primo appello Geometria 2 parte B - 18 giugno 2018

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia data la superficie ottenuta ruotando la curva $\begin{pmatrix} \cosh u \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$ attorno all'asse delle z.

(a) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le curve su σ che formano angolo costante con le linee di curvatura.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; identificare le soluzioni evidenti del sistema, e ridurre il sistema ad una equazione ordinaria del prim'ordine.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^2$ dotato dell'ordine lessicografico: $(x, y) < (x', y')$ se $x < x'$ oppure $x = x'$ e $y < y'$. Si consideri la topologia τ avente per base gli intervalli (senza estremi) per questo ordine, cioè gli insiemi del tipo $\{(x, y) : (x_0, y_0) < (x, y) < (x_1, y_1)\}$ per $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Descrivere gli aperti di τ; descrivere la topologia indotta da τ sulle rette del piano.

(b) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile? Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Si descriva la topologia indotta da τ sul quadrato unitario $[0, 1]^2$, e in particolare la si confronti con la topologia indotta dall'ordine lessicografico sul quadrato stesso (usando come prima gli intervalli senza estremi).

Risultati (esercizio 2): **0100,111111,1,001100,01**

(a) Gli intervalli essendo una base (sono chiusi per intersezione finita), gli aperti sono unione arbitraria di intervalli. Sulle rette verticali (che sono aperti della topologia) viene indotta la topologia usuale reale, su tutte le altre rette viene indotta la topologia discreta.

(b) Non è separabile, né topologicamente numerabile. Invece è localmente numerabile. Essendo omeomorfo al prodotto di una retta reale con topologia discreta con una retta reale con topologia usuale, risulta metrizzabile, e quindi hausdorff e normale.

(c) È localmente connesso per archi ma non connesso.

(d) È localmente compatto ma non compatto. I compatti sono unioni finite di compatti (euclidei) su un numero finito di rette verticali.

(e) La topologia indotta è più fine della topologia lessicografica del quadrato: per esempio i segmenti chiusi verticali sono aperti della topologia indotta, ma non di quella lessicografica del quadrato.