Formulario

Geometria Proiettiva, Coniche e Quadriche.

commenti a maurizio@math.unipd.it

Reticoli di sottospazi.

Sia V uno spazio vettoriale su C di dimensione finita. Definiamo $\mathbb{S}(V):=\{W|W\leqslant V\}$, $\mathbb{P}(V):=\{W|W\leqslant V,\ \dim_C W=1\}$ e $\mathbb{I}(V):=\{W|W\leqslant V,\ \dim_C W=\dim_C V-1\}$ rispettivamente gli insiemi dei sottospazi, delle rette e degli iperpiani di V, che si dicono rispettivamente spazi proiettivi completo, punteggiato, iperigato associati a V.

$\mathbb{S}(V)$ ha struttura di reticolo con le operazioni di intersezione e somma di sottospazi e l'ordine dell'inclusione. Osservazioni:
$W_1\subseteq W_2\Longleftrightarrow W_1+W_2=W_2\Longleftrightarrow W_1\cap W_2=W_1$,
$(W_1+W_2)\cap W_3\supseteq(W_1\cap W_3)+(W_2\cap W_3)$,
$(W_1\cap W_2)+W_3\subseteq(W_1+W_3)\cap(W_2+W_3)$
(in particolare il reticolo non è distributivo).

Se $W\leqslant V$ è un sottospazio, allora $\mathbb{S}(W)\subseteq\mathbb{S}(V)$ si dice il sottoreticolo completo (o sottospazio proiettivo completo) di sostegno W; $\mathbb{S}(V/W)\cong\{W'\in\mathbb{S}(V)|W\leqslant W'\}\subseteq\mathbb{S}(V)$ si dice la stella (proiettiva) completa di sostegno W, $\mathbb{P}(W)\subseteq\mathbb{P}(V)$ si dice il sottospazio proiettivo punteggiato di sostegno W.

La dualità canonica tra V e V^* induce un antiisomorfismo di reticoli $\tau_V:\mathbb{S}(V)\longrightarrow\mathbb{S}(V^*)$ dato da $W\mapsto W^\perp$ ed induce un antiisomorfismo $\mathbb{S}(V/W)\longrightarrow\mathbb{S}(W^\perp)\cong\mathbb{S}((V/W)^*)$. La dualità scambia sottospazi con stelle.

Un'applicazione lineare $f:V\longrightarrow V'$ induce una applicazione (insiemistica) $\mathbb{S}(f):\mathbb{S}(V)\longrightarrow\mathbb{S}(V')$ data da $W\mapsto f(W)$, soddisfacente alle seguenti proprietà:
$\mathbb{S}(f)(0)=0$; $\dim_C\mathbb{S}(f)(W)\leqslant\dim_C(W)$;
$\mathbb{S}(f)(W\cap W')\subseteq\mathbb{S}(f)(W)\cap\mathbb{S}(f)(W')$;
$\mathbb{S}(f)(W+W')=\mathbb{S}(f)(W)+\mathbb{S}(f)(W')$.

Se $F:\mathbb{S}(V)\longrightarrow\mathbb{S}(V')$ è una funzione avente le proprietà di diminuire le dimensioni e di rispettare la somma (di sottospazi), allora esiste $f:V\longrightarrow V'$ tale che $F=\mathbb{S}(f)$.

Geometria Proiettiva.

Spazi Proiettivi. Uno spazio proiettivo completo di spazio vettoriale sovrastante V ($\dim_C(V)=n+1$) è un insieme S dotato di una biiezione $\alpha_S:\mathbb{S}(V)\longrightarrow S$. Per trasporto risulta data una struttura di reticolo su S (le operazioni si indicano con $\vee$, $\wedge$ e la relazione con $\leqslant$); dunque se $s=\alpha(W)$ e $s'=\alpha(W')$ è $s\vee s'=\alpha(W\cap W')$, $s\wedge s'=\alpha(W+W')$ e $s\leqslant s'\Longleftrightarrow W\leqslant W'$. Lo spazio proiettivo punteggiato associato P è il sottinsieme di S dato da $\{s\in S|\alpha(s)\in\mathbb{P}(V)\}$; lo spazio proiettivo degli iperpiani associato I è il sottinsieme di S dato da $\{s\in S|\alpha(s)\in\mathbb{I}(V)\}$.

Lo spazio proiettivo duale S^* è costituito dallo stesso insieme S dotato della biiezione $\alpha^*_S=\alpha\circ\tau_V^{-1}:\mathbb{S}(V^*)\longrightarrow S$. Lo spazio proiettivo punteggiato P^* di S^* si identifica con lo spazio proiettivo degli iperpiani I associato a S

Per $t=\alpha(W)\in S$, con $W\in\mathbb{S}(V)$, poniamo $\dim(t):=\dim_C(W)-1$. In particolare: $\dim\alpha(0)=-1$ e $\alpha(0)\in S$ di dice il vuoto proiettivo; $t\in S$ si dice punto, retta, piano, iperpiano se $\dim(t)=0,1,2,n-1$ rispettivamente. Se $\dim(t)=m$ per $t\in S$, allora la sua dimensione considerato come $t\in S^*$ (elemento dello spazio proiettivo duale) risulta $\dim(t)=n-m-1$.

Formula di Grassmann: se $s,t\in S$ allora $\dim(s)+\dim(t)=\dim(s\vee t)+\dim(s\wedge t)$.

Teorema di Dualità Proiettiva: ogni asserzione scritta in termini di elementi generici di uno spazio proiettivo coinvolgendo solo la struttura di reticolo è vera se e solo se risulta vera l'asserzione duale che si ottiene sostituendo $\vee$ con $\wedge$, $\wedge$ con $\vee$, $\leqslant$ con $\geqslant$ (relazione duale) e dim con $n-1-\dim$.

Applicazioni Proiettive, Proiettività. Una applicazione proiettiva $\varphi:S\longrightarrow S'$ è una funzione indotta da una applicazione lineare $f:V\longrightarrow V'$ tra gli spazi vettoriali sovrastanti, i.e. tale che $\varphi(\alpha(W))=\alpha'(f(W))$ per ogni $W\in\mathbb{S}(V)$.

Due applicazioni lineari f,g sono sovrastanti la stessa applicazione proiettiva se e solo se $g=\lambda f$ per $\lambda\in C^\times$.

Definiamo $\mathrm{im}(\varphi)=\alpha'(\mathrm{im}(f))$, e $\ker(\varphi)=\alpha(\ker(f))$ che si chiama il luogo di degenerazione dell'applicazione φ.

Risulta $\dim(\mathrm{im}(\varphi))+\dim(\ker(\varphi))=\dim(S)-1$.

L'applicazione proiettiva $\varphi:S\longrightarrow S'$ non induce direttamente una applicazione tra gli spazi punteggiati, a causa del luogo di degenerazione, ma induce $\varphi:P\smallsetminus\ker(\varphi)\longrightarrow P'$.

Una proiettività è una applicazione proiettiva di S in sè il cui nucleo sia il vuoto proiettivo di S, ovvero che abbia immagine tutto S, o ancora tale che l'applicazione lineare sovrastante sia un isomorfismo. Il gruppo delle proiettività di S, sotto l'operazione di composizione, si indica con $\mathrm{PGL}(S)$ ed è isomorfo a $\mathrm{PGL}(V):=\mathrm{GL}(V)/C^\times$.

Siano $t=\alpha(W)$ e $t'=\alpha(W')$ elementi di S. Si dicono sghembi se $t\wedge t'=\alpha(0)$ (il vuoto di S, ovvero $W\cap W'=0$), incidenti altrimenti; si dicono complementari se sono sghembi e $t\vee t'=\alpha(V)$ (corrisponde a $W\oplus W'=V$). Indichiamo con T il sottospazio di S di sostegno t, e con T^* la stella di S di asse t.

L'inclusione $T\subseteq S$ è applicazione proiettiva con applicazione lineare sovrastante l'inclusione $W\leqslant V$.

La proiezione $S\longrightarrow T^*$ data da $s\mapsto s\vee t$ è applicazione proiettiva di sovrastante la proiezione $V\longrightarrow V/W$. Più generalmente la proiezione di t' dal centro t è $T'\longrightarrow T^*$ data da $s\mapsto s\vee t$ di applicazione sovrastante la proiezione $W'\longrightarrow(W'+W)/W$.

Se t e t'' sono complementari, allora la sezione della stella di asse t con t'' è $T^*\longrightarrow T''$ data da $u\mapsto u\wedge t''$ di applicazione sovrastante l'isomorfismo canonico $V/W\longrightarrow W''$.

Se t e t'' sono complementari, allora la proiezione di t' su t'' di centro t è $T'\longrightarrow T''$ data da $u\mapsto(u\vee t)\wedge t''$ composta di una proiezione e di una sezione.

Coordinate. Lo spazio proiettivo standard di dimensione n su C è $\mathbb{P}^n(C):=V_{n+1}(C)/C^\times$; se $v\in V$ ha coordinate $(X_0,\ldots,X_n)^t$, il punto $P=[v]$ ha coordinate omogenee $[X_0,\ldots,X_n]^t$.

Modelli topologici di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: sia $\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{E}^{n+1}(\mathbb{R})|\,\|x\|=1\}$ la (buccia della) sfera di raggio 1 in $\mathbb{E}^{n+1}(\mathbb{R})$. Sia $\sigma:\mathbb{S}^n\longrightarrow\mathbb{S}^n$ la mappa antipodale $x\mapsto -x$. Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\cong\mathbb{S}^n/\sigma$ (sfera modulo antipodia); in particolare si tratta di uno spazio topologico compatto. Siano $\mathbb{D}^n=\{x\in\mathbb{E}^n(\mathbb{R})|\,\|x\|\leqslant 1\}$ la palla di raggio 1 in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ e $\sigma:\mathbb{S}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{S}^{n-1}$ la mappa antipodale $x\mapsto -x$ del bordo di $\mathbb{D}^n$. Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\cong\mathbb{D}^n/\sigma$ (disco modulo antipodia del bordo).

Per $n=1$ possiamo identificare un isomorfismo $\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (via la "proiezione dal polo nord" sull'asse X: $(x,y)\mapsto\frac{x}{1-y}$) tale che $(x,y)\mapsto[1-y,x]$. La retta proiettiva reale si può ancora identificare con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ovvero con il segmento $[0,1]$ in cui gli estremi $\{0,1\}$ sono stati tra loro identificati.

La proiezione stereografica dal polo nord di $\mathbb{S}^2$ (sul piano $Z=0$: $(x,y,z)\mapsto(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z})$) dà un isomorfismo $\mathbb{S}^2\longrightarrow\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tramite

$(x,y,z) \mapsto [1-z, x+iy]$ (dunque la retta proiettiva complessa è una sfera reale, detta sfera di Riemann).

Per $n=2$ possiamo identificare il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con la sfera 3-dimensionale modulo antipodia, oppure con il disco 2-dimensionale modulo antipodia del bordo; ma non è isomorfo al prodotto di due rette proiettive, che invece risulta una superficie torica. Si osservi che dato un quadrato $[0,1] \times [0,1]$ possiamo costruire: un cilindro (identificando $(x,0) \sim (x,1)$ per ogni $x \in [0,1]$) e un nastro di Moëbius (identificando $(x,0) \sim (1-x,1)$ per ogni $x \in [0,1]$); la prima figura è orientabile, mentre la seconda no, come si vede seguento il cammino $[1/2, y]$ per $y \in [0,1]$ (che rovescia l'orientamento). Partendo dal cilindro possiamo costruire tre figure senza bordo: la sfera (colassando a un punto ciascuno dei due cerchi $[0,y]$ e $[1,y]$), il toro (identificando $(0,y) \sim (1,y)$ per ogni $y \in [0,1]$) e l'otre o bottiglia di Klein (identificando $(0,y) \sim (1-y,y)$ per ogni $y \in [0,1]$); si osservi che quest'ultima superficie non è orientabile, poiché contiene nastri di Moëbius, mentre sfera e toro sono orientabili. Partendo dal nastro di Moëbius e identificando ulteriormente i bordi rimanenti in ordine inverso (identificando $(0,y) \sim (1-y,y)$ per ogni $y \in [0,1]$) si ottiene il piano proiettivo reale; anch'esso è superficie non orientabile, poiché contiene nastri di Moëbius. Sfere e piani proiettivi si ottengono anche per identificazione dei due lati di un diagono (poligono con due lati) nei due modi possibili (se il diagono è una sfera unitaria, e i due lati sono le semicirconferenze tra polo nord e polo sud, si tratta di $(x,y) \sim (-x,y)$ oppure di $(x,y) \sim (-x,-y)$).

Descrizione ricorsiva: $\mathbb{P}^n(C) \cong \mathbb{A}^n(C) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(C)$. Conteggio degli elementi proiettivi sui corpi finiti: se $\mathbb{F}_q$ è il corpo con $q=p^f$ elementi, allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ ha $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \Sigma_{i=0}^n q^i$ punti e altrettanti iperpiani.

Un sistema di riferimento in uno spazio proiettivo punteggiato di spazio vettoriale sovrastante V è il dato di un isomorfismo proiettivo $\rho : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(C)$. Equivalentemente si tratta del dato di una base ordinata di V (a meno di proporzionalità); oppure di $n+2$ punti $P_0, \ldots, P_n, U$ di P tali che $n+1$ tra loro non stiano su un iperpiano (i $P_0, \ldots, P_n$ formano l'edro fondamentale, U è il punto unità); o dualmente di $n+2$ iperpiani $p_0, \cdots, p_n, u$ tali che $n+1$ tra loro abbiano sempre intersezione vuota.

Dato un riferimento su $\mathbb{P}(V)$, esiste unica l'applicazione proiettiva $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}'(V)$ che sia assegnata su quel riferimento.

In particolare per ogni permutazione σ del gruppo simmetrico S_{n+2} esiste una proiettività φ_σ tale che $\varphi_\sigma(P_i) = P_{\sigma i}$. Nel caso del piano proiettivo ($n=2$), ogni permutazione dei quattro punti fondamentali induce una permutazione dei tre punti diagonali (del quadrilatero); abbiamo un morfismo suriettivo di gruppi $S_4 \to S_3$ il cui nucleo è il sottogruppo V di Klein di S_4.

