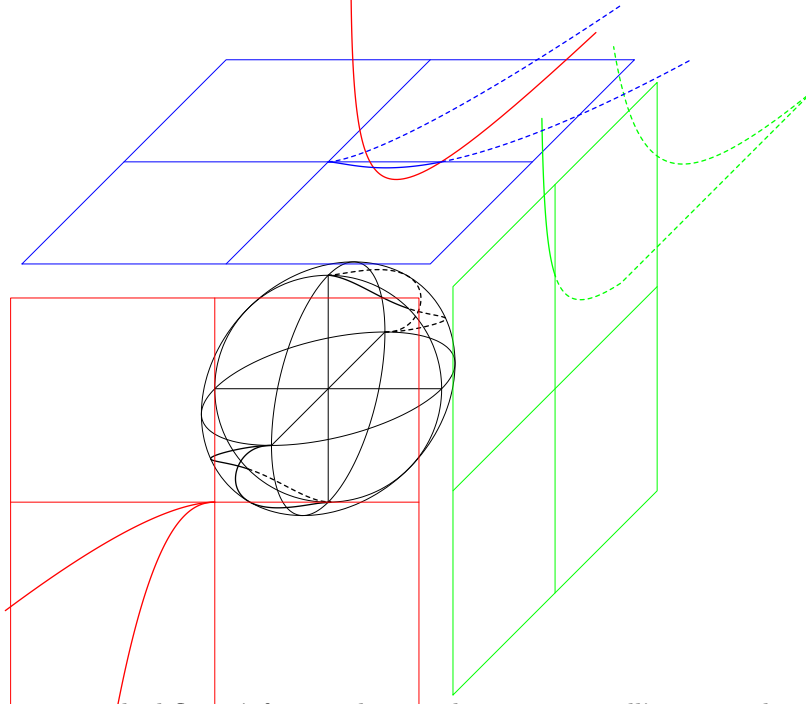
$$= \frac{8}{3}((Z-X^2)^2 + 2X^3)(2Z - 2X^2 + 3X) - 18X^4.$$

Procediamo sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\mu^8(2\mu - 15) = 0$ da cui vediamo la cuspidine contata 8 volte, un punto non singolare, unico flesso (e di conseguenza la supercuspidine contata 15 volte, visto che le uniche intersezioni non considerate in questo piano affine sono quelle con $X_2 = 0$, che dà unicamente la supercuspidine).

(7) Vediamo le disomogeneizzazioni standard:

- (0) l'espressione $(Y - X^2)^2 - X^3Y = 0$ è esplicitabile (ma non facilmente) in Y ;
- (1) l'espressione $(Z - X^2)^2 - X^3 = 0$ è esplicitabile in Z usando $Z = X^2 \pm X^{3/2}$;
- (2) l'espressione $(ZY - 1)^2 - Y = 0$ è esplicitabile in $Z \dots$;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(nei piani rosso e verde il flesso è fuori scala, si vede vicinissimo all'origine nel piano blu; il tratto superiore del piano rosso è artificialmente attirato verso la figura, altrimenti sarebbe fuori del foglio, e non mostra un asintoto verticale: dopo un lungo tratto c'è il flesso, e la curva si apre verso il punto improprio delle ordinate con tangente la retta impropria...; e nel piano verde non è una pipa: ha una cuspidine in verticale).

(5) Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $(Y - X^2)^2 - X^3Y = 0$, ovvero $Y^2 - (2 + X)X^2Y + X^4 = 0$ che mostra un unico posto (poligono di Newton rispetto a Y con unico lato di pendenza $-4/2 = -2$, ma radice unica: bisogna esplorare il secondo poligono, che dà un lato di pendenza negativa di lunghezza 2 e pendenza $-5/2$: quindi ramifica!); le due radici $Y = X^2 \pm X^{5/2}(4 + X)^{1/2} + \frac{1}{2}X^3$ danno luogo a un posto \mathfrak{P} di parametrizzazione $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=T^4+T^5(4+T^2)^{1/2}+\frac{1}{2}T^6 \end{cases}$ e quindi di molteplicità 2, classe 2, tangente $Y = 0$ ($X_2 = 0$).

Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $(Z - X^2)^2 - X^3 = 0$ che mostra una cuspidine (poligono di Newton rispetto a Z con unico lato di pendenza $-3/2$); le due radici $Z = X^2 \pm X^{3/2}$

danno luogo a un posto Ω di parametrizzazione $\left\{ \begin{array}{l} X=T^2 \\ Z=T^3+T^4 \end{array} \right.$ e quindi di molteplicità 2, classe 1, tangente $Z=0$ ($X_0=0$).

- (6) Le polari sono espresse dalle equazioni $-\alpha 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) + \beta(-4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_1^2X_2) + \gamma(2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - X_1^3) = 0$ al variare di $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ in \mathbb{P}^2 .

Sostituendo il posto \mathfrak{P} della supercuspidale si ottiene che gli ordini richiesti sono: 5 se $\gamma \neq 0$, 7 se $\gamma = 0$ ma $\beta \neq 0$, 9 altrimenti (cioè per $\gamma = \beta = 0$).

Sostituendo il posto Ω della cuspidale si ricava che gli ordini richiesti sono: 3 se $\alpha \neq 0$, 4 se $\alpha = 0 \neq \beta$, 6 se $\alpha = \beta = 0$.

I tre casi si distinguono a seconda che il punto sia fuori dalla tangente al posto, oppure sulla tangente ma non il centro, oppure il centro del posto stesso.

- (8) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:

- (1) ha grado 4 e classe 4;
- (2) ha esattamente 1 flesso semplice;
- (3) ha un punto singolare (supercuspidale) che presenta un posto, molteplicità 2 e classe 2, e un punto singolare (cuspidale) che presenta un posto, di molteplicità 2 e classe 1.

Da questo possiamo dedurre che la curva duale:

- (1) ha grado 4 e classe 4;
- (2) ha esattamente 1 cuspidale semplice;
- (3) ha un punto singolare (supercuspidale) che presenta un posto di molteplicità 2 e classe 2 (un facile controllo sul posto supercuspidale mostra che il duale ha esattamente le stesse caratteristiche...quindi molteplicità di intersezione 5 con una generica polare, e 15 con l'hessiana...), e un flesso semplice.

Siccome allora la classe della duale si calcola, in base ai punti singolari, come $12 - 3 - 5 = 4$ (grado della curva), ne concludiamo che non ci sono altri punti singolari per la duale.

La formula di Plücker per i flessi della curva duale dà $24 - 8 - 15 = 1$, come avevamo già detto.

