Geometria Uno Reference Cards

Algebra Lineare

Send comments and corrections to ⟨maurizio@math.unipd.it⟩

Matrici.

Una matrice $n\times m$ a valori in un corpo C è un elemento di $(C^n)^m$, i.e. una struttura:

$$A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m}\end{pmatrix} ;$$

l'insieme di queste matrici di indica con $\mathcal{M}_{n,m}(C)$. Scrittura per colonne e per righe:

$$A=(A_1\cdots A_m)=\begin{pmatrix} A^1\\ \vdots \\ A^n\end{pmatrix} .$$

Operazioni tra matrici:

- prodotto per elementi di C: $cA:=\left(ca_{i,j}\right)$.
- somma: $A,B\in\mathcal{M}_{n,m}(C)$, $A+B:=\left(b_{i,j}+a_{i,j}\right)\in\mathcal{M}_{n,m}(C)$.
- prodotto: $A\in\mathcal{M}_{n,m}(C)$ e $B\in\mathcal{M}_{m,l}(C)$, $AB:=\left(\sum_{j=1}^m a_{i,j}b_{j,k}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ k=1,\dots,l}}=\left(A^iB_k\right)\in\mathcal{M}_{n,l}(C)$.

Trasposizione. Sia $A\in\mathcal{M}_{n,m}(C)$; definiamo $A^t\in\mathcal{M}_{m,n}(C)$ tramite: $A^t:=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{j=1,\dots,m\\ i=1,\dots,n}}$.
Si ha che $\left(A^t\right)^t=A$, $(A+B)^t=A^t+B^t$, $(AB)^t=B^tA^t$.

Matrici quadrate. Le matrici quadrate di un fissato ordine formano un'algebra associativa, ma non commutativa, con le operazioni introdotte. Sia $A\in\mathcal{M}_{n,n}(C)=:\mathcal{M}_n(C)$. Il determinante di A è l'elemento di C definito da

$$\det A=|A|:=\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

ove $\mathcal{P}_n$ indica l'insieme delle permutazioni sull'insieme $\{1,\dots,n\}$, e si calcola mediante gli sviluppi di Laplace per riga o colonna:

$$|A|=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{i,j}|A_{i,j}|=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}a_{i,j}|A_{i,j}|$$

ove $A_{i,j}\in\mathcal{M}_{n-1}$ è la matrice che si ottiene da A eliminando la i-sima riga e la j-ima colonna.

Casi notevoli:

- se la matrice è triangolare (inferiore se $a_{i,j}=0$ per $i>j$; superiore se $a_{i,j}=0$ per $i<j$) allora il determinante è il prodotto degli elementi in diagonale;
- se la matrice è a blocchi: $\det\left(\begin{smallmatrix}A&B\\0&D\end{smallmatrix}\right)=\det(A)\det(D)=\det\left(\begin{smallmatrix}A&0\\C&D\end{smallmatrix}\right)$, con A e D matrici quadrate;
- det. di Vandermonde: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n\\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)$;
- una matrice quadrata si dice antisimmetrica se $A^t=-A$; se A è antisimmetrica di ordine dispari, allora $|A|=0$; inoltre

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{vmatrix}=(af+be-cd)^2 .$$

In $\mathcal{M}_n(C)$ esiste la matrice identica $\mathbb{I}:=\left(\delta_{i,j}\right)$ ove $\delta_{i,j}=1$ se $i=j$ e 0 altrimenti. Sia $A\in\mathcal{M}_n(C)$. La matrice A si dice invertibile se esiste $B\in\mathcal{M}_n(C)$ tale che $AB=\mathbb{I}=BA$ (tale B è unica e si dice l'inversa di A). Basta per questo che $AB=\mathbb{I}$ o che $BA=\mathbb{I}$.

Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Se $A\in\mathcal{M}_n(C)$ è invertibile la sua matrice inversa si indica con A^{-1} e si calcola tramite:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(|A_{j,i}|\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

i determinanti $|A_{j,i}|$ si chiamano i complementi algebrici (di posto (i,j)).

Formule notevoli: $\mathbb{I}^{-1}=\mathbb{I}$, $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, se le matrici A e B sono invertibili.
Se A è quadrata invertibile, $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

Il sottinsieme di $\mathcal{M}_n(C)$ delle matrici invertibili si indica con $\mathrm{GL}(n,C)$, e si tratta di un gruppo (non commutativo) sotto il prodotto di matrici.

Operazioni elementari. Sia $A\in\mathcal{M}_{n,m}(C)$; le operazioni elementari sulle righe corrispondono a moltiplicare a sinistra la matrice A per opportune matrici invertibili $H\in\mathcal{M}_n(C)$.

- scambiare di posto le righe A^i e A^j; si tratta di moltiplicare per $S(i,j):=\mathbb{I}+e_{i,j}+e_{j,i}-e_{i,i}-e_{j,j}$;
- moltiplicare la riga i-sima per $\alpha\in C$; si tratta di moltiplicare per $H(i,\alpha):=\mathbb{I}+(\alpha-1)e_{i,i}$;
- sostituire la i-sima riga con la somma di quella riga e il prodotto di $\alpha\in C$ per la j-sima riga; si tratta di moltiplicare per $H(i,j,\alpha):=\mathbb{I}+\alpha e_{i,j}$.