Scelti dei riferimenti su $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}'(V)$, allora ogni applicazione proiettiva $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}'(V)$ si rappresenta (a meno di proporzionalità) tramite una matrice $A \in M_{n+1, n'+1}(C)$. Il gruppo $\mathrm{PGL}(\mathbb{P}(V))$ è isomorfo al gruppo quoziente $\mathrm{PGL}(n,C) := \mathrm{GL}(n+1,C)/C^\times$.

Dato un riferimento su uno spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}$, il riferimento duale sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^*$ si dice il riferimento di Plücker, e le coordinate in quel riferimento si scrivono in riga. Identificando un punto di coordinate a in $\mathbb{P}^*$ con l'iperpiano di $\mathbb{P}$ la cui equazione è data da quelle coordinate abbiamo che un punto di coordinate X appartiene all'iperpiano se e solo se $aX=0$.

Se $\varphi : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ ha matrice A in un riferimento scelto, i.e. $\varphi(X) = AX$ ove le X sono coordinate omogenee, allora $\varphi : \mathbb{P}^* \longrightarrow \mathbb{P}^*$ ha matrice A^{-1} nel riferimento duale, i.e. $\varphi(a) = aA^{-1}$.

Reciprocità, Polarità, Sistemi nulli. Una reciprocità è un isomorfismo proiettivo di uno spazio proiettivo sul suo duale $\Phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^*(V)$. È equivalente ad avere un isomorfismo $V \to V^*$, o anche ad una forma bilineare non degenere $\varphi : V \times V \to C$. Una reciprocità si dice una polarità (risp. sistema nullo) se la forma φ è simmetrica (risp. alternante).

Una reciprocità determina una corrispondenza biunivoca tra punti e iperpiani di $\mathbb{P}(V)$. Se si tratta di una polarità, un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ e l'iperpiano $\Phi(P) \in \mathbb{P}^*(V) \cong \mathbb{I}(V)$ sono detti polo e polare uno dell'altro.

Una reciprocità Φ è polarità o sistema nullo se e solo se per ogni $P, Q \in \mathbb{P}(V)$ si ha $P \in \Phi(Q) \Leftrightarrow Q \in \Phi(P)$. In tal caso, se la caratteristica del corpo C è diversa da 2, Φ è polarità (risp. sistema nullo) se e solo se esiste (risp. non esiste) un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ tale che $P \notin \Phi(P)$.

Varietà Proiettive. Un sottinsieme L di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ si dice una varietà proiettiva (lineare) se è del tipo $\mathbb{P}(W)$ per un sottospazio W di V; cioè se e solo se è stabile per combinazioni lineari dei sui punti; ovvero sse per ogni coppia di suoi punti contiene la retta che li congiunge.

Dati m punti $P_1, \ldots, P_m$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$, si dicono in posizione generale se gli m vettori che li rappresentano sono *li*, ovvero sse la più piccola varietà proiettiva che li contiene ha dimensione $m-1$. In tal caso le equzioni della varietà proiettiva congiungente gli m punti sono date dalla condizione $\mathrm{rk}(X \quad P_1 \quad \cdots \quad P_m) = m$, ove $X = (X_0, \ldots, X_n)$ sono le coordinate scelte in $\mathbb{P}(V)$.

Spazi Affini e Proiettivi. L'immersione standard $\mathbb{A}^n(C) \longrightarrow \mathbb{P}^n(C)$ data da $(X_1, \ldots, X_n) \mapsto [1, X_1, \ldots, X_n]$ determina un isomorfismo di $\mathbb{A}^n(C)$ sull'aperto U di $\mathbb{P}^n(C)$ determinato da $X_0 \neq 0$. L'applicazione inversa $U \longrightarrow \mathbb{A}^n(C)$ si scrive come $[X_0, X_1, \ldots, X_n] \mapsto (\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0})$.

Una matrice $A \in \mathrm{PGL}(n,C)$ di una proiettività di $\mathbb{P}^n(C)$ si restringe ad una affinità di $\mathbb{A}^n(C)$ se e solo se è (proporzionale a una) della forma $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & B' \end{smallmatrix}\right)$ con $B' \in \mathrm{GL}(n,C)$, ovvero se e solo se lascia (globalmente) stabile l'iperpiano "all'infinito" di equazione $X_0 = 0$. Viceversa ogni affinità di $\mathbb{A}^n(C)$ si estende unicamente ad una proiettività di $\mathbb{P}^n(C)$ della forma suddetta. Le traslazioni di $\mathbb{A}^n(C)$ sono le (restrizioni di) proiettività che lasciano puntualmente fermo l'iperpiano all'infinito. La simmetria di asse V e direzione U è la proiettività involutoria con V e U spazi di punti uniti complementari e U contenuto nell'iperpiano all'infinito; in particolare se V è un punto, si tratta della simmetria centrale di centro quel punto.

Due varietà affini in $\mathbb{A}^n(C)$ sono parallele se e solo se i loro completamenti proiettivi hanno intersezione lungo l'iperpiano all'infinito, i cui punti quindi sono le "direzioni" possibili nello spazio affine.

Dati uno spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}$ e un iperpiano $H \subseteq \mathbb{P}$, l'insieme $\mathbb{P} \smallsetminus H$ resta munito in modo canonico di una struttura di spazio affine (della stessa dimensione di $\mathbb{P}$) con spazio delle traslazioni associato $T := \{\psi \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P}) \mid \psi(H) \subseteq H\}$. Scegliendo un riferimento in modo che $H = V(X_0)$, i quozienti $(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0})$ si dicono le coordinate affini associate su $\mathbb{P} \smallsetminus H$.

Retta Proiettiva, Trasformazioni di Moëbius, Birapporto. La retta proiettiva standard $\mathbb{P}^1(C)$ si può identificare con la retta affine $\mathbb{A}^1(C)$ a cui s'è aggiunto un punto all'infinito: $C \cup \{\infty\}$ ove ∞ è un simbolo fuori di C. Una proiettività φ della retta è data da una matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}(2,C)$, e in coordinate affini si può scrivere come $\varphi(X) = \frac{c+dX}{a+bX}$ (trasformazioni lineari fratte, o trasformazioni di Moëbius, o omografie), e si tratta di affinità se si scrivono $\varphi(X) = c + dX$.

Dati tre elementi distinti $a, b, c \in C \cup \{\infty\}$, la proiettività che agisce con $\varphi(a) = \infty$, $\varphi(b) = 0$ e $\varphi(c) = 1$ si scrive come $\varphi(X) =$

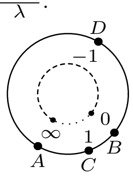
$\frac{(c-a)(X-b)}{(c-b)(X-a)}$.
Definiamo come birapporto dei quattro elementi $a,b,c,X \in C \cup \{\infty\}$ il valore $\varphi(X)$: $\mathrm{CR}(a,b,c,X)=(abcX):=\frac{(c-a)(X-b)}{(c-b)(X-a)}$. Si tratta di un invariante per trasformazioni di Moëbius. Si noti che $(\infty 0 1 X)=X$.

Dati quattro punti A,B,C,X di $\mathbb{P}^1(C)$ (di cui i primi tre distinti) il birapporto (cross ratio) si calcola tramite: $\mathrm{CR}(A,B,C,X)=(ABCX)=\frac{x_0}{x_1}$ ove $[x_0,x_1]$ sono le coordinate omogenee di X nel riferimento di $\mathbb{P}^1(C)$ costituito dai punti A,B,C. Si ha che $\mathrm{CR}(A,B,C,X)=\frac{\mathrm{DR}(A,C,X)}{\mathrm{DR}(B,C,X)}$.
In coordinate qualsiasi, se $A=[a_0,a_1]$, $B=[b_0,b_1]$, $C=[c_0,c_1]$, allora $(ABCX)=\frac{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{smallmatrix}\right|} \Big/ \frac{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & a_1 \\ x_0 & x_1 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} b_0 & b_1 \\ x_0 & x_1 \end{smallmatrix}\right|}$.

In generale le proiettività conservano gli allineamenti e il birapporto di quattro punti allineati.

Azione delle permutazioni: se $(ABCD)=\lambda$, allora:
$(ABCD)=(BADC)=(DCBA)=(CDAB)=\lambda$;
$(BACD)=(ABDC)=(CDBA)=(DCAB)=\frac{1}{\lambda}$;
$(ACBD)=(BDAC)=(DBCA)=(CADB)=1-\lambda$;
$(ADCB)=(BCDA)=(DABC)=(CBAD)=\frac{\lambda}{\lambda-1}$;
$(CABD)=(DBAC)=(BDCA)=(ACDB)=\frac{1}{1-\lambda}$;
$(DACB)=(CBDA)=(ADBC)=(BCAD)=\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Il birapporto è nullo se $X=B$, 1 se $X=C$ e ∞ se $X=A$. Nel caso $C=\mathbb{R}$ il valore di $(ABCX)$ risulta negativo se i primi due punti separano gli ultimi due, positivo altrimenti.



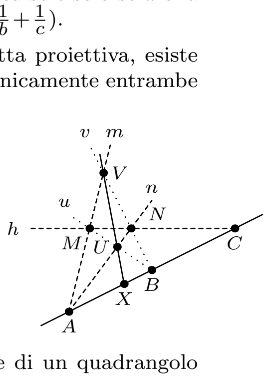
I sei valori per permutazioni del birapporto tra quattro fissati punti non sono tutti distinti se $\lambda=1$ (allora i valori sono $1,0,\infty$ e vi sono solo tre punti distinti), oppure $\lambda=-1$ (allora i valori sono $-1,2,1/2$, i quattro punti sono distinti e si dicono una quaterna armonica) oppure se $\lambda^2-\lambda+1=0$ (e allora i quattro punti sono distinti e si dicono una quaterna equianarmonica; su $\mathbb{R}$ non esistono quaterne equianarmoniche).

Una quaterna A,B,C,X si dice armonica se $(ABCX)=-1$. Il quarto armonico dopo tre punti distinti è unico, e di tratta del punto di mezzo tra i primi due se il terzo punto è ∞. Se φ è una involuzione di $\mathbb{P}^1(C)$ (cioè una proiettività non identica tale che $\varphi^2=\mathrm{id}$) con due punti uniti A e B, allora per ogni punto P distinto dai punti uniti vale $(ABP\varphi(P))=-1$. Viceversa dati due punti A e B di $\mathbb{P}^1(C)$ e $c \in C \smallsetminus \{0,\infty\}$, esiste una unica proiettività con punti fissi A e B e definita su $P \neq A,B$ da $(ABP\varphi(P))=c$; si tratta di una involuzione sse $c=-1$.

Il quarto armonico dopo i punti a,b,∞ è il punto medio $\frac{a+b}{2}$ tra a e b. Il quarto armonico dopo i punti $0,\infty,x$ è il punto opposto $-x$. La quaterna $0,a,b,c$ è armonica se e solo se a è la media armonica di b e c, ovvero se $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$.

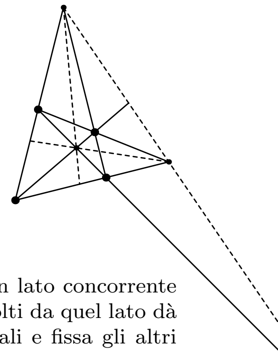
Date due coppie di punti distinti della retta proiettiva, esiste una unica coppia di punti che separa armonicamente entrambe le coppie date.

Costruzione grafica del quarto armonico dopo tre punti: siano A,B,C punti di una retta proiettiva r immersa nel piano $\mathbb{P}^2(C)$; si traccino due rette distinte $m,n (\neq r)$ per A e una retta $h (\neq r)$ per C; $M:=m \cap h$ e $N:=n \cap h$; $u:=M \vee B$ e $v:=N \vee B$; $U:=u \cap n$ e $V:=v \cap m$; $k:=U \vee V$; il quarto armonico è $X:=k \cap r$.



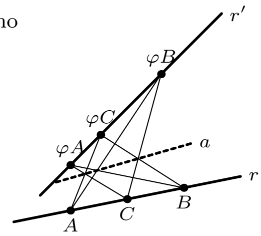
La costruzione consiste nella realizzazione di un quadrangolo piano completo di diagonale la retta data, e sfrutta le proprietà di questa figura.

Quadrangolo piano completo: è la figura formata da quattro punti, a tre a tre non allineati, detti vertici e dalle sei rette che li congiungono, dette lati. I punti di intersezione di coppie di lati opposti si dicono i punti diagonali. Le rette passanti per due punti diagonali si dicono le diagonali del quadrangolo; in ogni diagonale i punti diagonali separano armonicamente i punti di intersezione con i rimanenti due lati.



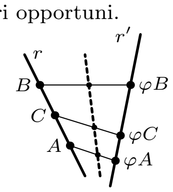
Infatti la composizione delle proiezioni su un lato concorrente con la diagonale rispetto a vertici non coinvolti da quel lato dà una involuzione che scambia i punti diagonali e fissa gli altri due.

Proiettività tra rette immerse nel piano: una proiettività tra due rette distinte del piano si scrive come composizione di al più due proiezioni da rette a rette di centri opportuni: se $\varphi: r \longrightarrow r'$, e $A,B,C \in r$ distinti, allora i tre punti $(A \vee \varphi B) \cap (B \vee \varphi A)$, $(A \vee \varphi C) \cap (C \vee \varphi A)$ e $(B \vee \varphi C) \cap (C \vee \varphi B)$ sono allineati, la retta a che li congiunge si dice asse di collineazione per φ, e la proiettività si scrive come composizione della proiezione $r \longrightarrow a$ di centro φA e della proiezione $a \longrightarrow r'$ di centro A. Si ha che φ è una proiezione (da un punto) se e solo se $r \cap r'$ viene mandato in sè.