Una parametrizzazione della curva duale si può ottenere sostituendo la parametrizzazione della

curva data $\begin{pmatrix} \mu^3(\lambda+\mu) \\ \mu^2\lambda^2 \\ \lambda^4 \end{pmatrix}$ nelle espressioni della duale $\begin{cases} \xi_0 = 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) \\ \xi_1 = -4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_1^2X_2 \\ \xi_2 = 2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - X_1^3 \end{cases}$ e semplificando

i termini comuni; si ottiene una parametrizzazione del tipo $\begin{pmatrix} 2\lambda^4 \\ -\lambda^2\mu(4\mu+3\lambda) \\ \mu^3(\lambda+2\mu) \end{pmatrix}$. A partire da questo, eliminando il parametro λ , con una paio di passi di riduzione si arriva alla equazione cartesiana data da:

$$\det \begin{pmatrix} 16\eta & -2\xi & 8\xi-3 & 0 \\ 0 & 16\eta & -2\xi & 8\xi-3 \\ 2\xi & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2\xi & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

La curva duale è una quartica, che presenta una cuspidale semplice e una cuspidale ramfoide (e di conseguenza un solo flesso semplice) - esattamente come la curva data. Di tali curve, a meno di trasformazioni proiettive, ne esiste solo una: ponendo la cuspidale semplice in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con tangente $(0 \ 0 \ 1)$ (annullamento dei coefficienti di $\xi_0^4, \xi_0^3\xi_1, \xi_0^2\xi_2, \xi_0^2\xi_1^2, \xi_0^2\xi_1\xi_2$, e termini non nulli per $\xi_0^2\xi_2^2, \xi_0\xi_1^3$), e la cuspidale ramfoide in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con tangente $(1 \ 0 \ 0)$ (annullamento dei coefficienti di $\xi_2^4, \xi_2^3\xi_0, \xi_2^2\xi_1, \xi_2^2\xi_1^2, \xi_0^2\xi_0\xi_1, \xi_2\xi_1^3$, e coefficienti per un termine quadratico del tipo $(\xi_0\xi_2 - \xi_1)^2$), abbiamo che il triangolo dei monomi di quarto grado si presenta come:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \xi_0^2\xi_2^2 \\ * \xi_0\xi_1^3 & 2\xi_0\xi_1^2\xi_2 & & 0 & & 0 \\ \xi_1^4 & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

da cui si vede quasi subito che possiamo scegliere una equazione canonica della forma $(\xi_0\xi_2 - \xi_1)^2 = \xi_0\xi_1^3$ (la scelta di punti e tangenti determina un riferimento a meno del punto unità, quindi si possono moltiplicare le coordinate per costanti non nulle). In particolare esiste una unica quartica a meno di proiettività avente quella configurazione di punti singolari, e sia la curva data che la sua duale rientrano in questo caso: sono pertanto proiettivamente equivalenti.

4.5. TERZO APPELLO. Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^2 - X_0X_1X_2^2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [Sugg.: usare il fascio di coniche bitangenti nei punti singolari a qualche tangente alla curva in quei punti, per esempio nella forma $\lambda X_0X_2 = \mu(X_0X_2 - X_1^2)$];
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data [Sugg.: usare la forma affine con $X_2 \neq 0$];
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) - X_1X_2^2 = 0 \\ -4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - X_0X_2^2 = 0 \\ 2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 2X_0X_1X_2 = 0 \end{cases}$$

e si trovano due punti singolari $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il primo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_2^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_2 = 0$ doppia, avente molteplicità d'intersezione 4 con la curva nel punto stesso (supercuspide, qualcuno direbbe una cuspide ramfoide, per motivi che saranno chiari dopo...). Disomogeneizzando rispetto a X_2 si vede che il secondo punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_0(X_0 - X_1) = 0$, e dunque formato dalle rette $X_0 = 0$ e $X_0 - X_1 = 0$, aventi molteplicità d'intersezione 4 e 3 rispettiv. con la curva nel punto stesso (un nodo dunque, ma una delle tangenti, la prima, mostra un posto di flesso).

- (2) La curva è una quartica con due punti doppi; che sia irriducibile si può vedere da qualche forma disomogeneizzata; che sia razionale non è ovvio, ma il fascio di coniche proposto ha l'aspetto di intersecare la quartica 3 volte nel nodo, e 4 nella supercuspide: quindi delle 8 intersezioni tra quartica e coniche sembra rimanere un punto variabile sul fascio di coniche, e che quindi parametrizza la quartica. Sostituendo direttamente $Y - X^2 = \lambda Y$ nella quartica $(Y - X^2)^2 - XY^2 = 0$ otteniamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} X_0 = 1 - \lambda \\ X_1 = \lambda^2(1 - \lambda) \\ X_2 = \lambda^4 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \mu^3(\mu - \lambda) \\ X_1 = \mu\lambda^2(\mu - \lambda) \\ X_2 = \lambda^4 \end{cases} .$$

In alternativa, si potevano parametrizzare le coniche non degeneri del fascio, ...

- (3) Le polari hanno equazioni $\alpha X_2(2X_0X_2 - 2X_1^2 - X_1X_2) + \beta X_0(X_0X_2 - X_1^2 - X_1X_2) = 0$, e sostituendo la parametrizzazione della curva nelle polari troviamo $\lambda^5\mu(\mu - \lambda)(\alpha\lambda^4(2\mu - \lambda) + \beta\mu^3(\mu - \lambda)^2) = 0$, da cui si riconosce 2 volte il nodo, 5 volte la supercuspide, e ulteriori cinque punti non singolari (dal polinomio di quinto grado, che non ha in generale radici corrispondenti ai punti singolari). Insiemeisticamente vi sono quindi cinque tangenti, in generale: la classe della curva risulta 5 (perché si può dire?).
- (4) Per la curva hessiana seguendo il suggerimento abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{4}{3}((Z-X^2)^2 - XZ) & -4X(Z-X^2) - Z & 2(Z-X^2) - X \\ -4X(Z-X^2) - Z & -4Z + 12X^2 & -4X - 1 \\ 2(Z-X^2) - X & -4X - 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Procediamo sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\mu^4(\mu - 1)^3(8\mu^2 - 7\mu + 1) = 0$ da cui vediamo il nodo contato 7 volte, due punti non singolari,

dunque due flessi distinti (e di conseguenza la supercuspidale contata 15 volte, visto che le uniche intersezioni non considerate in questo piano affine sono quelle con $X_2 = 0$, che dà unicamente la supercuspidale).