Tramite operazioni elementari sulle righe ogni matrice può essere ridotta in forma a scalini (per righe), i.e. con $a_{i,j}=0$ se $i>j$; ogni matrice quadrata invertibile può essere ridotta alla matrice identica, e questa riduzione permette il calcolo dell'inversa: $(A\mathbb{I})$ viene ridotta (per righe) a $(\mathbb{I}A^{-1})$.

Le operazioni elementari sulle colonne corrispondono a moltiplicare a destra la matrice A per opportune matrici invertibili $H\in\mathcal{M}_m(C)$.

- scambiare di posto le colonne A_i e A_j; si tratta di moltiplicare per $S(i,j):=\mathbb{I}+e_{i,j}+e_{j,i}-e_{i,i}-e_{j,j}$;
- moltiplicare la colonna i-sima per $\alpha\in C$; si tratta di moltiplicare per $H(i,\alpha):=\mathbb{I}+(\alpha-1)e_{i,i}$;
- sostituire la i-sima colonna con la somma di quella colonna e il prodotto di $\alpha\in C$ per la j-sima colonna; si tratta di moltiplicare per $H(j,i,\alpha):=\mathbb{I}+\alpha e_{j,i}$.

Tramite operazioni elementari sulle colonne ogni matrice può essere ridotta in forma a scalini (per colonne), i.e. con $a_{i,j}=0$ se $i<j$.

Rango. Il rango di una matrice $A\in\mathcal{M}_{n,m}(C)$ è per definizione il massimo numero di colonne linearmente indipendenti. Ciò corrisponde al numero di colonne non nulle se la matrice è ridotta in forma a scalini per colonne. Equivalentemente è il massimo numero di righe linearmente indipendenti. Ciò corrisponde al numero di righe non nulle se la matrice è ridotta in forma a scalini per righe. Il rango si caratterizza come il massimo ordine delle sottomatrici quadrate invertibili. Si indica con $\mathrm{rk}(A)$.

Spazi Vettoriali e Applicazioni Lineari.

Assiomi. Uno spazio vettoriale su un corpo C è il dato di un insieme V dotato di due operazioni:

prodotto per gli scalari: $C\times V\longrightarrow V$: $(\alpha,v)\mapsto\alpha v$;

somma di vettori: $V\times V\longrightarrow V$: $(v,w)\mapsto v+w$;

soggetti ai seguenti assiomi:

- V con l'operazione di somma è un gruppo abeliano; dunque esiste un elemento neutro 0 tale che $v+0=v=0+v$ $(\forall v)$;

l'operazione è associativa, $u+(v+w)=(u+v)+w$ $(\forall u,v,w)$;
l'operazione è commutativa, $v+w=w+v$ $(\forall v,w)$;
ogni elemento ha inverso, $(\forall v)(\exists w)v+w=0=w+v$;

- l'operazione di moltiplicazione per gli scalari soddisfa a:
$1v=v$ $(\forall v)$; $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$ $(\forall\alpha,\beta,v)$;
$(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$ $(\forall\alpha,\beta,v)$; $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$ $(\forall\alpha,v,w)$.

Indipendenza lineare, basi. Sia $S\subseteq V$ un sottinsieme di uno spazio vettoriale; S si dice linearmente indipendente (*li*) se per ogni combinazione lineare $\sum_{s\in S}\alpha_s s$ (in cui quasi tutti gli α_s siano nulli) si ha che: $\sum_{s\in S}\alpha_s s=0$ implica $\alpha_s=0$ per ogni s. In caso contrario (esistono combinazioni non banali che danno il vettore nullo) S si dice un insieme linearmente dipendente (*ld*).

L'insieme S si dice un insieme di generatori per V se ogni elemento $v\in V$ si può scrivere come $v=\sum_{s\in S}\alpha_s s$ (con gli α_s quasi tutti nulli).

I fatti seguenti sono equivalenti:

(a) S è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti;

(b) S è un insieme minimale di generatori per V;

inoltre ogni tale insieme è di una fissata cardinalità, dipendente solo da V e da C, che si chiama la dimensione di V su C: $\dim_C V$.

Dato un insieme *li* S e una base B di V, si può completare S a una base di V aggiungendovi opportuni elementi di B (teorema della base incompleta).