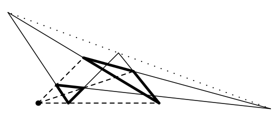
Una proiettività di una retta in sè si scrive come proiezione di al più tre proiezioni da rette a rette di centri opportuni.

Proiettività tra rette sghembe nello spazio proiettivo: si tratta di proiezioni di centro una retta (si può scegliere qualsiasi retta distinta da r ed r' che sia complanare con le tre rette $A \vee \varphi A$, $B \vee \varphi B$ e $C \vee \varphi C$).



Teorema di Desargues. Due triangoli A,B,C e A',B',C' (di lati a,b,c e a',b',c', ove una minuscola congiunge le due maiuscole diverse) si dicono prospettivi se le rette $A \vee A'$, $B \vee B'$ e $C \vee C'$ si incontrano in un punto; si dicono omologici se i tre punti $a \wedge a'$, $b \wedge b'$ e $c \wedge c'$ sono allineati.

Due triangoli sono prospettivi se e solo se sono omologici (si tratta di un'affermazione autoduale: una implicazione è duale dell'altra).



Teoremi fondamentali della Geometria Proiettiva.

Siano L ed M varietà lineari sghembe in $\mathbb{P}$ della stessa dimensione n; allora ogni proiettività di L su M è una proiezione di centro una varietà lineare di dimendione n.

Siano L ed M varietà lineari della stessa dimensione in $\mathbb{P}$ spazio proiettivo di dimensione abbastanza grande; allora ogni proiettività di L su M è composizione di al più due proiezioni.

Siano L, M ed N varietà lineari in $\mathbb{P}$ tali che N sia sghemba con le altre due e $L \vee N = M \vee N$. Allora $P \mapsto (P \vee N) \wedge M$ induce una proiettività di L su M che è l'identità su $L \wedge M$. Viceversa, una proiettività di L su M che sia l'identità su $L \wedge M$ è proiezione di M su L da un centro di dimensione $\dim(L) - \dim(L \wedge M) - 1$.

Siano L ed M varietà lineari della stessa dimensione s in $\mathbb{P}$; sia data una proiettività di L su M che sia l'identità ristretta a $N \subseteq L \wedge M$ di dimensione $s-i$ $(1 \leqslant i \leqslant s+1)$. Allora la proiettività è composizione di al più i proiezioni da punti.

Ogni proiettività tra varietà lineari di dimensione s in $\mathbb{P}$ è prodotto di al più $s{+}2$ proiezioni da punti.

Studio astratto delle Proiettività. Se la matrice $A{\in}M_n(C)$ ha tutti gli autovalori in C, allora A è simile in C ad A^t; in particolare A e A^t hanno gli stessi autovalori con uguali molteplicità e nullità (ma in generale gli autovettori sono diversi).

Elementi uniti delle proiettività sono i sottospazi proiettivi mandati in sè stessi. I punti uniti corrispondono agli autovettori della matrice A della proiettività; gli iperpiani uniti (in coordinate plückeriane) corrispondono agli autovettori della matrice A^t. Dunque c'è la stessa configurazione di punti e iperpiani uniti. Due elementi uniti si dicono associati se corrispondono allo stesso autovalore, non associati altrimenti. Un punto ed un iperpiano uniti e non associati si appartengono. Se un autovalore ha un unico punto unito, e dunque un unico iperpiano unito, questi si appartengono sse l'autovalore ha molteplicità maggiore di 1.

Se C è algebricamente chiuso, allora ogni proiettività ammette almeno una bandiera (i.e. una catena $L_0{\subset}L_1{\subset}\cdots{\subset}L_{n-1}$) di varietà unite, e ogni varietà unita si inserisce in una tale bandiera.

Le involuzioni sono le proiettività φ non identiche tali che φ^2 sia l'identità. Se C è algebricamente chiuso, una proiettività è una involuzione sse esistono due sottospazi complementari L ed M di punti uniti, e associati a due autovalori uno opposto dell'altro. Per ogni retta $P{\vee}Q$ con $P{\in}L$ e $Q{\in}M$ la proiettività indotta è una involuzione avente P e Q come punti uniti. Nel caso delle rette proiettive: una proietività è una involuzione sse esiste una coppia di punti involutoria ($P{\neq}Q$ tali che $\varphi(P){=}Q$ e $\varphi(Q){=}P$); inoltre esiste unica l'involuzione una volta assegnati le immagini di due punti distinti (in particolare se vengono assegnati due punti fissi distinti).

Una omologia è una proiettività non identica con un iperpiano di punti uniti, detto asse di omologia; per dualità esiste un punto unito centro di una stella di iperpiani uniti, detto centro di omologia; l'omologia si dice speciale o generale a seconda che il centro appartenga o no all'asse. La matrice di una omologia in un riferimento che estenda un riferimento dell'asse è del tipo

$\begin{pmatrix} \mu & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \lambda\mathbb{I} \\ 0 & \end{pmatrix}$ se generale (il centro è il primo punto del riferimento), il rapprto μ/λ si dice l'invariante dell'omologia e per ogni punto P fuori dell'asse e diverso dal centro si ha $(CHP\varphi(P)){=}\mu/\lambda$;

ovvero

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \lambda\mathbb{I} \\ 0 & \end{pmatrix}$ se speciale (l'ulteriore punto del riferimento appartiene ad una retta unita esterna all'asse), il centro è il primo punto del riferimento, l'asse è $P_0{\vee}P_2{\vee}\cdots{\vee}P_n$.

Proiettività della Retta. Se C è algebricamente chiuso, le forme canoniche di Jordan classificano le proiettività di $\mathbb{P}^1(C)$ in sè. Si hanno solo tre forme: l'identità (di matrice $\lambda\mathbb{I}$ con $\lambda{\neq}0$), l'omologia generale con due punti uniti (di matrice $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$ non nulli), e l'omologia speciale con un solo punto unito (di matrice $\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}0$).

Se C è qualsiasi, definiamo $\Delta(A){:=}(\mathrm{tr}(A))^2{-}4\det(A)$; una proiettività si dice parabolica se $\Delta(A){=}0$, iperbolica se $\Delta(A)$ è quadrato in C, ellittica se $\Delta(A)$ non è quadrato in C (queste condizioni dipendono solo dalla proiettività e non dalla matrice che la rappresenta). Una proiettività è parabolica, iperbolica, ellittica a seconda che abbia un unico punto unito (necessariamente razionale su C), due punti uniti distinti in $\mathbb{P}^1(C)$, nessuno punto unito razionale su C (e allora ha due punti uniti in $\mathbb{P}^1(C[\sqrt{\Delta}])$).

Se $C{=}\mathbb{R}$ e φ è una involuzione, allora φ non è parabolica, ed è ellittica o iperbolica a seconda che $\det(A)$ sia positivo o negativo. Se P,Q sono punti distinti, non uniti e non uno l'immagine dell'altro per l'involuzione φ, allora φ è ellittica o iperbolica a seconda che $(P\varphi(P)Q\varphi(Q))$ sia negativo o positivo.

Proiettività del Piano. Se C è algebricamente chiuso, le forme canoniche di Jordan classificano le proiettività di $\mathbb{P}^2(C)$ in sè. Si hanno sei forme: l'identità (di matrice $\lambda\mathbb{I}$ con $\lambda{\neq}0$);

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$ non nulli, è l'omologia generale (centro P_0 e asse $P_1{\vee}P_2$);

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}0$, è l'omologia speciale (centro P_0 e asse $P_0{\vee}P_2$);

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\nu\end{pmatrix}$ con λ,μ,ν distinti e non nulli, vi sono tre punti e tre rette unite;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$ non nulli, vi sono due punti uniti P_0 e P_2, e due rette unite $P_0{\vee}P_1$ e $P_0{\vee}P_2$;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}0$, vi è un unico punto unito P_0 e un'unica retta unita $P_0{\vee}P_1$.

Proiettività dello Spazio. Se C è algebricamente chiuso, le forme canoniche di Jordan classificano le proiettività di $\mathbb{P}^3(C)$ in sè. Si hanno quattordici forme: l'identità (di matrice $\lambda\mathbb{I}$ con $\lambda{\neq}0$);

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ omologia speciale di asse $P_0{\vee}P_2{\vee}P_3$ e centro P_0; sono unite le rette passanti per il centro;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ la retta $P_0{\vee}P_3$ è di punti uniti, la retta $P_0{\vee}P_1$ è unita, il piano $P_0{\vee}P_1{\vee}P_2$ è unito;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ $P_0{\vee}P_2$ è retta di punti uniti, le rette $P_0{\vee}P_1$ e $P_2{\vee}P_3$ sono unite, i piani $P_0{\vee}P_1{\vee}P_3$ e $P_0{\vee}P_2{\vee}P_3$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ il punto P_0, la retta $P_0{\vee}P_1$ e il piano $P_0{\vee}P_1{\vee}P_2$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$; $P_0{\vee}P_1$ e $P_2{\vee}P_3$ sono rette di punti uniti, e sono uniti i piani dei fasci di asse quelle due rette;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$; la retta $P_2{\vee}P_3$ è di punti uniti, la retta $P_0{\vee}P_1$ e i piani che la contengono sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\mu&1\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$; i punti P_0 e P_2, le rette $P_0{\vee}P_1$ e $P_2{\vee}P_3$, i piani $P_0{\vee}P_1{\vee}P_3$ e $P_0{\vee}P_2{\vee}P_3$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$; è l'omologia generale di asse $P_1{\vee}P_2{\vee}P_3$ e centro P_0;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&1&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$; i punti P_0 e quelli della retta $P_1{\vee}P_3$, sono uniti; il piano $P_1{\vee}P_2{\vee}P_3$ e le rette di quel piano contenenti P_1 sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&1&0\\0&0&\mu&1\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda{\neq}\mu$; i punti P_0 e P_1, la retta $P_1{\vee}P_2$ ed il piano $P_1{\vee}P_2{\vee}P_3$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\nu&0\\0&0&0&\nu\end{pmatrix}$ con λ, μ e ν distinti; P_0, P_1 e i punti della retta $P_2{\vee}P_3$ sono uniti; sui piani uniti $P_0{\vee}P_2{\vee}P_3$ e $P_1{\vee}P_2{\vee}P_3$ sono indotte omologie generali;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\nu&1\\0&0&0&\nu\end{pmatrix}$ con λ, μ e ν distinti; P_0, P_1 e P_2 sono punti uniti, la retta $P_2{\vee}P_3$ è unita; sui piani uniti $P_0{\vee}P_2{\vee}P_3$ e $P_1{\vee}P_2{\vee}P_3$ sono indotte omologie speciali;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\nu&0\\0&0&0&\xi\end{pmatrix}$ con i quattro autovalori distinti; i quattro punti fondamentali sono uniti, come pure i quattro iperpiani e i sei assi.

Collineazioni. Se $\sigma{:}C{\longrightarrow}C'$ è un isomorfismo di corpi, e V, V' spazi vettoriali su C, C' risp., una applicazione di gruppi $f{:}V{\longrightarrow}V'$ si dice σ-lineare se $f(cv){=}c^\sigma f(v)$ per ogni $c{\in}C$ e $v{\in}V$. Una applicazione $\mathbb{P}(V){\longrightarrow}\mathbb{P}(V')$ si dice una σ-proiettività se è indotta da una applicazione σ-lineare.

Nota che se $C{=}C'{=}\mathbb{R}$, allora l'unico automorfismo di corpo è l'applicazione indentica (dipende dalla struttura d'ordine dei reali).

Una applicazione suriettiva $\varphi{:}\mathbb{P}^1(C){\longrightarrow}\mathbb{P}^1(C')$ tale che conserva i birapporti, $(\varphi A\varphi B\varphi C\varphi D){=}(ABCD)^\sigma$ per ogni quaterna di punti distinti, è una σ-proiettività. Se $C{=}C'$, $\sigma{=}\mathrm{id}$: le proiettività tra rette sono le applicazioni biunivoche che conservano il birapporto.

Siano C e C' corpi di caratteristica diversa da due; una applicazione suriettiva $\varphi{:}\mathbb{P}^1(C){\longrightarrow}\mathbb{P}^1(C')$ tale che conserva le quaterne armoniche è una σ-proiettività per un ben determinato $\sigma{:}C{\longrightarrow}C'$ iso di corpi (che dipende da φ). Se $C{=}C'{=}\mathbb{R}$: le proiettività tra rette sono le applicazioni biunivoche che conservano l'armonia.

Siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ spazi proiettivi di dimensione $n{\geqslant}2$ sui corpi C e C' risp., e $\psi{:}\mathbb{P}{\longrightarrow}\mathbb{P}'$ una collineazione, i.e. una biiezione che conservi l'allineamento dei punti; allora ψ è una σ-proiettività per un ben determinato $\sigma{:}C{\longrightarrow}C'$ iso di corpi (che dipende da ψ). Se $C{=}C'{=}\mathbb{R}$: le proiettività tra spazi di dimensione $n{\geqslant}2$ sono le collineazioni.

Forme Quadratiche e Bilineari.

Forme Bilineari. Siano V e W spazi vettoriali su C; una applicazione bilineare è una applicazione $\varphi{:}V{\times}W{\longrightarrow}C$ tale che $\varphi(v{+}v',w){=}\varphi(v,w){+}\varphi(v',w)$, $\varphi(v,w{+}w'){=}\varphi(v,w){+}\varphi(v,w')$ e $\varphi(\lambda v,w){=}\lambda\varphi(v,w){=}\varphi(v,\lambda w)$.

Una forma bilineare determina dua applicazioni lineari, una trasposta dell'altra, $\varphi_1{:}V{\to}W^*$ e $\varphi_2{:}W{\to}V^*$ tramite $\varphi_1(v)(w){=}\varphi(v,w){=}\varphi_2(w)(v)$.

Si definisce $N_1(\varphi){=}\ker(\varphi_1)$ (nucleo sinistro di φ) e $N_2(\varphi){=}\ker(\varphi_2)$ (nucleo destro di φ). La forma si dice non degenere se i nuclei sono nulli. Se gli spazi vettoriali hanno dimensione finita, la forma è non degenere se e solo se le applicazioni φ_1 e φ_2 sono isomorfismi.