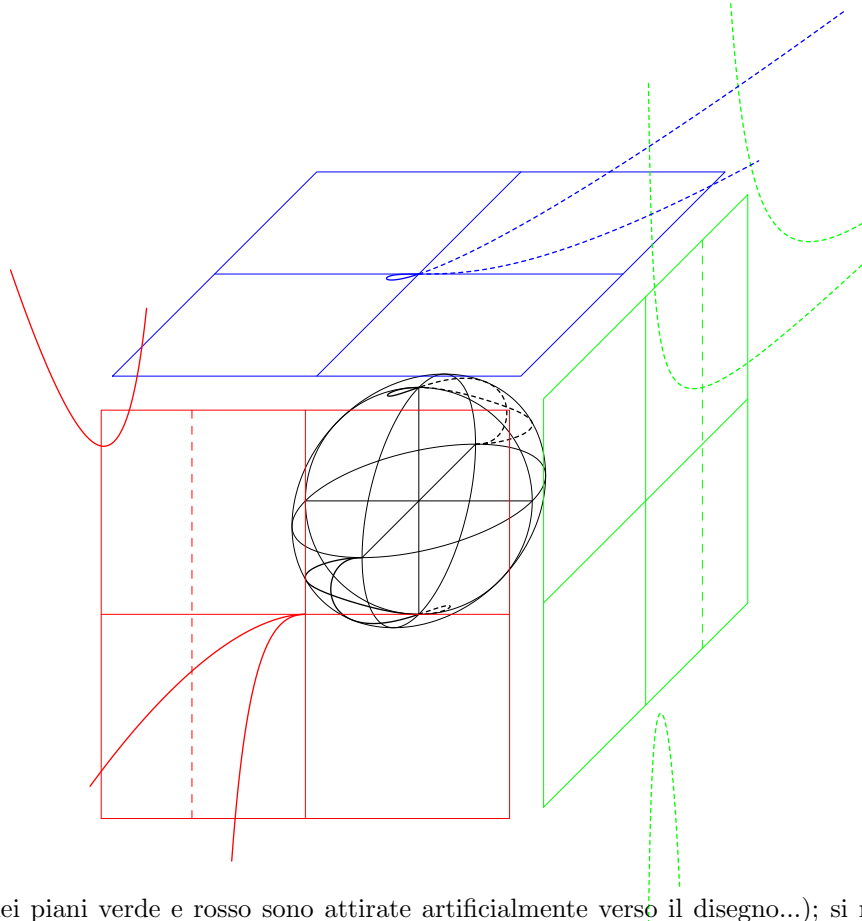
(7) Vediamo le disomogeneizzazioni standard:

(0) l'espressione $(Y - X^2)^2 - XY^2 = 0$ è esplicitabile in Y ;

(1) l'espressione $(Z - X^2)^2 - ZX = 0$ è esplicitabile in Z ;

(2) l'espressione $(ZY - 1)^2 - ZY^2 = 0$ è facilmente esplicitabile in Y ;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(le asole nei piani verde e rosso sono attratte artificialmente verso il disegno...); si noti che nel piano verde ci sono due asintoti verticali distinti.

(5) Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $(Y - X^2)^2 - XY^2 = 0$, ovvero $(1 - X)Y^2 - 2X^2Y + X^4 = 0$ che mostra un unico posto (poligono di Newton rispetto a Y con unico lato di pendenza $-4/2 = -2$, ma radice unica: bisogna esplorare il secondo poligono, che dà un lato di pendenza negativa di lunghezza 2 e pendenza $-5/2$: quindi ramifica!); le due radici $Y = X^2/(1 \mp X^{1/2}) = X^2(1 \pm X^{1/2} + X \pm \dots)$ danno luogo a un posto \mathfrak{P} di parametrizzazione $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=T^4+T^5+T^6\dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 2, classe 4, tangente $Y = 0$ ($X_2 = 0$).

Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $(Z - X^2)^2 - ZX = 0$ che mostra un nodo (poligono di Newton rispetto a Z con lati di pendenze -1); le due radici cominciano con $Z_+ = X + X^2 - X^3$ e $Z_- = X^3$ e danno luogo a due posti \mathfrak{Q}_\pm di parametrizzazione $\begin{cases} X=T \\ Z=T+T^2\dots \end{cases}$ e $\begin{cases} X=T \\ Z=T^3\dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 1, classi 1 e 2, tangenti $Z = 0$ ($X_0 = 0$) e $Z = X$ ($X_0 = X_1$).

(6) Le polari sono espresse dalle equazioni

$$\alpha(2X_2(X_0X_2 - X_1^2) - X_1X_2^2) + \beta(-4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - X_0X_2^2) + \gamma(2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 2X_0X_1X_2) = 0$$

al variare di $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ in \mathbb{P}^2 .

Sostituendo il posto \mathfrak{P} della supercuspidale si ottiene che gli ordini richiesti sono: 5, oppure ? oppure ?.

Sostituendo i posti Ω_{\pm} del nodo si ricava che gli ordini richiesti sono: 3, oppure ? oppure ?.

I tre casi si distinguono a seconda che il punto sia fuori dalla tangente al posto, oppure sulla tangente ma non il centro, oppure il centro del posto stesso.

Per l'hessiana, abbiamo molteplicità di intersezione 15, 3, 4 rispettivamente per \mathfrak{P} , Ω_+ , Ω_- .

(8) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:

- (1) ha grado 4 e classe 5;
- (2) ha esattamente 2 flessi semplici;
- (3) ha un punto singolare (supercuspidale) che presenta un posto, molteplicità 2 e classe 2, e un punto singolare (nodo) che presenta due posti, di molteplicità 1 ciascuno e classe 1 e 2 risp. (uno dei due posto è cuspidale).

Da questo possiamo dedurre che la curva duale:

- (1) ha grado 5 e classe 4;
- (2) ha esattamente 3 cuspidi semplici (una porta una bitangente);
- (3) ha un punto singolare (supercuspidale) che presenta un posto di molteplicità 2 e classe 2 (un facile controllo sul posto supercuspidale mostra che il duale ha esattamente le stesse caratteristiche...quindi molteplicità di intersezione 5 con una generica polare, e 15 con l'hessiana...), e nessun flesso.

Siccome allora la classe della duale si calcola, in base ai punti singolari, come $20 - 3 * 3 - 5 - ? = 4$ (grado della curva), ne concludiamo che la duale deve contenere un nodo, e la curva data un bitangente (cosa visibile dal grafico).

La formula di Plücker per i flessi della curva duale dà $45 - 3 * 8 - 15 - 6 = 0$, come avevamo già detto.