Relazioni di dipendenza. Sia A un insieme; una relazione $a\lessdot X$ tra elementi e sottinsiemi di A si dice di dipendenza se valgono i seguenti assiomi:

$(D1)$ se $x\in X$ allora $x\lessdot X$;

$(D2)$ se $z\lessdot Y$ e $Y\lessdot X$ (i.e. $y\lessdot X$ per ogni $y\in Y$) allora $z\lessdot X$;

$(D3)$ se $u\lessdot X\cup\{v\}$ e $u\not\lessdot X$ allora $v\lessdot X\cup\{u\}$;

$(D4)$ se $u\lessdot X$ allora esiste una parte finita X' di X tale che $u\lessdot X'$

Definiamo per ogni sottinsieme X l'insieme degli elementi dipendenti $\langle X\rangle=\{u\in A|u\lessdot X\}$. Per ogni X e Y risulta allora che: $X\subseteq\langle X\rangle$; se $X\subseteq Y$ allora $\langle X\rangle\subseteq\langle Y\rangle$; $\langle\langle X\rangle\rangle=\langle X\rangle$; $\langle X\cup Y\rangle=\langle\langle X\rangle\cup Y\rangle$ (ma $\langle X\cap Y\rangle$ in generale è strettamente contenuto in $\langle\langle X\rangle\cap\langle Y\rangle\rangle=\langle X\rangle\cap\langle Y\rangle$).

Diciamo che un insieme è chiuso per la relazione se $\langle X\rangle=X$ (dunque se e solo se $\langle X\rangle\subseteq X$, cioè se $u\lessdot X$ implica $u\in X$). Allora ogni $\langle X\rangle$ è chiuso per la relazione; se due insiemi sono chiusi per la relazione, anche la loro intersezione lo è (ma l'unione no, in generale); $\langle\varnothing\rangle$ è il minimo e A il massimo tra i chiusi per la relazione.

La classe dei sottinsiemi di A chiusi per la relazione è un reticolo (non distributivo) con minimo e massimo sotto le operazioni di inf data da $X\wedge Y=X\cap Y$ e sup data da $X\vee Y=\langle X\cup Y\rangle$. Due insiemi X e Y chiusi per la relazione si dicono sghembi se $X\wedge Y=\langle\varnothing\rangle$. Un sottinsieme X si dice insieme di generatori per A se $\langle X\rangle=A$.

Un sottinsieme X si dice irriducibile se per ogni $x\in X$ si ha $x\not\lessdot X\smallsetminus\{x\}$, riducibile altrimenti. In particolare il sottinsieme vuoto $\varnothing$ è irriducibile; un singoletto $\{x\}$ è riducibile sse $x\lessdot\varnothing$, sse $x\in\langle\varnothing\rangle$. Se X è irriducibile, e $X\cup\{u\}$ è riducibile, allora $u\lessdot X$. Infine X è irriducibile se e solo se ogni suo sottinsieme finito lo è (equivalentemente, X è riducibile se e solo se contiene un insieme finito riducibile). Se X è irriducibile e $u\lessdot X$ allora la classe $\{Z\subseteq X|u\lessdot Z\}$ ha elemento minimo per l'inclusione che è un sottinsieme finito.

Un insieme irriducibile di generatori per A si dice una base di A (per la relazione di dipendenza). Sia Y è un insieme di generatori per A; allora Y contiene (almeno) una base di A. Se X è un sottinsieme irriducibile conenuto in Y, allora X è contenuto in qualche base di A contenuta in Y. Due qualsiasi basi di A sono equipotenti (per questi risultati si usa il lemma di Zorn).

Sottospazi. Un sottinsieme W di uno spazio vettoriale V si dice un sottospazio vettoriale se le operazioni di V inducono una struttura di spazio vettoriale su W. Ciò succede se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$0\in W$; se $u,v\in W$ allora $u+v\in W$; se $u\in W$ e $\alpha\in C$ allora $\alpha u\in W$;

ovvero se e solo se valgono le:

$W\neq\varnothing$; se $u,v\in W$ e $\alpha,\beta\in C$ allora $\alpha u+\beta v\in W$.

Si osservi che $\dim_C W\leqslant\dim_C V$.

Se S è un sottinsieme qualsiasi di V, indichiamo con $\langle S\rangle$ il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente S; si tratta dell'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di V contenenti S; o ancora dell'insieme di tutte le combinazioni lineari (finite) di elementi di S a coefficienti in C.

Quozienti. Sia W un sottospazio vettoriale di V; allora la relazione "$u\sim v$ sse $u-v\in W$" definisce una relazione di equivalenza in V che rispetta la struttura di spazio vettoriale, di modo che l'insieme quoziente $V/W:=V/\sim$ ha una struttura canonica di spazio vettoriale indotta da quella di V. Si osservi che $\dim_C V=\dim_C W+\dim_C(V/W)$.

Applicazioni lineari. Una applicazione $\varphi:V\longrightarrow W$ si dice lineare se $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$ $(\forall u,v\in V)$ e $\varphi(\alpha v)=\alpha\varphi(v)$ $(\forall v\in V,\forall\alpha\in C)$; o equivalentemente
$\varphi(\alpha u+\beta v)=\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)$ $(\forall u,v\in V,\forall\alpha,\beta\in C)$.

Automaticamente si ha $\varphi(0)=0$ e $\varphi(-v)=-\varphi(v)$.

Una applicazione lineare è determinata dai valori assunti su una base del dominio.

I sottoinsiemi $\ker\varphi:=\{v\in V\,|\,\varphi(v)=0\}$ di V
e $\operatorname{im}\varphi:=\{w\in W\,|\,w=\varphi(v)\ \exists v\in V\}$ di W sono sottospazi vettoriali di V e W rispettivemente.