Siano $v_1,\dots,v_n$ e $w_1,\dots,w_m$ basi di V e W rispettivamente; allora la matrice $A{=}(\varphi(v_i,w_j))$ si dice associata a φ nelle basi date. Se $v{\in}V$ ha coordinate (x_i) nella base scelta di V e $w{\in}W$ ha coordinate (y_i) nella base scelta di W allora $\varphi(v,w){=}x^tAy$. Cambiamenti di base di matrici P $(x{=}Px')$ e Q $(y{=}Qy')$ rispettivamente in V e W cambiano la matrice di φ in P^tAQ.

Due matrici A e B in $M_n(C)$ si dicono congruenti se esiste $P{\in}\mathrm{GL}(n,C)$ tale che $B{=}P^tAP$. Si tratta di una relazione di equivalenza: due matrici congruenti rappresentano la stessa forma bilineare su $V{=}W$ in due basi diverse.

Una forma bilineare φ su uno spazio vettoriale V è una applicazione bilineare $\varphi{:}V{\times}V{\longrightarrow}C$; è non degenere sse una (e dunque ogni) matrice associata è invertibile; si dice simmetrica (risp. alternante) se $\varphi(v,w){=}\varphi(w,v)$ per ogni $v,w{\in}V$ (risp. $\varphi(v,v){=}0$ per ogni $v{\in}V$). Una forma è simmetrica (risp. alternante) se e solo se una (e allora ogni) matrice associata è simmetrica (risp. antisimmetrica). Se il corpo C ha caratteristica diversa da 2, allora φ è alternate se e solo se $\varphi(v,w){=}{-}\varphi(w,v)$ per ogni $v,w{\in}V$. Se il corpo non ha caratteristica due, ogni forma bilineare su V si scrive unicamente come somma di una forma bilineare simmetrica e di una antisimmetrica; ogni matrice $A{\in}M_n(C)$ è somma di una matrice simmetrica $\frac{A+A^t}{2}$ e di una antisimmetrica $\frac{A-A^t}{2}$.

Se la forma è simmetrica o alternante, allora i due nuclei coincidono, e la dimensione del nucleo $N(\varphi)$ coincide con la nullità di una qualunque matrice associata. Inoltre se U è un complementare di $N(\varphi)$ in V, allora $\varphi_{|U}$ è una forma bilineare (simmetrica o alternante) non degenere su U. In particolare esiste una base di V tale cha la matrice associata ha forma $\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&B\end{smallmatrix}\right)$ con B matrice non degenere.

Ortogonalità. Una base di V si dice ortogonale per la forma φ se $\varphi(v_i,v_j){=}0$ se $i{\neq}j$; di dice ortonormale se $\varphi(v_i,v_j){=}\delta_{i,j}$.

Dato un sottospazio U di V, si definiscono gli ortogonali sinistro e destro di U per la forma φ tramite ${}^{\perp}U{=}\{v{\in}V|\varphi(v,U){=}0\}$ e $U^{\perp}{=}\{v{\in}V|\varphi(U,v){=}0\}$. Se la forma è simmetrica o alternante, i due ortogonali coincidono; se la forma è non degenere, si hanno le usuali regole: $U{\leqslant}U'$ implica $U^{\perp}{\geqslant}U'^{\perp}$, $U^{\perp\perp}{=}U$, $(U{+}U')^{\perp}{=}U^{\perp}{\cap}U'^{\perp}$, $(U{\cap}U')^{\perp}{=}U^{\perp}{+}U'^{\perp}$; inoltre $\dim_C U{+}\dim_C U^{\perp}{=}\dim_C V$. Per ogni sottospazio U di V risulta: $U{\cap}U^{\perp}{=}0$ sse $\varphi_{|U}$ è non degenere, sse $V{=}U{\oplus}U^{\perp}$ (se φ è non degenere è ancora equivalente che $V{=}U{+}U^{\perp}$).

Un vettore $v{\in}V$ si dice isotropo se $\varphi(v,v){=}0$. Un sottospazio U si dice isoptropo se $U{\subseteq}U^{\perp}$, cioè se e solo se la forma ristretta a U è identicamente nulla. Se φ è non degenere, allora per ogni sottospazio U non isotropo si ha che $V{=}U{\oplus}U^{\perp}$ (teorema di decomposizione ortogonale). La forma ammette vettori isotropi se e solo se esistono sottospazi U di V con $U{\cap}U^{\perp}{\neq}0$. Se la caratteristica del corpo C non è 2, e la forma φ non è nulla, allora esistono vettori non isotropi; ed esistono basi ortogonali rispetto a φ. In particolare, se C è algebricamente chiuso, per ogni matrice simmetrica A esiste un cambiamento di base P tale che $P^tAP{=}\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{I}_m&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}\end{smallmatrix}\right)$.

Se $C{=}\mathbb{R}$, allora per ogni matrice simmetrica A esiste un cambiamento di base P tale che $P^tAP{=}\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{I}_p&\mathbb{O}&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&-\mathbb{I}_q&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{O}&\mathbb{O}\end{smallmatrix}\right)$ (teorema di Sylvester o regola di inerzia). In particolare nel caso reale una forma simmetrica non degenere ammette una base ortonormale se e solo se $\varphi(v,v){>}0$ per ogni $v{\neq}0$; in tal caso la forma si dice *definita positiva*; si dice *definita negativa* se la sua opposta è definita positiva.

Una matrice reale simmetrica A è definita positiva sse $A{=}P^tP$ con $P{\in}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (i.e. se è congruente alla matrice identica), o anche sse esiste una catena di minori principali positivi, e in tal caso ogni minore principale è positivo; una matrice simmetrica è definita negativa sse esiste una catena di minori principali con segni alterni (iniziando con un valore negativo).

Isometrie. Una applicazione lineare $f{:}V{\to}W$ tra spazi vettoriali dotati di forme bilineari φ e φ si dice una isometria se $\psi(fv,fv'){=}\varphi(v,v')$ per ogni $v,v'{\in}V$. In tal caso f è un isomorfismo. Se A, B, F sono le matrici rispettivamente di φ, ψ, f in fissate basi di V e W, allora f è isometria se e solo se $F^tBF{=}A$.

Per ogni coppia a,b di naturali si definisce il gruppo $\mathrm{O}_{a,b}(\mathbb{R})$ delle isometrie reali di segnatura (a,b) come il gruppo delle matrici P d'odine $a{+}b$ tali che $P^tAP{=}A$ per $A{=}\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{I}_a&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&-\mathbb{I}_b\end{smallmatrix}\right)$. Si dicono isometrie euclidee se $b{=}0$ (sono le matrici ortogonali) e trasformazioni di Lorentz se $b{=}1$. Il determinante di matrici in $\mathrm{O}_{a,b}(\mathbb{R})$ è necessariamente ±1, e il sottogruppo delle matrici con determinante 1 si indica con $\mathrm{SO}_{a,b}(\mathbb{R})$.

Per $n{=}2$ abbiamo i piani eclideo reale (segnatura (2,0), le matrici di $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sono quelle trigonometriche), iperbolico reale (segnatura (1,1), le matrici di $\mathrm{SO}_{1,1}(\mathbb{R})$ sono quelle trigonometriche iperboliche), e il piano euclideo opposto (segnatura (0,2)).

Se V spazio vettoriale reale di dimensione n ammette una forma bilineare alternante non degenere, allora la sua dimensione è pari, sia $2m$, ed esiste una base di V in cui la matrice della forma diventa $A{=}\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{I}\\ -\mathbb{I}&\mathbb{O}\end{smallmatrix}\right)$. Il gruppo delle matrici P tali che $P^tAP{=}A$ si dice gruppo simplettico d'ordine m.

Aggiunzione. Data $f{:}V{\to}W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali su C dotati di forme bilineari non degeneri φ e ψ, definiamo l'applicazione aggiunta $f^a{:}W{\to}V$ tramite la posizione:

$\psi(fv,w)=\varphi(v,f^a w)$ per ogni $v\in V$. Se A, B, F sono le matrici rispettivamente di φ, ψ, f in fissate basi di V e W, allora matrice di f^a risulta $A^{-1}F^tB$. Risulta $(gf)^a=f^a g^a$, $\mathrm{id}_V^a=\mathrm{id}_V$, $f^{aa}=f$.

Endomorfismi simmetrici. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di una forma bilineare φ non degenere. Un endomorfismo f di V si dice simmetrico se $\varphi(fv,w)=\varphi(v,fw)$ per ogni $v,w\in V$; ciò succede sse $f=f^a$ (f è autoaggiunto), ovvero sse $F^tA=AF$ se A e F sono le matrici di φ e f in una fissata base (in particolare sse le matrici associate a f in basi ortonormali per φ sono simmetriche).

Ogni endomorfismo simmetrico ammette una base di autovettori ortogonali; in particolare ogni matrice reale simmetrica è ortogonalmente diagonalizzabile.

Forme Quadratiche. Una forma quadratica su uno spazio vettoriale V su C è una applicazione $Q{:}V\to C$ tale che $Q(\alpha v)=\alpha^2Q(v)$ per ogni $v\in V$, $\alpha\in C$ e la funzione $\varphi{:}V\times V\to C$ definita da $\varphi(v,v')=Q(v+v')-Q(v)-Q(v')$ sia bilineare (e allora necessariamente simmetrica). Se il corpo C ha caratteristica diversa da due, vi è una corrispondenza biunivoca tra applicazioni bilineari su V e forme quadratiche su V.

Supponiamo che C sia un corpo di caratteristica diversa da due. Un polinomio $Q(X)\in C[X]$ omogeneo di grado due determina una forma quadratica di matrice simmetrica $A=A^t\in M_n(C)$ data da $Q(X)=X^tAX$ ove $X=(X_1,\dots,X_n)^t$; e una forma bilineare associata data da $G(X,Y)=X^tAY$, ove anche $Y=(Y_1,\dots,Y_n)^t$.

Forme quadratica e bilineare corrispondenti sono legate dalle relazioni $Q(X)=G(X,X)$ e $G(X,Y)=\frac{1}{4}(Q(X+Y)-Q(X-Y))$.

Un cambiamento di base $P\in\mathrm{GL}(n,C)$ cambia la matrice della forma quadratica in P^tAP. Due matrici simmetriche $A,B\in M_n(C)$ si dicono congruenti in C se e solo se esiste $P\in\mathrm{GL}(n,C)$ tale che $B=P^tAP$ (si tratta di una relazione di equivalenza). Si dicono ortogonalmente congruenti, o equivalentenente ortogonalmente simili, se si ha $P\in\mathrm{O}(n,C)$.

Sia Q una forma quadratica su $\mathbb{R}$, di matrice associata A;

Teorema di Sylvester (regola di inerzia): esistono due interi p e q con $p+q\leqslant n$, (gli indici della forma) e un cambiamento di base $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tali che $Q(PZ)=\sum_{i=1}^{p}z_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}z_i^2$;

esiste un cambiamento di base ortogonale $P\in\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ tale che $Q(PZ)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i^2$ ove i λ_i sono gli autovalori della matrice A (dunque $p+q$ è il numero di autovalori non nulli);

esistono un intero r e un cambiamento di base complesso $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tali che $Q(PZ)=\sum_{i=1}^{r}z_i^2$.

Teorema di Jacobi. Sia A matrice simmetrica in $M_{n+1}(C)$; poniamo Δ_i il minore d'ordine $i+1$ dato dalle prime $i+1$ righe e colonne. Allora se $\Delta_i\neq0$ per ogni i, A è congruente alla matrice diagonale $\Delta_0,\Delta_1/\Delta_0,\dots,\Delta_n/\Delta_{n-1}$.

Completamento dei quadrati. Una forma quadratica si può diagonalizare tramite il procedimento di completamento dei quadrati: si procede per ricorrenza (discendente) sul numero di variabili costruendo la trasformazione di coordinate tramite:

- se c'è un termine quadratico, supponiamo $a=a_{00}\neq0$ poniamo $aX_0^2+2\lambda X_0+\psi=a(X_0+a^{-1}\lambda)^2+(\psi-a^{-1}\lambda^2)$ (si pone $Z_0=X_0+a^{-1}\lambda$; l'ultima parentesi non dipende da X_0);
- se tutti i termini quadrati sono nulli, possiamo supporre $b=a_{01}\neq0$ e poniamo $bX_0X_1+\lambda X_0+\mu X_1+\psi=b(X_0+b^{-1}\mu)(X_1+b^{-1}\lambda)+(\psi-b^{-1}\lambda\mu)$ (l'ultima parentesi non dipende da X_0 e X_1) e usare l'identità $4pq=(p+q)^2-(p-q)^2$ al primo termine (si pone $p=X_0+b^{-1}\mu$, $q=X_1+b^{-1}\lambda$ e poi $Z_0=p+q$ e $Z_1=p-q$).

Coniche.

Coniche. Una conica $\mathcal{C}$ è una curva di grado due in $\mathbb{P}^2(C)$. Scriviamo $\mathcal{C}=V(Q)$ con $Q(X)\in C[X]_h$ (omogeneo) di grado due, e anche $Q(X)=X^tAX$ con $X=(X_0,X_1,X_2)$ e $A=\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2}\end{pmatrix}=A^t\in M_3(C)$. Sia $A'=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2}\end{pmatrix}\in M_2(C)$.

Se P è un punto del piano, l'equazione complessiva delle tangenti a $\mathcal{C}$ per P è data da $(X^tAX)(P^tAP)-(P^tAX)^2=0$; si tratta di una conica spezzata.

Riducibilità. La conica $\mathcal{C}$ è irriducibile e non singolare se e solo se $\det A\neq0$, e in tal caso se $P\in\mathcal{C}$ l'equazione della tangente in P è $P^tAX=0$; è $\mathcal{C}=r+s$ con $r\neq s$ rette distinte in $\mathbb{P}^1(\overline{C})$ se e solo se $\mathrm{rk}A=2$, e in tal caso l'unico punto doppio è $r\cap s$ ed è razionale su C; è $\mathcal{C}=2r$ con r retta definita su C se e solo se $\mathrm{rk}A=1$, e in tal caso tutti i punti di $\mathcal{C}$ sono doppi.