Una parametrizzazione della curva duale si può ottenere sostituendo la parametrizzazione della

curva data $\begin{pmatrix} \mu^3(\mu-\lambda) \\ \mu\lambda^2(\mu-\lambda) \\ \lambda^4 \end{pmatrix}$ nelle espressioni della duale $\begin{cases} \xi_0 = 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) - X_1X_2^2 \\ \xi_1 = -4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - X_0X_2^2 \\ \xi_2 = 2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 2X_0X_1X_2 \end{cases}$ e semplificando

i termini comuni; si ottiene una parametrizzazione del tipo $\begin{pmatrix} \lambda^4(2\mu-\lambda) \\ \lambda^2\mu^2(3\lambda-4\mu) \\ 2\mu^3(\mu-\lambda)^2 \end{pmatrix}$. A partire da questo,

eliminando il parametro μ , con qualche passo di riduzione si arriva alla equazione cartesiana data da:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 82\xi & -\xi & & & \\ & 4 & -3 & 82\xi & -\xi & & \\ & & 4 & -3 & 82\xi & -\xi & \\ 2\xi & -4\xi & 2\xi+4\eta & -3\eta & & & \\ & 2\xi & -4\xi & 2\xi+4\eta & -3\eta & & \\ & & 2\xi & -4\xi & 2\xi+4\eta & -3\eta & \end{pmatrix} = 0 .$$

- 4.6. QUARTO APPELLO.** Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^2 - X_1X_2^3 = 0$;
- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
 - (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [Sugg.: usare il fascio di coniche iperoscaltatrici della forma $\lambda X_2^2 = \mu(X_0X_2 - X_1^2)$, perché?];
 - (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
 - (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data [Sugg.: usare la forma affine con $X_2 \neq 0$];
 - (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
 - (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
 - (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
 - (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) = 0 \\ -4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - X_2^3 = 0 \\ 2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_1X_2^2 = 0 \end{cases}$$

e si trova l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_2^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_2 = 0$ doppia, avente molteplicità d'intersezione 4 con la curva nel punto stesso (supercuspide, qualcuno direbbe una cuspide ramfoide, per motivi che saranno chiari dopo...).

- (2) La curva è una quartica con un punto doppio; che sia irriducibile si può vedere da qualche forma disomogeneizzata; che sia razionale non è ovvio, ma il fascio di coniche proposto ha l'aspetto di intersecare la quartica 7 volte nella supercuspide: quindi delle 8 intersezioni tra quartica e coniche sembra rimanere un punto variabile sul fascio di coniche, e che quindi parametrizza la quartica. Sostituendo direttamente $Y - X^2 = \lambda Y^2$ nella quartica $(Y - X^2)^2 - XY^3 = 0$ otteniamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} X_0 = \lambda(\lambda^3 + 1) \\ X_1 = \lambda^2 \\ X_2 = 1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \lambda(\lambda^3 + \mu^3) \\ X_1 = \lambda^2\mu^2 \\ X_2 = \mu^4 \end{cases} .$$

In alternativa, si potevano parametrizzare le coniche non degeneri del fascio, ...

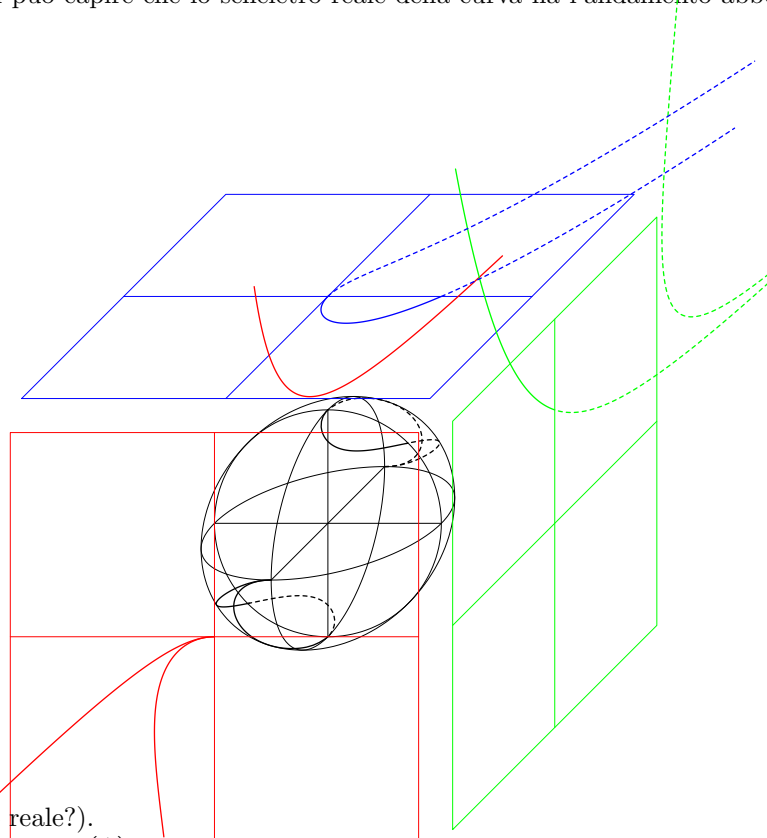
- (3) Le polari hanno equazioni $\alpha 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) + \beta(2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_1X_2^2) = 0$, e sostituendo la parametrizzazione della curva nelle polari troviamo $\lambda\mu^7(\mu - \lambda)(2\alpha\mu^4 - \beta\lambda\mu^3 + 2\beta\lambda^4) = 0$, da cui si riconosce 7 volte la supercuspide, e ulteriori cinque punti non singolari (dal polinomio di quarto grado, e dal fattore λ che dà il punto improprio delle ordinate). Insieme vi sono quindi cinque tangenti, in generale: la classe della curva risulta 5 (perché si può dire?).
- (4) Per la curva hessiana seguendo il suggerimento abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{4}{3}((Z-X^2)^2 - X) & -4X(Z-X^2) - 1 & 2(Z-X^2) \\ -4X(Z-X^2) - 1 & -4(Z-X^2) + 8X^2 + 12X^2 & -4X \\ 2(Z-X^2) & -4X & 2 \end{pmatrix} = \frac{16}{3}(Z - X^2)^3 + \frac{32}{3}X(Z - X^2) - 2 .$$

Procediamo sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $8\lambda^3 - 1 = 0$ da cui vediamo tre soluzioni distinte, dunque tre flessi distinti (e di conseguenza la supercuspide contata 21 volte, visto che le uniche intersezioni non considerate in questo piano affine sono quelle con $X_2 = 0$, che dà unicamente la supercuspide).