Vale la relazione $\dim_C V=\dim_C\ker\varphi+\dim_C\operatorname{im}\varphi$ (formula delle dimensioni per un morfismo).

Il morfismo φ induce un isomorfismo (cioè una mappa invertibile) $\bar\varphi:V/\ker\varphi\longrightarrow\operatorname{im}\varphi$ (primo teorema di isomorfismo).

Se $\dim_C V=\dim_C W$ allora φ è un isomorfismo se e solo se $\ker\varphi=\{0\}$, ovvero se e solo se $\operatorname{im}\varphi=W$.

Somme e Prodotti. Data una famiglia $\mathcal{I}$ di indici, e un insieme di spazi vettoriali V_i al variare di $i\in\mathcal{I}$, definiamo la somma diretta $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}V_i$ e il prodotto diretto $\prod_{i\in\mathcal{I}}V_i$ come gli insiemi formati dalle $\mathcal{I}$-ple (v_i) di elementi con $v_i\in V_i$ per ogni i, e quasi tutti nulli (i.e. nulli tranne che per un numero finito di indici) nel caso della somma diretta. Si hanno strutture canoniche di spazio vettoriale su C con le operazioni "componente per componente".

In particolare la somma diretta è un sottospazio vettoriale del prodotto diretto, e se l'insieme di indici è finito, allora le due nozioni coincidono; abbiamo dei morfismi canonici di inclusione $\iota_j:V_j\to\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}V_i$ e di proiezione $\pi_j:\prod_{i\in\mathcal{I}}V_i\to V_j$ per ogni j.

Per ogni spazio vettoriale W su C, vi sono i seguenti isomorfismi
$\operatorname{Hom}_C(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}V_i,W)\cong\prod_{i\in\mathcal{I}}\operatorname{Hom}_C(V_i,W)$
e $\operatorname{Hom}_C(W,\prod_{i\in\mathcal{I}}V_i)\cong\prod_{i\in\mathcal{I}}\operatorname{Hom}_C(W,V_i)$
dati dalle composizioni con le inclusioni e le proiezioni.

Formule delle dimensioni per i sottospazi. Siano W_1 e W_2 sottospazi vettoriali di V. L'intersezione insiemistica $W_1\cap W_2$ è un sottospazio vettoriale; per contro l'unione $W_1\cup W_2$

non è un sottospazio, e definiamo $W_1+W_2:=\langle W_1\cup W_2\rangle$ i.e. il sottospazio vettoriale generato.

Se $W_1+W_2=V$ e $W_1\cap W_2=0$ si dice che W_1 e W_2 sono complementari e si scrive $V=W_1\oplus W_2$.

Vale la relazione (formula della dimensione per i sottospazi) $\dim_C W_1+\dim_C W_2=\dim_C(W_1+W_2)+\dim_C(W_1\cap W_2)$.

Il morfismo di inclusione $W_1\longrightarrow W_1+W_2$ induce un isomorfismo $W_1/(W_1\cap W_2)\longrightarrow(W_1+W_2)/W_2$ (secondo teorema di isomorfismo).

Se abbiamo $W_1\supseteq W_2$ sottospazi di V, il morfismo canonico $V/W_2\longrightarrow V/W_1$ induce un isomorfismo
$(V/W_2)/(W_1/W_2)\longrightarrow V/W_1$ (terzo teorema di isomorfismo).

Coordinate. L'insieme C^n dotato delle operazioni "componente per componente" è uno spazio vettoriale su C di dimensione n e base canonica data dai vettori $e_i:=(\delta_{ij})$. Si indica con $V_n(C)$ e si dice lo spazio vettoriale standard su C di dimensione n. Sia V uno spazio vettoriale su C di dimensione finita $n:=\dim_C V$ e scegliamo una base $e=(e_1,\dots,e_n)$ di V. Questo determina un isomorfismo $V_n(C)\longrightarrow V$ mandando la base canonica di $V_n(C)$ nella base scelta. In particolare $v\in V$ si scrive unicamente come $v=\sum_i v_ie_i$ con $v_i\in C$; le coordinate di v nella base data è la n-pla $(v_1,\dots,v_n)^t$.

Se W è un altro spazio vettoriale su C di dimensione finita $m:=\dim_C W$, e $g=(g_1,\dots,g_m)$ è una base di W, e se $\varphi:V\longrightarrow W$ è una applicazione lineare, allora possiamo associare a φ una matrice $\alpha_{e,g}(\varphi)\in\mathcal{M}_{m,n}(C)$ tramite la definizione:
$\varphi(e_1,\dots,e_n)=(g_1,\dots,g_m)\alpha_{e,g}(\varphi)$; cioè le colonne di $\alpha_{e,g}(\varphi)$ sono le coordinate nella base di W delle immagini tramite φ dei vettori della base di V.

Se v ha coordinate $(v_1,\dots,v_n)^t$, allora le coordinate di $\varphi(v)$ nella base di W sono date da $\varphi\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\alpha_{e,g}(\varphi)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$.