Polarità rispetto a una Conica. Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile in $\mathbb{P}^2(C)$ di matrice associata A. Polarità associata alla conica è la proiettività $\mathbb{P}^2(\overline{C})\longrightarrow\mathbb{P}^2(\overline{C})^*$ data da $P\mapsto p{:}=P^tA$. La retta (di coordinate) p si dice la polare del punto P, e P si dice il polo di p. Proprietà della polarità:

$P\in q$ se e solo se $Q\in p$ (reciprocità);

$P\in p$ se e solo se $P\in\mathcal{C}$, sse p è tangente a $\mathcal{C}$;

se $P\notin\mathcal{C}$ allora $p\cap\mathcal{C}$ sono i punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}$ per P;

Costruzione grafica della polare: se le tangenti alla quadrica da P sono razionali su C, allora la polare di P è la retta congiungente i due punti di tangenza; altrimenti è la retta che congiunge i poli di due qualsiasi rette distinte passanti per P.

Un triangolo è autopolare rispetto alla conica $\mathcal{C}$ se ogni vertice è polo di un lato. Un tale triangolo si dice autopolare di prima specie se ogni vertice è polo del lato opposto; di seconda specie altrimenti, nel qual caso due lati sono tangenti alla conica.

Armonie della polarità: per ogni retta r non tangente a $\mathcal{C}$ l'applicazione di r in sè che manda P in $p\cap r$ è una proiettività involutoria con punti fissi $r\cap\mathcal{C}$; quindi per ogni punto P non appartenente alla conica, e ogni retta r per P e non tangente a $\mathcal{C}$, la quaterna P, $p\cap r$, $r\cap\mathcal{C}$ è armonica. Quindi l'omologia involutoria di centro P e asse p lascia globalmente invariata $\mathcal{C}$.

Proiettività delle coniche. La parametrizzazione razionale di una conica irriducibile $\mathcal{C}$ si ottiene a partire da un punto $P_0\in\mathcal{C}$ e dalla biiezione $\mathcal{C}\to P_0^*=$ stella di rette di centro P_0: immagine di $P\in\mathcal{C}$ è la retta $P_0\vee P$. Una seconda parametrizzazione usando un altro punto P_1 differisce dalla precedente per una proiettività $P_0^*\to P_1^*$ tra le due stelle (in particolare risulta definito il birapporto di quattro punti, almeno tre distinti, su una conica irriducibile: come il birapporto tra le quattro rette in una parametrizzazione).

Viceversa: *generazione di Steiner di una conica.* Siano P,Q punti in un piano proiettivo, e sia $p{:}P^*\to Q^*$ una proiettività tra le due stelle di rette di centri P e Q rispettivamente, con $p(P\vee Q)\neq P\vee Q$. Allora $r\cap p(r)$ al variare di r in P^* sono i punti di una conica irriducibile contenente P e Q.

Duale della generazione di Steiner di una conica. Siano r ed s due rette di un piano proiettivo, $p{:}r\to s$ una proiettività con $p(r\wedge s)\neq r\wedge s$ (i.e. non una proiezione). Allora le rette $P\vee p(P)$ al variare di $P\in r$ sono le tangenti ad una conica non degenere, che ammette r ed s come tangenti.

In particolare: dati due triangoli con vertici in una conica non degenere $\mathcal{C}$, esiste una conica $\mathcal{D}$ che è inscritta in entrambi i triangoli dati.

Proiettività. Definiamo $GP(\mathcal{C})$ il gruppo delle trasformazioni biiettive di una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in sè che conservano il birapporto di ogni quaterna di punti di $\mathcal{C}$; sia $GO(\mathcal{C})$ il sottogruppo delle proiettività del piano che mandano $\mathcal{C}$ in sè. Allora la restrizione induce un isomorpfismo $GO(\mathcal{C}){\to}GP(\mathcal{C})$ di gruppi (in particolare, ogni proiettività della conica si estende a una proiettività del piano).

Teorema dell'asse di proiettività: supponiamo C algebricamente chiuso, e sia p una proiettività di $\mathcal{C}$; definiamo l'asse di p come la congiungente i punti fissi (eventualmente la tangente a $\mathcal{C}$ nell'unico punto fisso). Allora per ogni coppia di punti P e Q di $\mathcal{C}$, distinti dai punti fissi, si ha che l'intersezione di $P{\vee}p(Q)$ e $Q{\vee}p(P)$ appartiene all'asse.

Teorema di Pascal. Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile, A_1,A_2,A_3,B_1,B_2 punti di $\mathcal{C}$; un punto B_3 del piano appartiene a $\mathcal{C}$ se e solo se i tre punti $(A_i{\vee}B_j){\wedge}(A_j{\vee}B_i)$ sono allineati (e la retta si dice retta di Pascal; dati sei punti sulla conica, esistono 60 rette di Pascal associate). In particolare i lati opposti di un esagono inscritto in $\mathcal{C}$ si intersecano in un punto.

Teorema di Brianchon. Le diagonali di un esagono circoscritto a una conica irriducible si intersecano in un punto (duale di Pascal).

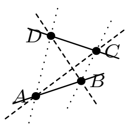
Sistemi Lineari. Le coniche di $\mathbb{P}^2(C)$ formano uno spazio proiettivo su C di dimensione cinque. Diciamo sistemi lineari di coniche le famiglie di coniche che corrispondono a varietà lineari di $\mathbb{P}^5(C)$, e condizioni lineari quelle che determinano un sistema lineare. La condizione si dice n-pla se determina una varietà di dimensione $5{-}n$ di $\mathbb{P}^5(C)$. Fasci sono i sistemi lineari di dimensione uno.

Condizioni lineari sono: Il passaggio per un punto (semplice), per due punti distinti (doppia), per tre punti non allineati (tripla), per quattro punti a tre a tre non allineati (quadrupla), passaggio per un punto e con data tangente (doppia). Non è lineare la condizione di avere una data tangente (se non si prefissa il punto di tangenza); si tratta di una condizione quadratica (determina un cono di $\mathbb{P}^5(C)$ con vertice di dimensione 2). È lineare doppia la condizione che un punto abbia una fissata retta come polare.

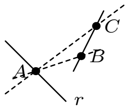
Fasci. Tre coniche A,B,C di un fascio determinano un sistema di coordinate proiettivo sul fascio, per cui ogni conica del fascio si scrive cone $\mathcal{C}(\lambda,\mu){=}V(X^t(\lambda A{+}\mu B)X)$ e le coniche degeneri del fascio sono individuate da $\det(\lambda A{+}\mu B){=}0$, equazione omogenea di grado tre in λ e μ. Ogni fascio di coniche irriducibile (i.e. tale che non tutte le sue coniche siano riducibili) contiene da una a tre coniche riducibili.

Classificazione dei fasci irriducibili:

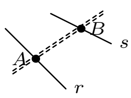
fascio di ciclo base $A{+}B{+}C{+}D$, cioè passanti per i quattro punti assegnati; vi sono tre coniche degeneri: $(A{\vee}B){+}(C{\vee}D)$, $(A{\vee}C){+}(B{\vee}D)$, $(A{\vee}D){+}(B{\vee}C)$;



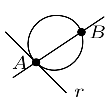
fascio di ciclo base $2A{+}B{+}C$, cioè passante per i tre punti dati e con tangente r assegnata in A; vi sono due coniche degeneri: $r{+}(B{\vee}C)$ e $(A{\vee}B){+}(A{\vee}C)$;



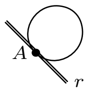
fascio di ciclo base $2A{+}2B$, cioè passante per i due punti dati e con tangenti r ed s assegnate tali che $A{\notin}s$ e $B{\notin}r$; vi sono due coniche degeneri: $r{+}s$ e $2(A{\vee}B)$;



fascio di coniche osculatrici a una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in A (r sia la tangente); ciclo base $3A{+}B$ con $B{\neq}A$ un punto di $\mathcal{C}$; unica conica degenere del fascio è $r{+}(A{\vee}B)$;



fascio di coniche iperosculatrici a una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in A (r sia la tangente); ciclo base $4A$; unica conica degenere del fascio è $2r$.



Dato un fascio di coniche, su ogni retta r non contenente punti del ciclo base del fascio viene indotta una involuzione che manda ogni punto $P{\in}r$ nella intersezione (diversa da P) di r con la conica del fascio passante per P.

Classificazione Proiettiva di Coniche Reali. Consideriamo le coniche non singolari di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$; a meno di equivalenza proiettiva complessa esiste un'unica classe di coniche non degeneri, con equazione canonica $X_0^2{+}X_1^2{+}X_2^2{=}0$.

A meno di equivalenza proiettiva reale esistono due classi di coniche non degeneri, a seconda che abbiano punti reali (equazione canonica $X_1^2{+}X_2^2{-}X_0^2{=}0$), oppure che non abbiano alcun punto reale (equazione canonica $X_0^2{+}X_1^2{+}X_2^2{=}0$).

Classificazione Affine di Coniche Reali. Le coniche non singolari di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ si dividono in due classi a meno di affinità complesse, in funzione della loro posizione con la retta impropria; sia C il polo della retta impropria e diciamo diametri di $\mathcal{C}$ le rette passanti per C. Si distinguono:

coniche a centro se il polo della retta impropria è un punto proprio (che si dice il centro e ha coordinate date dai minori, con segni alterni, delle ultime due righe di A); equazione canonica per le coniche a centro è $X^2{+}Y^2{=}1$. L'applicazione $d{\mapsto}d'{:=}D{\vee}C$ si dice l'involuzione dei diametri coniugati (rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}$); si tratta di una proiettività involutoria del fascio di rette di centro C; due rette di punti impropri $[0,\lambda,\mu]$ e $[0,\lambda',\mu']$ sono coniugate se e solo se $(\lambda\mu)A'\binom{\lambda'}{\mu'}{=}0$; equazione dei diametri coniugati: $a_{2,2}mm'{+}a_{1,2}(m{+}m'){+}a_{1,1}{=}0$. La retta impropria e due diametri coniugati danno un riferimento autopolare per le coniche a centro. Un diametro autoconiugato, dunque tangente a $\mathcal{C}$ nel suo punto improprio, si dice un asintoto di $\mathcal{C}$; equazione dei diametri autoconiugati: $a_{2,2}m^2{+}2a_{1,2}m{+}a_{1,1}{=}0$.

parabole se sono tangenti alla retta impropria; ciò succede se e solo se $\det A'{=}0$; equazione canonica per le parabole è $2Y{=}X^2$ (in un riferimento autopolare formato da: retta impropria, una retta di direzione il punto di tangenza improprio, la tangente nell'altro punto della seconda retta). Ogni retta passante per il punto improprio della parabola si dice un diametro della parabola, e ha polo sulla retta impropria.

Le coniche non singolari di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ si dividono in quattro classi a meno di affinità reali, tre classi di coniche a centro, e la classe delle parabole (ellissi, iperboli e parabole a seconda che $\mathcal{C}{\cap}r_\infty$ sia $P{+}\overline{P}$ non razionali su $\mathbb{R}$, $P{+}Q$, $2P$):

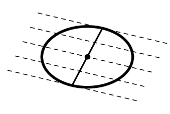
ellissi senza punti reali, di equazione canonica $X^2{+}Y^2{+}1{=}0$; caratterizzata da: A è definita (positiva o negativa) e $\det A'{>}0$;

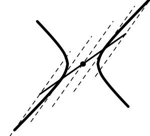
ellissi con punti reali, di equazione canonica $X^2{+}Y^2{=}1$; caratterizzata da: A non è definita (positiva o negativa) e $\det A'{>}0$;

iperboli, di equazione canonica $X^2{-}Y^2{=}1$; caratterizzata da: $\det A'{<}0$;

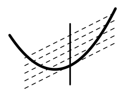
parabole, di equazione canonica $2Y{=}X^2$; caratterizzata da: $\det A'{=}0$.

Proprietà diametrali (simmetrie e asintoti): ogni conica a centro è simmetrica rispetto al centro e rispetto ad ogni diametro nella direzione ad esso coniugata (dunque nella direzione delle tangenti ai punti di intersezione del diametro con la conica); i diametri autoconiugati sono asintoti.





Ogni parabola è simmetrica rispetto ad ogni diametro, nella direzione ad esso coniugata (dunque nella direzione della tangente al punto di intersezione propria del diametro con la parabola).



Classificazione Metrica Euclidea. Le trasformazioni ammesse sono del tipo $B=\begin{pmatrix}1 & 0\;0\\ a & \\ b & B'\end{pmatrix}$ con $B'\in\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ e $\binom{a}{b}\in\mathbb{R}^2$. I punti ciclici di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ sono $J_\infty=[0,1,i]$ e $\overline{J}_\infty=[0,1,-i]$. Dunque per la rigidità φ associata a B si ha $\varphi J_\infty=J_\infty$ se $B'\in\mathrm{O}^+(2,\mathbb{R})$ e $\varphi J_\infty=\overline{J}_\infty$ se $B'\in\mathrm{O}(2,\mathbb{R})\smallsetminus\mathrm{O}^+(2,\mathbb{R})$.

Diciamo circolo una conica reale irriducibile passante per i punti ciclici. L'equazione di un circolo è $X^2+Y^2+2cX+2dY+e=0$ con $e-c^2-d^2\neq 0$; centro del circolo è $(-c,-d)$. Se poi $e-c^2-d^2<0$ poniamo $R^2=c^2+d^2-e$, R si dice il raggio del circolo, che ha equazione $(X+c)^2+(Y+d)^2=R^2$, e dunque rappresenta il luogo dei punti di distanza R dal centro $C=(-c,-d)$.

Definiamo gli assi di una conica a centro come i diametri ortogonali al proprio coniugato. Nel caso di un circolo ogni diametro è un asse. Altrimenti esiste una unica coppia d,d' di assi i cui punti impropri $[0,\lambda,\mu]$ e $[0,-\mu,\lambda]$ soddisfano all'equazione $a_{1,2}\lambda^2+(a_{1,1}-a_{2,2})\lambda\mu-a_{1,2}\mu^2=0$. Vertici di una conica a centro sono le intersezioni della conica con gli assi.