- (7) Vediamo le disomogeneizzazioni standard:
- (0) l'espressione $(Y - X^2)^2 - XY^3 = 0$ è difficile da usare;
 - (1) l'espressione $(Z - X^2)^2 - X = 0$ è esplicitabile in Z usando $Z = X^2 \pm X^{1/2}$;
 - (2) l'espressione $(ZY - 1)^2 - Y^3 = 0$ è esplicitabile in Z usando $Z = Y^{-1} \pm Y^{1/2}$;

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(dov'è il flesso reale?).

- (5) Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $(Y - X^2)^2 - XY^3 = 0$, che mostra un unico posto (poligono di Newton rispetto a Y con unico lato di pendenza negativa $-4/2 = -2$, ma radice unica: bisogna esplorare il secondo poligono, che dà un lato di pendenza negativa di lunghezza 2 e pendenza $-7/2$: quindi ramifica!); le due radici $Y = X^2 \pm X^{7/2} + \dots$ danno luogo a un posto \mathfrak{P} di parametrizzazione $\begin{cases} X=T^2 \\ Y=T^4+T^7+\dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 2, classe 4, tangente $Y = 0$ ($X_2 = 0$).

- (6) Le polari sono espresse dalle equazioni

$$\alpha 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) + \beta(-4X_1(X_0X_2 - X_1^2) - X_2^3) + \gamma(2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_1X_2^2) = 0$$

al variare di $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ in \mathbb{P}^2 .

Sostituendo il posto \mathfrak{P} della supercuspidale si ottiene che gli ordini richiesti sono: 7, oppure ? oppure ?.

I tre casi si distinguono a seconda che il punto sia fuori dalla tangente al posto, oppure sulla tangente ma non il centro, oppure il centro del posto stesso.

Per l'hessiana, abbiamo molteplicità di intersezione 21 per \mathfrak{P} .

- (8) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:

- (1) ha grado 4 e classe 5;
- (2) ha esattamente 3 flessi semplici;
- (3) ha un punto singolare (supercuspidale) che presenta un posto, molteplicità 2 e classe 2.

Da questo possiamo dedurre che la curva duale:

- (1) ha grado 5 e classe 4;
- (2) ha esattamente 3 cuspidi semplici;
- (3) ha un punto singolare (supercuspidale) che presenta un posto di molteplicità 2 e classe 2 (un facile controllo sul posto supercuspidale mostra che il duale ha esattamente le stesse caratteristiche...quindi molteplicità di intersezione 7 con una generica polare, e 21 con l'hessiana...), e nessun flesso.

Siccome allora la classe della duale si calcola, in base ai punti singolari, come $20 - 3 * 3 - 7 = 4$ (grado della curva), ne concludiamo che la duale non possiede altre singolarità.

La formula di Plücker per i flessi della curva duale dà $45 - 3 * 8 - 21 = 0$, come avevamo già detto.

Una parametrizzazione della curva duale si può ottenere sostituendo la parametrizzazione della

curva data $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda^3 + \mu^3) \\ \lambda^2 \mu^2 \\ \mu^4 \end{pmatrix}$ nelle espressioni della duale $\begin{cases} \xi_0 = 2X_2(X_0 X_2 - X_1^2) \\ \xi_1 = -4X_1(X_0 X_2 - X_1^2) - X_2^3 \\ \xi_2 = 2X_0(X_0 X_2 - X_1^2) - 3X_1 X_2^2 \end{cases}$ e semplificando i

termini comuni; si ottiene una parametrizzazione del tipo $\begin{pmatrix} 2\lambda\mu^4 \\ -\mu^2(4\lambda^3 + \mu^3) \\ \lambda^2(2\lambda^3 - \mu^3) \end{pmatrix}$. A partire da questo,

eliminando il parametro λ , con qualche passo di riduzione si arriva alla equazione cartesiana data da:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8\xi & 1 \\ 4 & 0 & 8\xi & 1 \\ \xi & 3 & 2\eta & \\ \xi & 3 & 2\eta & \\ \xi & 3 & 2\eta & \end{pmatrix} = 0 .$$

4.7. QUINTO APPELLO. Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^2 - X_0X_2^3 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [Sugg.: usare il fascio di coniche osculatrici della forma $\lambda X_1X_2 = \mu(X_0X_2 - X_1^2)$, perché?];
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data [Sugg.: usare la forma affine con $X_2 \neq 0$];
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) determinare le molteplicità di intersezione dei posti trovati con le curve in (3) e (4);
- (7) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;
- (8) determinare caratteristiche (grado, singolarità, flessi, bitangenti, equazione) della curva duale.

Soluzione.

- (1) Il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) - X_2^3 = 0 \\ -4X_1(X_0X_2 - X_1^2) = 0 \\ 2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_0X_2^2 = 0 \end{cases}$$

e si trova l'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che il punto è doppio, con complesso tangente dato da $X_2^2 = 0$, e dunque formato dalla retta $X_2 = 0$ doppia, avente molteplicità d'intersezione 4 con la curva nel punto stesso (supernodo, qualcuno direbbe un esnodo, per motivi che saranno chiari dopo...).

- (2) La curva è una quartica con un punto doppio; che sia irriducibile si può vedere da qualche forma disomogeneizzata; che sia razionale non è ovvio, ma il fascio di coniche proposto ha l'aspetto di intersecare la quartica 7 volte nel supernodo: quindi delle 8 intersezioni tra quartica e coniche sembra rimanere un punto variabile sul fascio di coniche, e che quindi parametrizza la quartica. Sostituendo direttamente $Y - X^2 = \lambda XY$ nella quartica $(Y - X^2)^2 - XY^3 = 0$ otteniamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} X_0 = \lambda^4 \\ X_1 = \lambda(\lambda^2 - 1) \\ X_2 = (\lambda^2 - 1)^2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} X_0 = \lambda^4 \\ X_1 = \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \\ X_2 = (\lambda^2 - \mu^2)^2 \end{cases} .$$

In alternativa, si potevano parametrizzare le coniche non degeneri del fascio, ...

