Chiaccheratina d'inizio (V. Cristante)

(*da rileggere anche verso la fine del corso*)

Dalla geometria greca classica si sono sviluppate quattro grandi teorie indipendenti: la topologia, la geometria differenziale, la geometria algebrica e l'algebra lineare.

Dato che in questo corso, che si chiama Geometria, si inizia con lo studio dell'Algebra Lineare per arrivare a studiare la Geometria Euclidea, mi sembra opportuno dire qualche parola per dare un'idea del percorso che dalla geometria classica ha portato all'algebra lineare.

Dai tempi di Euclide fino al primo ventennio dell'ottocento, la geometria è stata la scienza che che si occupava dello *spazio geometrico* ritenuto un oggetto reale. Il rigore geometrico consisteva nel distinguere chiaramente le proposizioni che non si dimostravano (gli assiomi), da quelle che si dimostravano partendo dalle prime (i teoremi). Bisogna sottolineare che gli assiomi erano considerati come evidenti in quanto imposti dalla realtà, e si pensava che la realtà stessa ne garantisse anche la verità, e di conseguenza la loro mutua compatibilità. Se si pensa al famoso *Postulato delle Parallele* e ai suoi tentativi di dimostrazione, si capisce che nessuno dubitava che esso enuciasse una *verità*.

Ma già alla metà dell'ottocento, dopo i lavori di Gauss, Bolyai, Lobačevskij e Riemann, l'atteggiamento dei geometri è sostanzialmente cambiato: non si pensa più che la Geometria abbia il ruolo di dedurre dei teoremi partendo da certi assiomi inconfutabili, in quanto forniti dall'osservazione della realtà. Lo spazio della realtà non è un oggetto che riguardi la geometria: gli *spazi* della geometria sono degli oggetti matematici. Ciò non toglie che taluni di essi possano fornire dei modelli adatti a descrivere particolari aspetti della nostra intuizione dello spazio. In un certo senso, si può pensare che da allora i geometri abbiano assunto un atteggiamento simile a quello dei fisici, i quali sanno benissimo che le loro teorie non descrivono il mondo reale, ma si limitano a fornire dei modelli per descrivere o interpretare certi fenomeni che si svolgono sotto opportune condizioni. La scelta degli assiomi, non essendo più imposta dalla realtà, è, a priori, arbitraria, purché non dia luogo a contraddizioni, ed è suggerita dall'uso che si vuole fare della geometria che si sta costruendo. Ad esempio, gli assiomi che si pongono su di uno spazio che si presti allo sviluppo della meccanica classica saranno diversi da quelli che si pongono su di uno spazio che permetta di sviluppare la teoria della relatività. Insomma non esiste una sola geometria, in quanto scelte diverse degli assiomi portano alla costruzione di geometrie diverse.

Per costruire uno spazio geometrico si può procedere essenzialmente in due modi.

Il primo modo, detto *assiomatico*, è, ad esempio, quello adottato da D. Hilbert nella sua famosa opera *Grundlagen der Geometrie*, che raccoglie le lezioni di un corso sui fondamenti della Geometria, che egli tenne a Gottinga nell'anno accademico 1898-99. Hilbert inizia pressapoco nel modo seguente: consideriamo tre insiemi A, B, C; gli elementi di A saranno detti i *Punti*, gli elementi di B saranno detti le *Rette*, e gli elementi di C saranno detti i *Piani* dello spazio che si sta costruendo. È importante notare che Hilbert, a differenza di Euclide, che inizia i suoi *Elementi* con la frase: "Il punto è ciò che non ha parte", non dice mai chi siano gli elementi di A o B o C: le proprietà dei singoli elementi degli insiemi A, B, C non hanno alcun rilievo nella costruzione, ciò che determina la geometria dello spazio che si sta costruendo sono gli assiomi che egli pone: questi sono semplicemente delle relazioni tra gli elementi degli insiemi A, B, C.