Definiamo l'asse di una parabola di punto improprio C_∞ una retta d per C_∞ che sia ortogonale al suo polo D. Dunque una parabola ha un unico asse di punto improprio $C_\infty=[0,\lambda,\mu]$ e polo $D=[0,-\mu,\lambda]$, e di equazione $(0\ a_{1,2}\ a_{2,2})AX=0$. Vertice della parabola è $V=\mathcal{C}\cap d$.

Equazioni canoniche. Per le coniche a centro: sia (C,D,D',r_∞,d,d') il triangolo autopolare di prima specie formato dal centro a da due assi; in tale riferimento si ha $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ con $a,b,c\in\mathbb{R}^\times$; dunque la conica ha equazione $\alpha X^2+\beta Y^2=1$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^\times$. Sia tratta di una iperbole se $\alpha\beta<0$, di una ellisse con punti reali se $\alpha,\beta>0$, di una ellisse senza punti reali se $\alpha,\beta<0$.

Le equazioni si possono anche scrivere $\pm\frac{X^2}{a^2}\pm\frac{Y^2}{b^2}=1$ con $a,b>0$ che si dicono i semiassi della conica.

Per le parabole: sia $(C_\infty,D,V,r_\infty,d,D\vee V)$ il triangolo autopolare di seconda specie formato dal punto improprio, dalla polare dell'asse e dal vertice; allora $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\b&0&0\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}0&0&-p\\0&1&0\\-p&0&0\end{pmatrix}$ con $p\in\mathbb{R}^\times$; dunque la conica ha equazione $X^2=2pY$; possiamo supporre $p>0$ e si chiama il parametro della parabola.

Invarianti ortogonali. I tre valori $\det A$, $\det A'$ e $\mathrm{tr}A'$ sono invarianti per rigidità, i.e. per congruenza tramite matrici del tipo B consentito. Si dicono gli invarianti ortogonali.

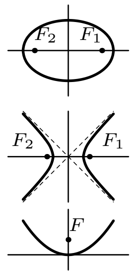
- la conica è a centro se e solo se $\det A'\neq 0$ e una sua equazione è proporzionale a $\alpha+\beta X^2+\gamma Y^2=0$ con $\alpha\beta\gamma=\det A$, $\beta\gamma=\det A'$, $\beta+\gamma=\mathrm{tr}A'$.
- la conica è una parabola se e solo se $\det A'=0$; una sua equazione è proporzionale a $\beta X^2=2\alpha Y$ con $-\alpha\beta^2=\det A$, $\beta=\mathrm{tr}A'$, $\alpha\beta>0$.

Fuochi. Una retta r per $P\in\mathbb{E}^2$ è detta principale di $\mathcal{C}$ in P se la retta per P ortogonale a r ha polo (rispetto a $\mathcal{C}$) in r; cioè se e solo se la retta r e la sua ortogonale per P sono coniugate. Una coppia di tali rette per P si dice una "dupla principale" di $\mathcal{C}$ in P.

Un punto $F\in\mathbb{E}^2$ si dice un fuoco di $\mathcal{C}$ se per F vi sono infinite duple principali; ciò accade sse il fascio di coniche generato da $\mathcal{C}$ e da $(F\vee J_\infty)+(F\vee\overline{J}_\infty)$ contiene rette doppie; sse $(F\vee J_\infty)$ e $F\vee\overline{J}_\infty$ sono tangenti a $\mathcal{C}$. Dunque i fuochi sono le intersezioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ dai punti isotropi di $\mathbb{E}^2$.

La condizione $\mathrm{rk}\left(A-\lambda\begin{pmatrix}X_1^2+X_2^2 & -X_1 & -X_2\\ -X_1 & 1 & 0\\ -X_2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=1$ determina le quadriche focali.

Nel caso delle equazioni canoniche:

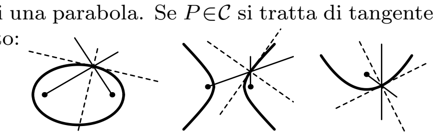


Ellissi: $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ con $a>b$,
$F_1(\sqrt{a^2-b^2},0)$, $F_2(-\sqrt{a^2-b^2},0)$;
$F(0,i\sqrt{a^2-b^2})$, $\overline{F}(0,-i\sqrt{a^2-b^2})$;
Iperboli: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$,
$F_1(\sqrt{a^2+b^2},0)$, $F_2(-\sqrt{a^2+b^2},0)$;
$F(0,i\sqrt{a^2+b^2})$, $\overline{F}(0,-i\sqrt{a^2+b^2})$;
Parabole: $X^2=2pY$, $F(0,\frac{p}{2})$.

L'asse focale a è la retta contenente i due fuochi razionali per le coniche a centro, e l'asse contenente il fuoco e il punto improprio per le parabole. L'involuzione focale è l'involuzione dell'asse focale data da $R\mapsto S$ se $R=r\cap a$, $S=s\cap a$ con r,s rette principali per $P\notin a$. Si può ottenere usando una qualsiasi retta u per $R\in a$, e intersecando a con la retta u' ortogonale a u passante per il polo $U(\in r)$ di u (la funzione $u\mapsto u'$ corrisponde a $r\to r_\infty$, $U\mapsto U_\infty^\perp$, che è prospettività di centro in a; tale centro è l'immagine di R tramite l'involuzione focale).

Per le coniche a centro (risp. parabole) si tratta della involuzione con punti fissi i due fuochi (risp. il fuoco e il punto improprio).

Le rette principali per $P\notin a$ sono le bisettrici di $P\vee F_1$ e $P\vee F_2$ se la conica è a centro, le bisettrici di $P\vee F$ e $P\vee C_\infty$ se si tratta di una parabola. Se $P\in\mathcal{C}$ si tratta di tangente e normale nel punto:



Le ellissi (risp. le iperboli) sono i luoghi del piano per cui la somma (risp. la differenza) delle distanze da due punti fissi (i fuochi) sono costanti.

Eccentricità. Per una conica a centro, siano V_1, V_2 i vertici dell'asse focale a; definiamo l'eccentricità $e=\frac{|F_1-F_2|}{|V_1-V_2|}$; risulta $e<1$ per le ellissi ($e=0$ per i circoli), $e>1$ per le iperboli, si definisce $e=1$ per le parabole.

Se l'equazione è $\frac{X^2}{a^2}\pm\frac{Y^2}{b^2}=1$, allora $e=\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}}{a}$.

Si dice direttrice di una conica $\mathcal{C}$ una retta che sia polare di un fuoco.

Una conica è il luogo dei punti del piano per cui il rapporto e tra la distanza da un punto (fuoco) e una retta (direttrice) fissati è costante; si tratta di ellissi, parabole o iperboli a seconda che e sia minore, uguale o maggiore di 1.

Quadriche.

Una quadrica è un divisore di ordine 2 in $\mathbb{P}^n(C)$. Fissato un riferimento, una quadrica $\mathcal{Q}$ corrisponde a $V(\varphi(X))$ con $\varphi(X) = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}X_iX_j$ ove $a_{ij}=a_{ji}$, e a cui associamo la matrice simmetrica (non nulla) $A=(a_{ij})$ di ordine $n+1$ a coefficienti in C; risulta $\varphi(X)=X^tAX$.

C'è una biiezione tra quadriche di $\mathbb{P}^n(C)$ e matrici simmetriche non nulle in $M_{n+1}(C)$ a meno di proporzionalità, dunque con struttura di spazio proiettivo di dimensione $\binom{n+2}{2}-1$.

Un cambiamento di coordinate $X=PY$ con $P\in\mathrm{GL}(n+1,C)$ comporta che la stessa quadrica avrà matrice $B=P^tAP$; due matrici si dicono congruenti se tra loro vale questa relazione. Due quadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono proiettivamente equivalenti (cioè esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^n(C)$ con $f(\mathcal{Q})=\mathcal{Q}'$) se e solo se le matrici associate in un fissato (e dunque in ogni) sistema di riferimento sono (proporzionali a) matrici congruenti.

Quadriche nella retta proiettiva. Se $n=1$ allora una quadrica è la somma di due punti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$; se $A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11}\end{pmatrix}$ ponendo $\Delta=-\det(A)=a_{01}^2-a_{00}a_{11}$ possiamo distinguere tre casi:

(*e*) $\sqrt{\Delta}\notin C$, allora si tratta di due punti distinti non razionali su C (cioè in $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$ ma non in $\mathbb{P}^n(C)$: coppia ellittica di punti);

(*i*) $\sqrt{\Delta}\in C$, $\Delta\neq 0$, allora di tratta di due punti distinti razionali su C (cioè di $\mathbb{P}^n(C)$: coppia iperbolica di punti);

(*p*) $\Delta=0$, allora si tratta un punto (doppio), razionale su C (coppia parabolica di punti).

Generalità in $\mathbb{P}^n(C)$ per $n\geqslant 2$. In generale una quadruca è determinata dal suo supporto: se è irriducibile, abbiamo $\mathcal{Q}=1V$ con V ipersuperfice irriducibile; se $\mathcal{Q}=1H+1H'$ con H ed H' iperpiani distinti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$, abbiamo $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})=H\cup H'$; se $\mathcal{Q}=2H$ con H iperpiano, allora $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})=H$ (gli ultimi due casi la quadrica si dice riducibile). In particolare identifichiamo $\mathcal{Q}$ con $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})$ che è un sottinsieme di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$, e usiamo $\mathcal{Q}_C=\mathcal{Q}\cap\mathbb{P}(C)$.

Punti singolari e Coni. Risulta $\frac{\partial\varphi}{\partial X_i}=2AX=2X^tA$; dunque un punto P di coordinate x è singolare per $\mathcal{Q}=V(\varphi(X))$ se e solo se $Ax=0$ (dunque si tratta d'una varietà lineare); se P non è singolare, allora $x^tAX=0$ è l'equazione dell'iperpiano tangente a $\mathcal{Q}$ in P.

La quadrica $\mathcal{Q}$ ha punti singolari se e solo se una (dunque ognuna) dalle sue matrici associata è singolare (i.e. di rango $r\leqslant n$), se e solo se è un cono (in tal caso il vertice è definito su C, coincide con l'insieme dei punti singolari e ha dimensione $n-r$; $\mathcal{Q}$ è allora proiezione dal vertice di una quadrica non degenere di una varietà complementare).

Sia r il rango di A, matrice associata a $\mathcal{Q}$; allora: se $2<r\leqslant n$ abbiamo una quadrica irriducibile (cono); se $r=2$ abbiamo $\mathcal{Q}=H+H'$ con H ed H' iperpiani distinti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$; se $r=1$ abbiamo $\mathcal{Q}=2H$ con H iperpiano.

Scegliendo coordinate in modo che $v(\mathcal{Q})$ abbia equazioni $X_0=\cdots=X_{r-1}=0$, sia M la varietà complementare di equazioni $X_r=\cdots=X_n=0$ e sia A' la matrice (invertibile) di $\mathcal{Q}'=\mathcal{Q}\cap M$ (che è quadrica non degenere di M); allora $\mathcal{Q}$ ha matrice $\begin{pmatrix} A' & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}$.

Dunque ogni matrice simmetrica a coefficienti in C è congruente in C ad una tale matrice con A' matrice quadrata invertibile di ordine r (rango di A).

Polarità. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere di $\mathbb{P}^n(C)$; la polarità rispetto a $\mathcal{Q}$ è l'applicazione $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})\to\mathbb{P}^n_C(\overline{C})^*$ che manda il punto P di coordinate x nell'iperpiano $P^\perp$ di coordinate plückeriane x^tA ($P^\perp$ si dice polare di P, e P polo di $P^\perp$). L'iperpiano $P^\perp$ è razionale su C se e solo se il punto P lo è. Due punti P e Q si dicono coniugati, e si scrive $P\perp Q$ se $P\in Q^\perp$ (equivalentemente $Q\in P^\perp$), e vale se e solo se $x^tAy=0=y^tAx$ (se x e y sono le coordinate dei due punti).

Per un sottinsieme Z di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$ definiamo il polare rispetto a $\mathcal{Q}$ $Z^\perp=\{Q\in\mathbb{P}^n_C(\overline{C})|Q\perp P,\ \forall P\in Z\}$. Si hanno gli usuali risultati: $Z^\perp=\bigcap_{P\in Z}P^\perp$ è varietà lineare, coincidente con $L^\perp$ se L è la varietà lineare generata da Z; una varietà lineare L è razionale su C se e solo se $L^\perp$ lo è; $L^{\perp\perp}=L$; per due varietà lineari L ed M risulta che $L<M$ sse $M^\perp<L^\perp$, $(L\vee M)^\perp=L^\perp\wedge M^\perp$, $(L\wedge M)^\perp=L^\perp\vee M^\perp$.

La varietà $L^\perp$ si dice la polare di L.

Generalizzazione per quadriche qualsiasi. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica qualsiasi in $\mathbb{P}^n(C)$; se $L=\mathbb{P}(U)$ è varietà lineare di spazio sovrastante U, definiamo $L^\perp$ come la varietà lineare $\mathbb{P}(U^\perp)$ dove $U^\perp=\{v\in V_{n+1}(C)|y^tAx=0,\ \forall y\in U\}$ (nel caso di quadriche non degeneri le definizioni sono equivalenti). Se $L=\mathbb{P}^n(C)$ allora $L^\perp=v(\mathcal{Q})$ (vertice della quadrica), se $P\in v(\mathcal{Q})$ allora $P^\perp=\mathbb{P}^n(C)$; se $P\notin v(\mathcal{Q})$ allora $P^\perp$ è un iperpiano contenente $v(\mathcal{Q})$. In generale, se L è varietà di dimensione m e $L\cap v(\mathcal{Q})$ ha dimensione s, allora $L^\perp$ è varietà lineare contenente $v(\mathcal{Q})$ e di dimensione $n-m+s$.