- (3) Le polari hanno equazioni $\alpha(2X_2(X_0X_2 - X_1^2) - X_2^3) + \beta(2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_0X_2^2) = 0$, e sostituendo la parametrizzazione della curva nelle polari troviamo $(\lambda^2 - \mu^2)^3(\alpha(\lambda^2 - \mu^2)^2(\lambda^2 + \mu^2) + \beta\lambda^4(-\lambda^2 + 3\mu^2)) = 0$, da cui si riconosce 6 volte il supernodo, e ulteriori sei punti non singolari (dal polinomio di sesto grado). Insiemeisticamente vi sono quindi sei tangenti, in generale: la classe della curva risulta 6 (perché si può dire?).
- (4) Per la curva hessiana seguendo il suggerimento abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{4}{3}((Z-X^2)^2 - Z) & -4X(Z-X^2) & 2(Z-X^2)-1 \\ -4X(Z-X^2) & -4(Z-X^2)+8X^2+12X^2 & -4X \\ 2(Z-X^2)-1 & -4X & 2 \end{pmatrix} =$$

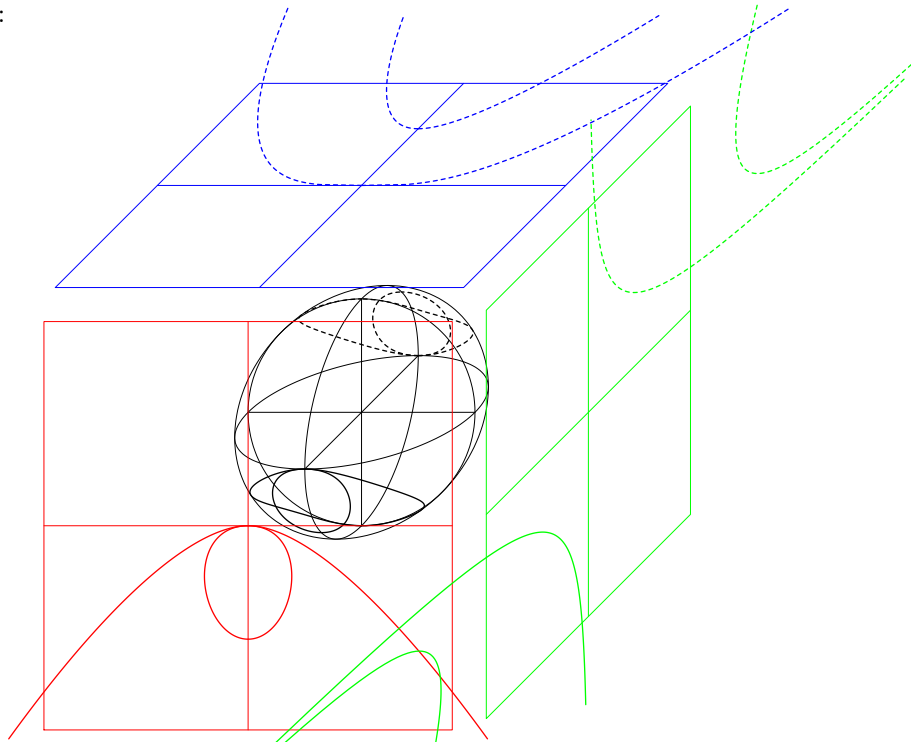
$$= \frac{16}{3}(Z-X^2)^3 - 16(Z-X^2)^2 + \frac{32}{3}Z(Z-X^2) + 4(Z-X^2) - 8X^2 .$$

Procediamo sostituendo la parametrizzazione della curva nella sua hessiana e troviamo l'equazione $\lambda^2(\lambda^4 + 3) = 0$ da cui vediamo due soluzioni concentrate nel punto improprio delle ordinate (flesso doppio, cioè con molteplicità di intersezione 4 con la tangente), e quattro flessi distinti non reali (e di conseguenza il supernodo contato 18 volte, visto che le uniche intersezioni non considerate in questo piano affine sono quelle con $X_2 = 0$, che dà unicamente il supernodo).

- (7) Vediamo le disomogeneizzazioni standard:

- (0) l'espressione $(Y - X^2)^2 - Y^3 = 0$ è esplicitabile in X (facilmente in X^2 , dà $X^2 = Y \pm Y^{3/2}$);
 (1) l'espressione $(Z - X^2)^2 - Z = 0$ è esplicitabile in X usando (facilmente in X^2 , dà $X^2 = Z \pm Z^{1/2}$);
 (2) l'espressione $(ZY - 1)^2 - Y^3 = 0$ è esplicitabile in Z ...

in ogni caso si può capire che lo scheletro reale della curva ha l'andamento abbozzato in questa figura:



(dov'è il flesso doppio reale?).

- (5) Nel punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si sfrutta l'equazione affine $(Y - X^2)^2 - Y^3 = 0$, che conviene considerare rispetto a X , nel qual caso si ottengono subito le soluzioni $X = \pm Y^{1/2}(1 \pm Y^{1/2})^{1/2}$, il che mostra due posti \mathfrak{P}_{\pm} di parametrizzazioni $\begin{cases} X = \pm T(1-T)^{1/2} \\ Y = T^2 \end{cases}$ (si facciano le opportune considerazioni sui poligoni di Newton rispetto alla variabile X).

Invece, il poligono di Newton rispetto a Y ha unico lato di pendenza negativa $-4/2 = -2$, ma radice unica: bisogna esplorare il secondo poligono, che dà un lato di pendenza negativa di lunghezza 2 e pendenza -1 : quindi non ramifica!; le due radici $Y = X^2 \pm X^3 + \dots$ danno luogo ai due posti precedenti, di parametrizzazione $\begin{cases} X = S \\ Y = S^2 \pm S^3 + \dots \end{cases}$ e quindi di molteplicità 1, classe 1, tangente $Y = 0$ ($X_2 = 0$).

- (6) Le polari sono espresse dalle equazioni $\alpha(2X_2(X_0X_2 - X_1^2) - X_2^3) + \beta(-4X_1(X_0X_2 - X_1^2)) + \gamma(2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_0X_2^2) = 0$ al variare di $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ in \mathbb{P}^2 .

Sostituendo i posti \mathfrak{P}_{\pm} del supernodo si ottiene che gli ordini richiesti sono: 3, oppure ? oppure ?.

I tre casi si distinguono a seconda che il punto sia fuori dalla tangente al posto, oppure sulla tangente ma non il centro, oppure il centro del posto stesso.

Per l'hessiana, abbiamo molteplicità di intersezione 9 per ciascun \mathfrak{P}_{\pm} .

- (8) I risultati finora noti sulla curva data sono (almeno) i seguenti:
- (1) ha grado 4 e classe 6;
 - (2) ha esattamente un flesso doppio e 4 flessi semplici;
 - (3) ha un punto singolare (supernodo) che presenta due posti, molteplicità 1 e classe 1 e stessa tangente.