Effetto dei cambiamenti di base: se e' è un'altra base di V e g' un'altra base di W, allora la matrice $\alpha_{e',g'}(\varphi)$ è legata alla precedente tramite le matrici di cambiamento di base $\alpha_{e',e}(\mathrm{id}_V)$ e $\alpha_{g,g'}(\mathrm{id}_W)$ dalla formula
$\alpha_{e',g'}(\varphi)=\alpha_{g,g'}(\mathrm{id}_W)\alpha_{e,g}(\varphi)\alpha_{e',e}(\mathrm{id}_V)$.

Si osservi che le matrici di cambiamento di base sono invertibili e si ha $\alpha_{e',e}(\mathrm{id}_V)=\alpha_{e,e'}(\mathrm{id}_V)^{-1}$.

In particolare nel caso $\dim_C V=\dim_C W$ allora φ è un isomorfismo se e solo se per qualunque scelta delle basi si ha che la matrice $\alpha_{e,g}(\varphi)$ è invertibile.

Nel caso che $V=W$ intendiamo sempre scegliere la stessa base su dominio e codominio, sicché la formula di cambiamento di base diventa $\alpha_{e',e'}(\varphi)=\alpha_{e,e'}(\mathrm{id}_W)\alpha_{e,e}(\varphi)\alpha_{e',e}(\mathrm{id}_V)$.

Se $\psi:W\longrightarrow U$ è un'altra applicazione lineare, e $h=(h_1,\dots,h_l)$ una base di U, allora $\alpha_{e,h}(\psi\circ\varphi)=\alpha_{g,h}(\psi)\alpha_{e,g}(\varphi)$ (la composizione di applicazioni lineari corrisponde alla moltiplicazione di matrici).

Forme canoniche per similitudine. Due matrici quadrate $A,B\in\mathcal{M}_n(C)$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $B\in\mathrm{GL}(n,C)$ tale che $B=PAP^{-1}$. Due matrici sono simili se e solo se rappresentano la stessa applicazione lineare di C^n in sè in due basi diverse (legate dal cambiamento di base dato da P). La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza tra matrici: cerchiamo dei rappresentanti semplici per le classi di equivalenza (equivalentemente: cerchiamo di rappresentare un morfismo tramite una matrice semplice, scegliendo opportunamente la base).

Sia $A\in\mathcal{M}_n(C)$ rappresentante l'applicazione φ di C^n in sè nella base canonica, $v\in C^n$ non nullo; allora v si dice autovettore di A (o di φ) di autovalore $\lambda\in C$ se $Av=\lambda v$ (o $\varphi(v)=\lambda v$), e $\lambda\in C$ si dice un autovalore di A (o di φ) se esiste un vettore $v\in C^n$ non nullo tale che $Av=\lambda v$.

Uno scalare $\lambda\in C$ è un autovalore di A (risp. di φ) se e solo se $\det(A-\lambda\mathbb{I})=0$ (risp. $\ker(\varphi-\lambda\mathrm{id})\neq 0$).

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(x):=\det(A-x\mathbb{I})=x^n-\mathrm{tr}(A)x^{n-1}+\dots+(-1)^n\det(A)$; è invariante per similitudine, e dunque si può chiamare anche polinomio caratteristico $p_\varphi(x)$ di φ. Uno scalare $\lambda\in C$ è un autovalore di A (o di φ) se e solo se è zero del polinomio $p_A(x)$. Si dice che A (o φ) ha tutti i suoi autovalori in C se il polinomio caratteristico $p_A(x)$ si fattorizza in fattori lineari in $C[x]$.

Teorema di Hamilton-Cayley: $p_A(A)=0$, ovvero $p_\varphi(\varphi)=0$.

Definiamo il polinomio minimo di A (o di φ) come il generatore dell'ideale di $C[x]$ formato dai polinomi che annullano A (o φ). Il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico.

Forme canoniche triangolari. Una matrice A è simile (in C) a una matrice in forma triangolare se e solo se ha tutti i suoi autovalori in C.

Dato un autovalore $\lambda\in C$, definiamo la molteplicità $m(\lambda)$:=molteplicità di λ come zero di $p_A(x)$ e la nullità
$n(\lambda):=\dim_C\ker(\varphi-\lambda\mathrm{id})=n-\mathrm{rk}(A-\lambda\mathbb{I})$. Si ha che $n(\lambda)\leqslant m(\lambda)$.

Forme diagonali. Una matrice A è simile (in C) a una matrice in forma diagonale se e solo se ha tutti i suoi autovalori in C e ogni autovalore ha molteplicità e nullità uguali. Due matrici A e B sono simultaneamente diagonalizzabili (i.e. esiste $P\in\mathrm{GL}(n,C)$ tale che $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ sono entrambe diagonali) se e solo se sono (separatamente) diagonalizzabili e commutano tra loro (i.e. $AB=BA$, nel qual caso ciascuna delle due matrici è stabile sugli autospazi dell'altra).

Teoria di Jordan. Sia $p_\varphi(x)=\prod_i(x-\lambda_i)^{r_i}$ ($r_i=m(\lambda_i)$); poniamo $V_i:=\ker((\varphi-\lambda\mathrm{id})^{r_i})$, allora $V=\bigoplus_i V_i$.