Per $n=1$, $\mathcal{Q}=Q_1+Q_2$ (punti distinti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$) la polarità associata a $\mathcal{Q}$ è l'involuzione con Q_1 e Q_2 punti uniti; dunque $P\perp Q$ se e solo se $(Q_1Q_2PQ)=-1$.

Piani e Coni Tangenti. Per $n\geqslant 2$ abbiamo $P\in\mathcal{Q}$ se e solo se $P\in P^\perp$, e in questo caso $P^\perp$ è l'iperpiano tangente a $\mathcal{Q}$ in P (di equazione $x^tAX=0$ se x sono le coordinate di P).

Una varietà lineare L si dice tangente a $\mathcal{Q}$ se $L\subseteq\mathcal{Q}$ oppure $L\cap\mathcal{Q}$ è quadrica degenere di L; dunque un iperpiano H è tangente a $\mathcal{Q}$ sse $H\cap\mathcal{Q}$ è degenere. L'iperpiano H è tangente a $\mathcal{Q}$ sse $H\ni H^\perp=P$, e allora H è l'iperpiano tangente a $\mathcal{Q}$ in P, e questo è l'unico punto in cui H è tangente a $\mathcal{Q}$; vale sse $aA^{-1}a^t=0$ (se a sono le coordiante plückeriane di H, si tratta dell'equazione della quadrica inviluppo di $\mathcal{Q}$).

Una varietà lineare L è tangente a $\mathcal{Q}$ sse L ed $L^\perp$ sono incidenti; $L\subseteq\mathcal{Q}$ sse $L\leqslant L^\perp$. Se L non è tangente a $\mathcal{Q}$, allora $L\cap\mathcal{Q}$ è quadrica non degenere di L, e la polarità associata a $L\cap\mathcal{Q}$ in L è la restrizione a L della polarità associata a $\mathcal{Q}$.

Sia $P\notin\mathcal{Q}$, r una retta per P, non tangente a $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}\cap r=Q_1+Q_2$; allora Q_1,Q_2,P sono distinti, e $Q=H\cap L$ con $H=P^\perp$ è il quarto armonico: $(Q_1Q_2PQ)=-1$.

Il cono $\mathcal{C}_P$ tangente a $\mathcal{Q}$ di vertice P (unione delle rette per P tangenti a $\mathcal{Q}$) è la proiezione da P della quadrica (non degenere) $\mathcal{Q}\cap H$ di H. $\mathcal{C}_P$ ha equazione $(x^tAX)^2-(x^tAx)(X^tAX)=0$ e matrice $A(x^txA-x^tAx)$.

Quadriche Inviluppo. La biiezione tra le quadriche non degeneri di $\mathbb{P}$ e quelle di $\mathbb{P}^*$ che associa a $\mathcal{Q}$ di matrice A la quadrica inviluppo $\mathcal{Q}^*$ di matrice A^{-1} (oppure $A^c=\det(A)A^{-1}$) si scrive nelle coordinate $a_{i,j}$ e $a^*_{i,j}$ tramite espressioni $a^*_{h,k}=(-)^{h+k}\det A_{h,k}$ polinomiali nelle $a_{i,j}$; la biiezione si estende a quadriche di rango n (non tutti i minori d'ordine n sono nulli), nel qual caso la quadrica inviluppo immagine ha rango 1 (dunque una stella di iperpiani, con centro nel vertice di $\mathcal{Q}$).

Descrizione delle quadriche inviluppo singolari: sia $\mathcal{Q}^*\subseteq\mathbb{P}^*$ quadrica di rango r. Se $r=1$ allora $\mathcal{Q}^*$ è una stella di iperpiani (contata due volte); se $r=2$ allora $\mathcal{Q}^*$ è una coppia di stelle di iperpiani con diversi centri; se $r>2$ allora esistono una varietà lineare L di $\mathbb{P}$ di dimensione $r-1$, e una quadrica non degenere $\mathcal{C}$ di L, tali che $H\in\mathcal{Q}^*$ sse $H>L$ oppure $H\cap L$ è tangente a $\mathcal{C}$.

Classificazione Proiettiva. Un $(n+1)$-edro (triangolo per $n=2$, tetraedro per $n=3$) di $\mathbb{P}^n(C)$ è l'insieme formato da $n+1$ punti $P_0,\ldots,P_n$ (detti i vertici) tali che $\bigvee_i P_i=\mathbb{P}^n(C)$, e dagli iperpiani $H_i=\bigvee_{j\neq i} P_j$ (detti le facce). Si dice autopolare rispetto alla quadrica non degenere $\mathcal{Q}$ se $P_i^{\perp}=H_i$ per ogni i.

Se $\mathcal{Q}$ è quadrica di $\mathbb{P}^n(C)$, allora esistono punti razionali su C non appartenenti a $\mathcal{Q}$. Se $\mathcal{Q}$ è quadrica non degenere di $\mathbb{P}^n(C)$, allora esistono $(n+1)$-edri autopolari rispetto a $\mathcal{Q}$. In particolare: in un riferimento autopolare la quadrice ha matrice diagonale.

L'indice di una quadrica $\mathcal{Q}$ è la massima dimensione delle varietà lineari di $\mathbb{P}^n(C)$ (razionali su C) contenute in $\mathcal{Q}$. Si tratta di un intero $\geqslant -1$ (uguale a -1 sse $\mathcal{Q}_C=\varnothing$); da $L\leqslant L^{\perp}$ se $L\subseteq\mathcal{Q}$ abbiamo che l'indice è $\leqslant m-1$ (risp. m) se $n=2m$ è pari (risp. $n=2m+1$ è dispari). L'indice è un invariante proiettivo.

La classificazione proiettiva dipende dalla struttura del gruppo moltiplicativo $C^{\times}/(C^{\times})^2$.

se $(C^{\times})^2=C^{\times}$ (ogni elemento è un quadrato, per es. corpi algebricamente chiusi) allora possiamo diagonalizzare la (matrice della) quadrica avendo solo 1 e 0 in diagonale; dunque due quadriche sono proiettivamente equivalenti sse hanno lo stesso rango. Se la quadrica è non degenere, allora ha indice $m-1$ se $n=2m$, indice m se $n=2m+1$.

se $C^{\times}/(C^{\times})^2\cong\{\pm 1\}$ (per es. $\mathbb{R}$) allora possiamo diagonalizzare la quadrica avendo valori 1, -1, 0 in diagonale. Se $\mathcal{Q}$ ha forma diagonale $X_0^2+\cdots+X_s^2-X_{s+1}^2-\cdots-X_m^2$ (ove possiamo supporre $h=s+1\geqslant k=m-s$) allora $t=(m-s-1)+(n-m)=n-s-1$ ($\leqslant s$) è l'indice di $\mathcal{Q}$. Dunque due quadriche sono proiettivamente equivalenti sse hanno lo stesso rango e lo stesso indice; oppure sse hanno la stessa segnatura (h,k) (corrispondente al numero di 1 e -1 nella forma diagonale) soggetti alle condizioni $1\leqslant h$, $0\leqslant k\leqslant h$, $h+k\leqslant n+1$ (teorema di Sylvester). Abbiamo allora che il rango di $\mathcal{Q}$ è $r=h+k$ e l'indice è $i=(n+1-r)+(k-1)=n-h$.

Esempi per $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: $n=1$ (retta proiettiva reale)

(r,i)	(h,k)	equazione	descrizione
$(1,0)$	$(1,0)$	$X_0^2=0$	coppia parabolica di punti
$(2,0)$	$(1,1)$	$X_0^2-X_1^2=0$	coppia iperbolica di punti
$(2,-1)$	$(2,0)$	$X_0^2+X_1^2=0$	coppia ellittica di punti

$n=2$ (piano proiettivo reale)

(r,i)	(h,k)	equazione	descrizione
$(1,1)$	$(1,0)$	$X_0^2=0$	coppia parabolica di rette
$(2,1)$	$(1,1)$	$X_0^2-X_1^2=0$	coppia iperbolica di rette
$(2,0)$	$(2,0)$	$X_0^2+X_1^2=0$	coppia ellittica di rette
$(3,0)$	$(2,1)$	$X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$	irrid. con punti reali
$(3,-1)$	$(3,0)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$	irrid. senza punti reali

$n=3$ (spazio proiettivo reale)

(r,i)	(h,k)	equazione	descrizione
$(1,2)$	$(1,0)$	$X_0^2=0$	coppia parabolica di piani
$(2,2)$	$(1,1)$	$X_0^2-X_1^2=0$	coppia iperbolica di piani
$(2,1)$	$(2,0)$	$X_0^2+X_1^2=0$	coppia ellittica di piani
$(3,1)$	$(2,1)$	$X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$	cono con punti reali
$(3,0)$	$(3,0)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$	cono immaginario (vertice reale)
$(4,1)$	$(2,2)$	$X_0^2+X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$	non degenere rigata
$(4,0)$	$(3,1)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$	non deg. con punti reali
$(4,-1)$	$(4,0)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$	non deg. senza punti reali

Quadriche rigate nello spazio. L'equazione della quadrica rigata $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(C)$ si può scrivere $X_0X_3-X_1X_2=0$; in tal modo si vede che la mappa di Segre

$$S\colon\ \mathbb{P}^1(C)\times\mathbb{P}^1(C)\longrightarrow\mathcal{Q}\subseteq\mathbb{P}^3(C)$$

definita da $S([v_0,v_1],[w_0,w_1])=[v_0w_0,v_0w_1,v_1w_0,v_1w_1]$ (proiettivizzazione di $C^2\times C^2\longrightarrow C^2\otimes_C C^2\cong C^4$) è una biiezione di $\mathbb{P}^1(C)\times\mathbb{P}^1(C)$ sull'immagine $\mathcal{Q}$. In particolare $\mathcal{Q}$ contiene due schiere di rette immagini tramite Segre di $\mathbb{P}^1(C)\times\{[a,b]\}$ e $\{[a,b]\}\times\mathbb{P}^1(C)$. Abbiamo che: due rette appartenenti alla stessa schiera sono tra loro sghembe; due rette di schiere diverse sono incidenti, e ogni retta di una schiera incontra tutte quelle dell'altra; per ogni punto di $\mathcal{Q}$ passa una retta di ciascuna schiera.

Quadriche sui corpi finiti. Sia $p>2$ un primo, e sia C corpo con $q=p^f$ elementi. Ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(C)$ con $n\geqslant 2$ contiene punti razionali su C. Se $n=2m$ ($m\geqslant 1$) allora $\mathcal{Q}$ ha indice $m-1$, e due qualsiasi quadriche non degeneri sono proiettivamente equivalenti. Se $n=2m+1$ ($m\geqslant 0$) allora $\mathcal{Q}$ ha indice m sse il determinante di una (dunque ognuna) sua matrice è un quadrato in C, altrimenti ha indice $m-1$; due quadriche non degeneri sono proiettivamente equivalenti sse hanno lo stesso indice.

Si possono contare i punti: $\sharp\mathbb{P}^n(C)=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, e

$$\sharp\mathcal{Q}_C=\begin{cases}\frac{q^n-1}{q-1} & \text{se } n=2m\\ \frac{(q^{m+1}-1)(q^m+1)}{q-1} & \text{se } n=2m+1 \text{ e indice}=m\\ \frac{(q^{m+1}+1)(q^m-1)}{q-1} & \text{se } n=2m+1 \text{ e indice}=m-1\end{cases}$$

Classificazione Affine. Sia H_∞ un iperpiano di $\mathbb{P}^n(C)$, e $\mathbb{A}=\mathbb{P}^n(C)\smallsetminus H_\infty$ lo spazio affine complementare; scegliendo coordinate tali che H_∞ sia $X_0=0$ possiamo supporre $\mathbb{A}=\mathbb{A}^n(C)\subseteq\mathbb{P}^n(C)$. Una quadrica affine di $\mathbb{A}$ è una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^n(C)$ non contenente H_∞ (le quadriche del tipo $H+H_\infty$ si dicono improprie). Cilindri sono i coni con vertice contenuto in H_∞. Se $\mathcal{Q}$ è quadrica affine, allora $\mathcal{Q}_\infty=\mathcal{Q}\cap H_\infty$ si dice la quadrica impropria di $\mathcal{Q}$.

Due quadriche affini $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti sse esiste una affinità f con $f(\mathcal{Q})=\mathcal{Q}'$; in tal caso $\mathcal{Q}_\infty$ e $\mathcal{Q}'_\infty$ sono proiettivamente equivalenti come quadriche di H_∞.

Se $r\leqslant n$ è il rango di $\mathcal{Q}_\infty$, abbiamo le seguenti forme canoniche possibili per le equazioni di $\mathcal{Q}$:

- $\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=0$ (la quadrica ha rango r, dunque sempre degenere, e si tratta di un cono proprio; caratterizzata da $\mathcal{Q}\cap H_\infty^{\perp}\not\leqslant H_\infty$);
- $X_0^2+\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=0$ (la quadrica ha rango $r+1$, si dice quadrica a centro, di centro $H_\infty^{\perp}$, se è non degenere, se invece è degenere si tratta di cilindro, detto non parabolico; sono quadrice caratterizzate da $H_\infty^{\perp}\not\leqslant H_\infty$ e $\mathcal{Q}\cap H_\infty^{\perp}\leqslant H_\infty$);
- $\sum_{i=1}^r a_iX_i^2+2X_0X_n=0$ (la quadrica ha rango $r+2$, si dice paraboloide se è non degenere, se invece è degenere si tratta di cilindro, detto parabolico; sono quadrice caratterizzate da $H_\infty^{\perp}\leqslant H_\infty$).

Possiamo scrivere le equazioni canoniche affini:

$r(\mathcal{Q})$	$r(\mathcal{Q}_\infty)$	equazione	descrizione
$n+1$	$n+1$	$\sum_{i=1}^n a_iX_i^2=1$	a centro
$n+1$	$n-1$	$\sum_{i=1}^{n-1} a_iX_i^2+2X_n=0$	paraboloide
r	r	$\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=0$	cono proprio
$r+1$	r	$\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=1$	cilindro non parabolico
$r+2$	r	$\sum_{i=1}^r a_iX_i^2+2X_n=0$	cilindro parabolico

Se in C ogni elemento è quadrato, allora due quadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti sse $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}_\infty$ hanno lo stesso rango di $\mathcal{Q}'$ e $\mathcal{Q}'_\infty$ rispettivamente.