Da questo possiamo dedurre che la curva duale:

- (1) ha grado 6 e classe 4;

- (2) ha esattamente 4 cuspidi semplici e una doppia (posto di molteplicità 3 e classe 1, con contributo 8 per una generica polare e 22 per l'hessiana);
- (3) ha un punto singolare (supernodo) che presenta due posti di molteplicità 1 e classe 1 (un facile controllo sul posto supernodale mostra che il duale ha esattamente le stesse caratteristiche...quindi molteplicità di intersezione 6 con una generica polare, e 18 con l'hessiana...), e nessun flesso.

Siccome allora la classe della duale si calcola, in base ai punti singolari, come $30 - 3 \cdot 4 - 8 - 6 = 4$ (grado della curva), ne concludiamo che la duale non possiede altre singolarità.

La formula di Plücker per i flessi della curva duale dà $72 - 4 \cdot 8 - 22 - 18 = 0$, come avevamo già detto.

Una parametrizzazione della curva duale si può ottenere sostituendo la parametrizzazione della curva data $\begin{pmatrix} \lambda^4 \\ \lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) \\ (\lambda^2 - \mu^2)^2 \end{pmatrix}$ nelle espressioni della duale $\begin{cases} \xi_0 = 2X_2(X_0X_2 - X_1^2) - X_2^3 \\ \xi_1 = -4X_1(X_0X_2 - X_1^2) \\ \xi_2 = 2X_0(X_0X_2 - X_1^2) - 3X_0X_2^2 \end{cases}$ e semplificando i termini comuni; si ottiene una parametrizzazione del tipo $\begin{pmatrix} (\lambda^2 - \mu^2)^2(\lambda^2 + \mu^2) \\ -4\lambda^3\mu(\lambda^2 - \mu^2) \\ \lambda^4(\lambda^2 + 3\mu^2) \end{pmatrix}$.

5. 2009/10: quintiche razionali varie (e qualche domanda teorica).

5.1. PRIMA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_1^5 - X_0^2 X_1 X_2^2 - X_0^2 X_2^3 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione [Sugg.: usare il fascio di coniche bitangenti nei punti singolari alle tangenti nei punti stessi, nella forma $\lambda X_0 X_2 = \mu X_1^2$. Perché il suggerimento dovrebbe funzionare?];
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare le tangenti alla curva passanti per i tre punti fondamentali del riferimento.
- (5) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (6) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva.

Soluzione.

ancora da scrivere...

5.2. SECONDA PROVA PARZIALE. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_1^5 - X_0^2 X_1 X_2^2 - X_0^2 X_2^3 = 0$; si ricordi se necessario che possiede due punti singolari, quattro flessi semplici, ed hessiana di equazione $X_0^2 X_2^2 (10X_1^3 (X_1 + X_2)(X_1 + 3X_2) - 5X_1^5 - X_0^2 X_2^2 (X_1 + X_2))$ (ma si può far senza).

- (1) determinare i posti di centro nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e le loro molteplicità di intersezione con polari generiche ed hessiana;
- (2) determinare i posti di centro nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e le loro molteplicità di intersezione con polari generiche ed hessiana;
- (3) studiare i posti duali di quelli del punto (1) e le loro molteplicità di intersezione con polari generiche ed hessiana della curva duale;
- (4) studiare i posti duali di quelli del punto (2) e le loro molteplicità di intersezione con polari generiche ed hessiana della curva duale;
- (5) determinare classe, numero di flessi e singolarità della curva duale, ed eventuali bitangenti della curva data;

domanda teorica: data una curva piana complessa, si dimostri che la rete delle sue polari ha ciclo intersezione formato solo dai punti singolari della curva data; che cosa si può dire del ciclo base di un fascio di polari (cioè delle polari rispetto ai punti di una retta del piano)?

Soluzione.

ancora da scrivere...

5.3. PRIMO APPELLO. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_0^2 X_2^3 - X_1^5 - X_1^4 X_2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio di coniche);
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti, molteplicità di intersezione con polari ed hessiana) di quelli del punto precedente;
- (7) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.
- (8) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;

Domanda teorica: Un punto P appartiene alla intersezione di due polari della curva \mathcal{C} rispetto ai punti Q_1 e Q_2 . Se P è un punto non singolare di \mathcal{C} è vero che P , Q_1 e Q_2 sono allineati? È vero o falso che due polari di una curva \mathcal{C} si intersecano sempre in punti della curva stessa (dimostrazione o controesempio)?

Soluzione. da scrivere...

5.4. PRIMO APPELLO BIS. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_0^2 X_2^3 - X_1^5 - X_0 X_1^2 X_2^2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio di coniche);
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti, molteplicità di intersezione con polari ed hessiana) di quelli del punto precedente;
- (7) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale;
- (8) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva.

Domanda teorica: Un punto P appartiene alla curva \mathcal{C} e non gli è singolare. Che relazione c'è tra la molteplicità di intersezione di \mathcal{C} e t_P (tangente) in P e la molteplicità di intersezione di t_P e $\mathcal{P}_P(\mathcal{C})$ (polare rispetto a P) in P ?

Soluzione. da scrivere...

5.5. SECONDO APPELLO. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_0^2 X_2^3 - X_1^5 - X_0 X_1^3 X_2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio di coniche);
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti, molteplicità di intersezione con polari ed hessiana) di quelli del punto precedente;
- (7) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.
- (8) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;

Domanda teorica: Dimostrare che i punti del piano che appartengono all'hessiana di una fissata curva sono tutti e soli i punti singolari delle polari di quella curva.

Domanda teorica bis: I punti di una curva che appartengono anche alla sua hessiana possono essere punti singolari dell'hessiana?

Soluzione. da scrivere...

5.6. TERZO APPELLO. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_0(X_0X_2 - X_1^2)^2 - X_1^3X_2^2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio osculatore di coniche);
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti, molteplicità di intersezione con polari ed hessiana) di quelli del punto precedente;
- (7) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.
- (8) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;

Domanda teorica: Un punto singolare P di una curva algebrica piana contiene due posti di flesso semplice; che molteplicità minima deve avere P per la curva stessa e per la sua hessiana?

Soluzione. da scrivere...

- 5.7. QUARTO APPELLO.** Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_1(X_0X_2 - X_1^2) - X_2^5 = 0$;
- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
 - (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio iperosculatore di coniche);
 - (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
 - (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
 - (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
 - (6) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti, molteplicità di intersezione con polari ed hessiana) di quelli del punto precedente;
 - (7) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.
 - (8) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;

Domanda teorica: Un punto singolare P di una curva algebrica piana contiene due posti di flesso semplice aventi la stessa tangente; quali sono le possibili molteplicità di P per le polari della curva data?