L'applicazione φ è nilpotente se esiste $N\in\mathbb{N}$ tale che $\varphi^N=0$; l'indice di nilpotenza è il minimo intero per cui ciò succede, si indica con $\mathrm{nilp}(A)$. L'applicazione φ è nilpotente se e solo se una (e allora ogni) sua matrice associata è nilpotente (e gli ordini di nilpotenza sono uguali).

La matrice nilpotente standard di ordine m è la matrice $N_m:=\sum_i e_{i,i+1}\in\mathcal{M}_n(C)$. Una matrice A è nilpotente se e solo se è simile a una matrice a blocchi diagonali formati da matrici nilpotenti standard.

Il tipo di nilpotenza di una matrice nilpotente $A\in\mathcal{M}_n(C)$ è la n-pla di naturali $(i_1,\dots,i_n)$ ove i_l è il numero di blocchi nilpotenti standard di ordine l della forma ridotta di A. Due matrici nilpotenti sono simili se e solo se hanno lo stesso tipo di nilpotenza.

Esempi. Per $n=1$ l'unica matrice nilpotente è la matrice nulla.

Per $n=2$ le matrici nilpotenti sono di due tipi: la matrice nulla di tipo (2,0) e la nilpotente standard $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ di tipo (0,1).

Per $n=3$ abbiamo tre tipi di matrici nilpotenti:
la matrice nulla di tipo (3,0,0);
la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ di tipo (1,1,0) (sse $\mathrm{nilp}(A)=2$ e $\mathrm{rk}(A)=1$);
la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ di tipo (0,0,1) (sse $\mathrm{nilp}(A)=3$ e $\mathrm{rk}(A)=2$);

Per $n=4$ abbiamo cinque tipi di matrici nilpotenti:
la matrice nulla di tipo (4,0,0,0);
$\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ di tipo (2,1,0,0) (sse $\mathrm{nilp}(A)=2$ e $\mathrm{rk}(A)=1$);
$\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ di tipo (1,0,1,0) (sse $\mathrm{nilp}(A)=3$ e $\mathrm{rk}(A)=2$);
$\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ di tipo (0,2,0,0) (sse $\mathrm{nilp}(A)=2$ e $\mathrm{rk}(A)=2$);
$\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ di tipo (0,0,0,1) (sse $\mathrm{nilp}(A)=4$ e $\mathrm{rk}(A)=3$).

Si dice matrice di Jordan di ordine m e autovalore λ la matrice $J_m(\lambda):=\lambda\mathbb{I}+N_m$.

Teorema di Jordan: una matrice ha tutti i suoi autovalori in C se e solo se è simile (in C) a una matrice a blocchi diagonali formati da matrici di Jordan.

La molteplicità di un autovalore λ_i di A come radice del polinomio minimo è la dimensione del più grande blocco di Jordan relativo a quell'autovalore.

Decomposizione astratta di Jordan. Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita (rispettivamente: sia A una matrice quadrata) con tutti i suoi autovalori nel corpo di base C. Allora esistono due endomorfismi (risp. matrici) A_s, A_n tali che

(*i*) A_s è semisemplice (=diagonalizzabile) e A_n è nilpotente;

(*ii*) $A_sA_n=A_nA_s$ e $A=A_s+A_n$;

(*iii*) esistono polinomi $p(X),q(X)\in C[X]$ privi di termine noto e tali che $A_s=p(A)$, $A_n=q(A)$; in particolare A_s ed A_n commutano con ogni endomorfismo (risp. ogni matrice) che commuti con A;

(*iv*) sottospazi stabili per A sono stabili sia per A_s che per A_n;

(*v*) se $AB=BA$ con A e B soddisfacenti all'ipotesi detta, allora $(A+B)_s=A_s+B_s$ e $(A+B)_n=A_n+B_n$.

Decomposizione astratta moltiplicativa di Jordan. Sia A un automorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita (rispettivamente: sia A una matrice quadrata invertibile) con tutti i suoi autovalori nel corpo di base C. Allora i suoi autovalori sono tutti non nulli, ed esistono due endomorfismi (risp. matrici) A_s, A_u tali che

(*i*) A_s è semisemplice (=diagonalizzabile) e A_n è unipotente (significa che ha 1 come unico autovalore);

(*ii*) $A_sA_u=A_uA_s=A$;

(*iii*) sottospazi stabili per A sono stabili sia per A_s che per A_n;

(*iv*) se $AB=BA$ con A e B soddisfacenti all'ipotesi detta, allora $(AB)_s=A_sB_s$ e $(AB)_u=A_uB_u$.

Prodotto Scalare e Spazi Euclidei Reali. Sia $V_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale standard su $\mathbb{R}$ di dimensione n. Definiamo il prodotto scalare di due vettori v e w come $v\cdot w:=v^tw=\sum_i v_iw_i$, ove si sono usate le coordinate nella base canonica.