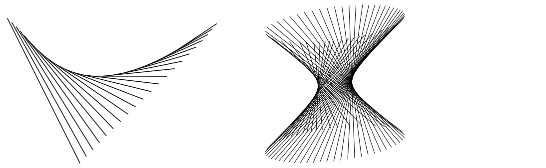
Se $C=\mathbb{R}$ le quadriche a centro si distinguono in ellissoidi e iperboloidi a seconda che $(\mathcal{Q}_\infty)_\mathbb{R}$ sia vuoto oppure no. Abbiamo la seguente classificazione dipendente da s:

tipo	equazione canonica	valori di s
a centro	$\sum_{i=1}^{s} X_i^2-\sum_{s+1}^{n} X_i^2=1$	$0\leqslant s\leqslant n$
paraboloidi	$\sum_{i=1}^{s} X_i^2-\sum_{s+1}^{n-1} X_i^2+2X_n=0$	$\frac{n-1}{2}\leqslant s\leqslant n-1$
coni propri	$\sum_{i=1}^{s} X_i^2-\sum_{s+1}^{r} X_i^2=0$	$\frac{r}{2}\leqslant s\leqslant r$
cil. non par.	$\sum_{i=1}^{s} X_i^2-\sum_{s+1}^{r} X_i^2=1$	$0\leqslant s\leqslant r$
cilindri par.	$\sum_{i=1}^{s} X_i^2-\sum_{s+1}^{r} X_i^2+2X_n=0$	$\frac{r}{2}\leqslant s\leqslant r$

Nel caso di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti di una conica si dicono parabolici, iperbolici o ellittici a seconda che la conica degenere sul piano tangente in quel punto sia una coppia parabolica, iperbolica o ellittica di rette. I punti di una quadrica sono tutti dello stesso tipo, e a seconda di questo la quadrica si dice parabolica, iperbolica o ellittica. La classificazione dà:

tipo	r s	equazione	descrizione
a centro	4, 0	$-X_1^2-X_2^2-X_3^2=1$	ell. senza punti reali
	1	$X_1^2-X_2^2-X_3^2=1$	iperb. ellittico
	2	$X_1^2+X_2^2-X_3^2=1$	iperb. iperbolico
	3	$X_1^2+X_2^2+X_3^2=1$	ell. con punti reali
paraboloidi	4, 1	$X_1^2-X_2^2+2X_3=0$	par. iperbolico
	2	$X_1^2+X_2^2+2X_3=0$	par. ellittico
coni propri	3, 2	$X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$	con punti reali
	3	$X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$	con vertice reale
	2, 1	$X_1^2-X_2^2=0$	coppia iperb. piani
	2	$X_1^2+X_2^2=0$	coppia ell. piani
	1, 1	$X_1^2=0$	coppia par. piani
cil. non par.	2, 0	$-X_1^2-X_2^2=1$	cil. ell. senza punti
	1	$X_1^2-X_2^2=1$	cil. iperbolico
	2	$X_1^2+X_2^2=1$	cil. ell. con punti
	1, 0	$-X_1^2=1$	coppia ell. piani paralleli
	1	$X_1^2=1$	coppia iperb. piani paralleli
cil. parab.	1, 1	$X_1^2+2X_3=0$	cilindro parabolico

Aspetto del paraboloide e dell'iperboloide parabolici:



(ciascuno evidenziato tramite alcune rette di una delle sue schiere).

Proprietà diametrali (simmetrie e asintoti). Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere di $\mathbb{P}^n(C)$; de U è un punto non appartenente a $\mathcal{Q}$ e $H=U^\perp$, allora l'omologia armonica di asse H e centro U lascia globalmente fissa $\mathcal{Q}$. Dunque:

(*c*) se $\mathcal{Q}$ è quadrica a centro, diciamo diametri gli iperpiani per il centro; $\mathcal{Q}$ risulta simmetrica rispetto al centro e rispetto ad ogni iperpiano nella direzione ad esso coniugata; il cono che proietta $\mathcal{Q}_\infty$ dal centro si chiama cono asintotico, e gli asintoti di $\mathcal{Q}$ sono le rette del cono asintotico;

(*p*) se $\mathcal{Q}$ è paraboloide, diciamo diametri gli iperpiani propri con polo improprio (i.e. gli iperpiani propri contenenti il punto $C_\infty=\mathcal{Q}\cap H_\infty$); tutti i punti di H_∞ distinti da C_∞ sono direzioni di simmetria.

Classificazione Euclidea. Uno spazio euclideo $\mathbb{E}=\mathbb{E}^n$ di dimensione $n\geqslant 2$ è una coppia $(\mathbb{A},\Omega_\infty)$ ove $\mathcal{A}=(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),H_\infty)$ è spazio affine reale di dimensione n, e Ω_∞ è una quadrica reale non degenere priva di punti reali (segnatura $(n,0)$) di H_∞ (detta l'assoluto di $\mathbb{E}$; i suoi punti, impropri immaginari, si dicono i punti ciclici di $\mathbb{E}$). Una unità di misura di $\mathbb{E}$ è una coppia di punti (propri reali).

Assoluto e unità di misura di $\mathbb{E}$ determinano una forma quadratica non degenere (definita positiva) q sullo spazio vettoriale T delle traslazioni di $\mathbb{E}$ (uno spazio pseudo-euclideo viene definito senza restizione che l'assoluto non abbia punti reali, e dunque gli corrisponde una forma non degenere, ma non definita in generale).

Definiamo le usuali nozioni euclidee: distanza tra due punti (reali propri) $d(P,Q)=q(Q-P)$; sfera di centro C e raggio R (reale positivo) $\{P|d(P,C)=R\}$. Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è un sistema di riferimento $P_0,\dots,P_n,U$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che P_0 sia punto proprio, $P_1,\dots,P_n$ siano vertici di un n-edro di H_∞ autopolare rispetto a Ω_∞, e per cui si abbia $d(P_0,U_i)=1$ per ogni $U_i=(P_0\vee P_i)\wedge(U\vee\bigvee_{j\neq i}P_j)$. Equivalentemente un riferimento è cartesiano sse ogni sfera di raggio R e centro C di coordiante $(c_1,\dots,c_n)$ ha equazione $\sum_{i=1}^n (X_i-c_i)^2=R^2$; in particolare per ogni coppia di punti risulta $d(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$; e l'assoluto ha equazioni $X_0=0$ e $X_1^2+\dots+X_n^2=0$. Una sfera (generalizzata) è una quadrica contenente l'assoluto.

Le similitudini di $\mathbb{E}$ sono le affinità che lasciano globalmente fisso l'assoluto; equivalentemente, che mandano sfere in sfere, e se l'immagine di una sfera di raggio 1 è una sfera di raggio R, il numero reale positivo R si dice il rapporto di omotetia (se f è la similitudine, vale allora $d(fP,fQ)=Rd(P,Q)$ per ogni coppia di punti). Una omotetia è una omologia generale di asse improprio; chiaramente è una similitudine. Una isometria è una similitudine di rapporto 1; in un riferimento cartesiano ortogonale le isometrie hanno matrici $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\a&P\end{smallmatrix}\right)$ con P matrice ortogonale ($P^tP=PP^t=\mathbb{I}_n$). Orientamenti: due riferimenti cartesiani ortogonali sono equiorientati se la matrice di cambiamento ha determinante 1; vi sono due classi di equivalenza per questa relazione, dette gli orientamenti.

Data una varietà lineare (propria reale) L, detto $L_\infty=L\wedge H_\infty$, diciamo che la polare M_∞ di L_∞ rispetto a Ω_∞ è la direzione ortogonale a L; si tratta di una varietà sghemba con L. La simmetria (ortogonale) rispetto ad L è la simmetria di asse L e direzione ortogonale (si tratta di isometrie). Ogni isometria è proiezione di al più $n+1$ simmetrie (ortogonali) rispetto a iperpiani. Se L ed L' sono varietà lineari di dimensione $r\geqslant 0$ allora esiste almeno una isometria f di $\mathbb{E}$ tale che $fL=L'$.

Quadriche. Siano Ω e $\mathcal{Q}$ due quadriche distinte di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, la prima priva di punti reali (dunque non degenere); allora esistono riferimenti autopolari rispetto a Ω in cui $\mathcal{Q}$ ha matrice diagonale (se $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_h$ sono i coni del fascio generato da Ω e $\mathcal{Q}$, che sono tutti reali, con $1\leqslant h\leqslant n$ e di ranghi tali che $\sum_i r_i=n+1$, basta trovare riferimenti in $L_i=v(\mathcal{C}_i)$ che siano autopolari per $\Omega\cap L_i$).

Due quadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ di $\mathbb{E}$ si dicono metricamente equivalenti se esiste una isometria f con $f(\mathcal{Q})=\mathcal{Q}'$. Tramite trasformazioni cartesiane ortogonali possiamo avere forme canoniche come nel caso affine (ma senza alterare gli a_i). Per coniche a centro, cilindri non parabolici e coni propri i coefficienti a_i si dicono (inversi de)i semiassi (reali quelli positivi, trasversi quelli negativi); si può supporre che i semiassi reali siano non meno di quelli trasversi, e nel caso di coni che uno dei semiassi sia 1. Per paraboloidi e coni parabolici gli a_i si dicono i parametri; si può supporre che quelli positivi siano non meno di quelli negativi. Una quadrica si dice di rotazione se vi sono semiassi o parametri con molteplicità (>1); ciò succede sse esiste una varietà lineare L tale che ogni rotazione di asse L manda la quadrica in sè. Le rette $r_i=P_0\vee P_i$ (risp. gli iperpiani $H_i=\bigvee_{j\neq i}P_j$) si dicono assi (rispettivamente iperpiani principali) di $\mathcal{Q}$ se i punti

$P_0,\ldots,P_n$ sono quelli di un riferimento in cui $\mathcal{Q}$ abbia equazione canonica.

Due quadriche sono metricamente equivalenti se e solo se hanno gli stessi semiassi (o gli stessi parametri) con le stesse molteplicità.

Invarianti ortogonali. In certi casi i parametri si possono calcolare facilmente: sia A una matrice di $\mathcal{Q}$,

- per le quadriche a centro: $a_i{=}\rho_i/\lambda$ ove ρ_i $(i{=}1,\ldots,n)$ sono gli autovalori di A e $\lambda{=}{-}\det A/\det A_\infty$;
- per i coni propri: gli a_i sono a meno di proporzionalità gli autovalori di A;
- per i paraboloidi: $a_i{=}c\rho_i$ ove ρ_i $(i{=}1,\ldots,n{-}1)$ sono gli autovalori di A_∞ e $c{=}\pm\sqrt{-\prod_i \rho_i/\det A}$ (il segno scelto in modo che vi siano più parametri positivi).

Cerchi sulle quadriche. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica irriducubile nello spazio euclideo di dimensione 3. I piani π che intersecano la quadrica $\mathcal{Q}$ in cerchi sono quelli per cui la conica $\pi\cap\mathcal{Q}$ passa per i punti ciclici $\pi\cap\Omega$ di π. Se $\mathcal{Q}$ non è una sfera vi sono uno o due fasci (impropri) di tali piani a seconda che la quadrica $\mathcal{Q}$ sia di rotazione o no.

Proprietà focali. Sia $\mathcal{Q}$ quadrica non degenere di $\mathbb{E}$; una retta r per un punto P si dice retta principale di $\mathcal{Q}$ in P se $H^\perp{\in}r$ ove H è l'iperpiano per P ortogonale ad r. Si dicono n-uple principali di $\mathcal{Q}$ in P le n-uple ortogonali di rette principali di $\mathcal{Q}$ in P.

Se $P{\notin}\mathcal{Q}$, le n-uple principali sono le n-uple di assi del cono tangente $\mathcal{C}_P(\mathcal{Q})$. Se $P{\in}\mathcal{Q}$, la normale n_P (all'iperpiano tangente in P) è retta pricipale, unica retta principale per P non appartenente all'iperpiano tangente $T_P(\mathcal{Q})$; inoltre $l_1,\ldots,l_{n-1},n_P$ è una n-upla principale di $\mathcal{Q}$ in P sse $l_1,\ldots,l_{n-1}$ è una $(n{-}1)$-upla di assi del cono $\mathcal{Q}\cap T_P(\mathcal{Q})$.

Un punto $P{\in}\mathbb{E}$ si dice un fuoco di $\mathcal{Q}$ se in P vi sono infinite n-uple pricipali di $\mathcal{Q}$. Ciò vale sse il fascio generato da $\mathcal{Q}$ e dal cono isotropo $\mathcal{I}_P$ (proiezione dell'assoluto da P) contiene coni di rango $\leqslant n{-}1$.

Per le quadriche a centro non di rotazione, con equazione canonica $\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{b_i}{=}1$ con $b_1{<}\cdots{<}b_n$, i fuochi sono i punti delle n quadriche (dette focali) di equazioni $\begin{cases} X_i{=}0 \\ \sum_{i\neq j=1}^n \frac{X_j^2}{b_j-b_i}{=}1 \end{cases}$ (per $i{=}1,\ldots,n$; si tratta di quadriche a centro, una per ogni tipo).

Per i paraboloidi non di rotazione, con equazione canonica $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{X_i^2}{b_i}{=}2X_n$ con $b_1{<}\cdots{<}b_{n-1}$, i fuochi sono i punti delle $n{-}1$ quadriche (dette focali) di equazioni $\begin{cases} X_i{=}0 \\ \sum_{i\neq j=1}^{n-1} \frac{X_j^2}{b_j-b_i}{=}2X_n{-}b_i \end{cases}$ (per $i{=}1,\ldots,n{-}1$; si tratta di paraboloidi, uno per ogni tipo).