Soluzione. da scrivere...

5.8. QUINTO APPELLO. Si consideri la curva (complessa) di equazione $X_2(X_0X_2 - X_1^2)^2 - X_1^5 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio di coniche);
- (3) determinare le polari rispetto a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ e il numero di tangenti alla curva da tali punti;
- (4) determinare l'hessiana e il numero dei punti di flesso della curva data;
- (5) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (6) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti, molteplicità di intersezione con polari ed hessiana) di quelli del punto precedente;
- (7) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.
- (8) approssimare con un disegno lo scheletro reale della curva;

Domanda teorica: Un punto singolare P di una curva algebrica piana contiene due posti di flesso semplice aventi la stessa tangente; quali sono le possibili molteplicità di P per le polari della curva data?

Soluzione. da scrivere...

6. 2010/11: sestiche razionali varie (e problemi sulle quartiche).**6.1. PRIMO APPELLO.****Esercizio.**

Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^3 - X_1^5X_2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio di coniche);
- (3) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (4) determinare classe e numero di flessi della curva;
- (5) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti) di quelli del punto (3);
- (6) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.

Problema.

Si considerino le quartiche (irriducibili) del piano proiettivo complesso aventi tre cuspidi semplici.

- (a) mostrare che a meno di proiettività esiste una sola di tali curve (sugg.: porre le cuspidi nei tre punti fondamentali); si tratta di una curva razionale?
- (b) è vero che le tre tangenti alle cuspidi si incontrano in un punto?
- (c) determinare il numero di flessi, la classe e descrivere la curva duale.

Soluzione. da scrivere...

6.2. SECONDO APPELLO.**Esercizio.**

Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^3 - X_1^4X_2^2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio di coniche);
- (3) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (4) determinare classe e numero di flessi della curva;
- (5) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti) di quelli del punto (3);
- (6) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.

Problema.

Si considerino le quartiche (irriducibili) del piano proiettivo complesso aventi due cuspidi semplici e un nodo.

- (a) mostrare che a meno di proiettività esiste un fascio di tali curve (sugg.: porre il nodo nell'origine, le cuspidi negli altri due punti fondamentali); si tratta di curve razionali?
- (b) il nodo vede quattro rette: le sue tangenti e le congiungenti con le due cuspidi; esistono curve del fascio in cui quelle rette formano una quaterna armonica?
- (c) determinare il numero di flessi, la classe e descrivere la curva duale per le quartiche del fascio.

Soluzione. da scrivere...

6.3. TERZO APPELLO.**Esercizio.**

Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^3 - X_0X_1^3X_2^2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio bitangente di coniche);
- (3) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (4) determinare classe e numero di flessi della curva;
- (5) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti) di quelli del punto (3);
- (6) determinare le caratteristiche (grado, singolarità, flessi, ...) della curva duale.

Problema.

Si considerino le quartiche (irriducibili) del piano proiettivo complesso aventi due nodi e una cuspidale semplice, tali inoltre che due vertici del quadrilatero formato dalle tangenti ai nodi appartengano alla tangente alla cuspidale.

- (a) mostrare che a meno di proiettività esiste un fascio di tali curve (sugg.: porre la cuspidale nell'origine, i nodi negli altri due punti fondamentali);
- (b) si tratta di curve razionali?
- (c) determinare il numero di flessi, la classe e descrivere la curva duale per le quartiche del fascio.

Soluzione. da scrivere...

6.4. QUARTO APPELLO.**Esercizio.**

Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^3 - X_0^2X_1^3X_2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio bitangente di coniche);
- (3) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (4) determinare la classe e il numero di flessi della curva;
- (5) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti) di quelli del punto (3);
- (6) determinare il ciclo intersezione delle polari rispetto ai punti singolari della curva.

Problema.

Si considerino le quartiche (irriducibili) del piano proiettivo complesso aventi un punto triplo con unica tangente.

- (a) si tratta di curve razionali? quali classi possono avere?
- (b) quanti flessi possono avere tali curve?
- (c) esistono curve di questo tipo che siano autoduali?

Soluzione. da scrivere...

6.5. QUINTO APPELLO.**Esercizio.**

Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^3 - X_1^2X_2^4 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio osculatore di coniche);
- (3) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (4) determinare la classe e il numero di flessi della curva;
- (5) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti) di quelli del punto (3);
- (6) determinare il ciclo intersezione delle polari rispetto ai punti singolari della curva.

Problema.

Si considerino le quartiche (irriducibili) del piano proiettivo complesso aventi un punto triplo con (esattamente) due tangenti distinte.

- (a) si tratta di curve razionali? quanti posti vi possono essere nel punto singolare?
- (b) quali classi possono avere tali curve? quanti flessi possono avere?
- (c) esistono curve di questo tipo che siano autoduali?

Soluzione. da scrivere...

6.6. SESTO APPELLO.**Esercizio.**

Si consideri la curva (complessa) di equazione $(X_0X_2 - X_1^2)^3 - X_0^3X_1^2X_2 = 0$;

- (1) determinare punti singolari e relativi complessi tangente;
- (2) dire se si tratta di una curva razionale, e in tal caso trovarne una parametrizzazione (usare un opportuno fascio bitangente di coniche);
- (3) determinare i posti (numero, molteplicità, classe, tangenti) della curva nei suoi punti singolari;
- (4) determinare la classe e il numero di flessi della curva;
- (5) descrivere i posti duali (molteplicità, classe, centri, tangenti) di quelli del punto (3);
- (6) determinare il ciclo intersezione delle polari rispetto ai punti singolari della curva.

Problema.

Si considerino le quartiche (irriducibili) del piano proiettivo complesso aventi un punto triplo ordinario.

- (a) si tratta di curve razionali? quali classi possono avere?
- (b) quanti flessi possono avere tali curve? qual è il numero minimo (insiemisticamente) di flessi?
- (c) descrivere la famiglia di queste curve a meno di proiettività.

Soluzione. da scrivere...

Indice

Appendice A. Temi d'esame CAP (Curve Algebriche Piane)	1
1. 2005/6: quartiche razionali (con un punto triplo?).	1
2. 2006/7: quintiche razionali (con un punto quadruplo?).	24
3. 2007/8: sestiche razionali (con un punto quintuplo).	45
4. 2008/9: quartiche razionali (con due punti singolari?).	68
5. 2009/10: quintiche razionali varie (e qualche domanda teorica).	87
6. 2010/11: sestiche razionali varie (e problemi sulle quartiche).	94