Proprietà del prodotto scalare $V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$:

commutatività: $v\cdot w=w\cdot v$ $(\forall v,w\in V)$;

bilinearità: $v\cdot(\alpha_1w_1+\alpha_2w_2)=\alpha_1(v\cdot w_1)+\alpha_2)(v\cdot w_2)$ e $(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)\cdot w=\alpha_1(v_1\cdot w)+\alpha_2(v_2\cdot w)$ $(\forall v_i,w_i\in V,\forall\alpha_i\in C)$;

positività: $v\cdot v\geqslant 0$; $v\cdot v=0$ sse $v=0$ $(\forall v\in V)$;

$(v\cdot w)^2\leqslant(v\cdot v)(w\cdot w)$ $(\forall v,w\in V)$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: si dimostra a partire da $(v+\lambda w)\cdot(v+\lambda w)\geqslant 0$ per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$).

Nozione di lunghezza dei vettori: $\|v\|:=\sqrt{v\cdot v}$.
Valgono le seguenti regole: $\|v\|=0$ sse $v=0$; $\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$;
$\|v+w\|\leqslant\|v\|+\|w\|$ (disuguaglianza triangolare);
$\|v+w\|^2=\|v\|^2+2(v\cdot w)+\|w\|^2$;
$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right)$.

Nozione di misura dell'angolo tra due vettori:
$cos\vartheta(v,w):=\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}$ (ha senso per la disuguaglianza CS).

Nozione di ortogonalità tra due vettori: $v\perp w$ significa per definizione $v\cdot w=0$.

Teorema di Pitagora: $v\perp w$ sse $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$.

Proiezione ortogonale di un vettore v nella direzione di w: $p_w(v)=\frac{v\cdot w}{\|w\|^2}w=\frac{v\cdot w}{w\cdot w}w$. Risulta che $p_w(v)\perp(v-p_w(v))$.

Si ha che $v+w=p_{v+w}(v)+p_{v+w}(w)$.

Teoremi di Euclide: $v\perp w$ sse $\|v\|^2=\|v+w\|\|p_{v+w}(v)\|$;

$v\perp w$ sse $\|v-p_{v+w}(v)\|^2=\|p_{v+w}(v)\|\|p_{v+w}(w)\|$.

Per S sottinsieme di V definiamo $S^\perp:=\{v\in V\,|\,v\perp s\ (\forall s\in S)\}$, che risulta un sottospazio vettoriale. Si ha: $\{0\}^\perp=V$, $V^\perp=0$, $\langle S\rangle=(S^\perp)^\perp$. Dunque per W sottospazio: $(W^\perp)^\perp=W$. Se $S\subseteq T$ allora $T^\perp\subseteq S^\perp$; $S^{\perp\perp\perp}=S^\perp$.

Se W e W' sono sottospazi vettoriali di V:
$(W+W')^\perp=W^\perp\cap W'^\perp$ e $(W\cap W')^\perp=W^\perp+W'^\perp$.

Gli automorfismi di V che rispettano la struttura euclidea, i.e. $\varphi(v)\cdot\varphi(w)=v\cdot w$ per ogni $v,w\in V$, si dicono trasformazioni ortogonali. Ogni matrice A associata usando una base di vettori ortonormali (tali che $v_i\cdot v_j=\delta_{i,j}$) risulta ortogonale, i.e. tale che $A^tA=\mathbb{I}$, ovvero $A^{-1}=A^t$. Le matrici ortogonali formano un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n,C)$ che si indica con $\mathrm{O}(n,C)$. Se $A\in\mathrm{O}(n,C)$, allora $\det A=\pm1$.

Cross Product. Sia $V_n(C)$ lo spazio vettoriale standard su C di dimensione n. Definiamo una applicazione cross: $V^{n-1}\longrightarrow V$ tramite la formula:

$$\mathrm{cross}(v_1^t,\ldots,v_{n-1}^t):=\det\begin{pmatrix} e\\ v_1\\ \vdots\\ v_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n\\ v_{1,1} & \cdots & v_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n}\end{vmatrix}$$

In particolare: per $n=1$ si ha $\mathrm{cross}(\varnothing)=e=1$;
per $n=2$ si ha $\mathrm{cross}(v)=(v_2,-v_1)^t$;
per $n=3$ si ha $\mathrm{cross}(v,w)=(v_2w_3-v_3w_1,-v_1w_3+v_3w_1,v_1w_2-v_2w_1)^t$.

Proprietà del cross product:

$\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})=0$ se e solo se $v_1,\ldots,v_{n-1}$ sono *ld*;

$\mathrm{cross}(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(n-1)})=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})$ $(\forall\sigma\in\mathcal{P}_{n-1})$;

$v_i\cdot\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})=0$ (cioè, se si tratta di spazi euclidei, $\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})$ è ortogonale a v_i) per ogni i;

multilinearità: $\mathrm{cross}(v_1,\ldots,\sum_j\alpha_jw_j,\ldots,v_{n-1})=$
$=\sum_j\alpha_j\mathrm{cross}(v_1,\ldots,w_j,\ldots,v_{n-1})$;

identità di Lagrange: $\left\|\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})\right\|^2=$

$$=\begin{vmatrix} n & v_1^t & v_2^t & \cdots & v_{n-1}^t\\ v_1 & \|v_1\|^2 & v_1\cdot v_2 & \cdots & v_1\cdot v_{n-1}\\ v_2 & v_2\cdot v_1 & \|v_2\|^2 & \cdots & v_2\cdot v_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n-1} & v_{n-1}\cdot v_1 & v_{n-1}\cdot v_2 & \cdots & \left\|v_{n-1}\right\|^2\end{vmatrix}.$$

Se $v_1,\ldots,v_{n-1}$ sono *li*, allora $v_1,\ldots,v_{n-1},\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})$ sono una base di V.