Ad esempio, la relazione di appartenenza tra punti e rette è una opportuna $\mathcal{R} = (A, B, G)$, ove $G \subset A \times B$, e gli assiomi di appartenenza sono delle proprietà di G; e G sarà tale che, per ogni $P, Q \in A$, esiste $r \in B$ tale che $(P, r), (Q, r) \in G$; inoltre se $P \neq Q$, allora r è unica.

Hilbert, partendo dagli assiomi di Euclide opportunamente completati, costruisce una geometria basata su cinque gruppi di assiomi, che egli dimostra essere non contradditori (cioè non è possibile dedurre dagli assiomi alcun fatto che contraddica uno degli assiomi stessi), ed indipendenti (cioè nessuno di essi può essere dedotto come teorema dai rimanenti). Quindi egli mostra che i principali teoremi della geometria di Euclide sono conseguenza degli assiomi che ha fissato, prestando particolare cura nel mostrare quali sono gli assiomi che intervengono in ogni singola dimostrazione.

Per mostrare la non contradditorietà e l'indipendenza dei suoi assiomi, Hilbert costruisce un *modello* della sua geometria, cioè partendo dai numeri reali costruisce degli insiemi per cui sono soddisfatti tutti gli assiomi dei cinque gruppi. Sostanzialmente egli mostra che gli assiomi permettono di definire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme A e l'insieme k^3 delle terne ordinate di un sottocorpo k del corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, in modo tale che gli insiemi B e C si possano porre in corrispondenza biunivoca con certi sottoinsiemi dell'insieme delle parti di k^3, i cui elementi sono gli insiemi delle soluzioni di (sistemi di) equazioni algebriche lineari.

Il secondo modo di procedere (che è quello che adotteremo in questo corso), in un certo senso inizia da dove Hilbert termina: esso prende lo spunto dall'osservazione che sull'insieme k^3, che Hilbert aveva usato per costruire un modello della sua geometria, si può definire una somma $((a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c'))$, e che gli elementi di k^3 possono essere moltiplicati per elementi di k $(\alpha(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c))$. Prendendo come modello k^3, dotato di queste operazioni, si definisce la nozione di *Spazio Vettoriale* V su di un corpo (qualunque) C.

Lo spazio vettoriale V è l'oggetto da cui si parte per costruire la geometria.

Si deve subito dire che gli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale sono incomparabilmente più semplici di quelli che definiscono la Geometria di Hilbert, e la verifica della loro non contraddittorietà e completezza è pressoché immediata. Dato uno spazio vettoriale V su di un corpo C, ispirandosi alle proprietà dei sottoinsiemi di k^3 che sono insiemi di soluzioni di sistemi di equazioni algebriche lineari, si definiscono certi sottoinsiemi di V, che saranno dette le *Sottovarietà Lineari* di V. Per gli spazi vettoriali e più generalmente per le loro sottovarietà lineari vi è una nozione di dimensione; ad esempio, lo spazio vettoriale k^3 di Hilbert ha dimensione 3, e per ogni spazio vettoriale, le sue sottovarietà lineari di dimensione 0 sono dette i punti, quelle di dimensione 1 le rette, quelle di dimensione 2 i piani.

L'*Algebra Lineare* è lo studio degli spazi vettoriali (di dimensione qualunque) e quindi, in particolare, degli insiemi delle loro sottovarietà lineari.

I nomi assegnati alle sottovarietà lineari di dimensione $0, 1, 2$ sono appropriati; infatti, se si considera uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul corpo dei numeri reali, si può introdurre una nozione di distanza tra sottovarietà lineari in modo che, se si indicano con A, B, C gli insiemi di tutte le sue sottovarietà lineari di dimensione $0, 1, 2$ rispettivamente, partendo dagli assiomi di spazio vettoriale, di sottovarietà lineare, e dalle proprietà della distanza, si verifica con grande facilità che A, B e C verificano tutti gli assiomi di Hilbert.

A questo punto dovrebbe essere chiaro perché si può affermare che l'Algebra Lineare è una generalizzazione, o – se si preferisce – che contiene la Geometria Euclidea come caso particolare.