Nel caso $n=2$ l'identità di Lagrange si riduce a $\|\mathrm{cross}(v)\|=\|v\|$

Nel caso $n=3$, $\mathrm{cross}(v,w)=:v\wedge w$, l'identità di Lagrange è $\|v\wedge w\|^2=\|v\|^2\|w\|^2-(v\cdot w)^2$ e si generalizza in
$\sum_{i<j}(x_iy_j-x_jy_i)^2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2$.

Da un punto di vista geometrico, il cross product di $n-1$ vettori linearmente indipendenti si caratterizza come: il vettore di direzione ortogonale ai vettori dati, di verso tale che l'orientazione di $v_1,\ldots,v_{n-1},\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})$ concordi con quella della base scelta, di lunghezza il volume $(n-1)$-dimensionale del "parallelepipedo" formato dai vettori $v_1,\ldots,v_{n-1}$.

Prodotto misto. $|wv_1\cdots v_{n-1}|:=w\cdot\mathrm{cross}(v_1,\ldots,v_{n-1})$ si dice il prodotto misto dei vettori w e $v_1,\ldots,v_{n-1}$; è un elemento di C che si annulla se e solo se gli n vettori coinvolti sono *ld*. Si ha $|v_{\sigma1}\cdots v_{\sigma n}|=\mathrm{sgn}(\sigma)|v_1\cdots v_n|$ per ogni permutazione σ. Il modulo del prodotto misto si interpreta come volume n-dimensionale del poliparallelepipedo generato dagli n vettori.

Dualità. Sia V uno spazio vettoriale su C di dimensione finita n. Definiamo il suo duale come $V^*{:=}\mathrm{Hom}_C(V,C)$ (applicazioni lineari di V in C), che ha una struttura naturale di C-spazio vettoriale data da $(v^*+w^*)(v){:=}v^*(v)+w^*(v)$ e $(cv^*)(v){:=}cv^*(v)$ per $v^*,w^*\in V^*$.

Data una base $e=(e_1,\dots,e_n)$ di V, gli elementi e_i^* di V^* definiti da $e_i^*(e_j){:=}\delta_{i,j}$ formano una base di V^*; $e^*=(e_1^*,\dots,e_n^*)$ si dice la base duale di e. In particolare $\dim_C V^*=\dim_C V$.

Esiste una applicazione canonica:
$V\times V^*\longrightarrow C$: $(v,v^*)\mapsto v\circ v^*{:=}v^*(v)$

bilineare: $v\circ(v^*+w^*)=v\circ v^*+v\circ w^*$, $(v+w)\circ v^*=v\circ v^*+w\circ v^*$ e $(\lambda v)\circ v^*=\lambda(v\circ v^*)=v\circ(\lambda v^*)$;

non degenere: se $v\circ v^*=0$ per ogni $v\in V$ (risp. $v^*\in V^*$) allora $v^*=0$ (risp. $v=0$).

Se $\varphi{:}V\longrightarrow W$ è una applicazione lineare, allora definiamo φ^*: $W^*\longrightarrow V^*$ tramite la regola $\varphi^*(w^*)(v){:=}w^*(\varphi(v))$ (i.e. $v\circ(\varphi^* w^*)=(\varphi v)\circ w^*$ $(\forall v\in V,\ \forall w^*\in W^*)$).

La matrice di φ^* nelle basi duali delle basi e di V e g di W è data dalla trasposta della matrice di φ in quelle basi: $\alpha_{g^*,e^*}(\varphi^*)=\alpha_{e,g}(\varphi)^t$. In particolare $\mathrm{rk}(\varphi^*)=\mathrm{rk}\varphi({:=}\dim_C \mathrm{im}\varphi)$.

Abbiamo che $\mathrm{id}_V^*=\mathrm{id}_{V^*}$, $(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^*$.

Il morfismo canonico: $V\longrightarrow V^{**}$: $v\mapsto \mathrm{ev}(v)$ ove $\mathrm{ev}(v)(v^*){:=}v^*(v)=v\circ v^*$ è un isomorfismo di spazi vettoriali (Notare che non c'è un isomorfismo canonico tra V e V^*). Sotto questa identificazione, per un morfismo φ, risulta $\varphi^{**}=\varphi$.

Nozione di ortogonale: per S sottinsieme di V definiamo un sottospazio di V^*: $S^\perp{:=}\{v^*\in V^*\,|\,s\circ v^*=0\ (\forall s\in S)\}$.

Proprietà dell'ortogonale:

se $S\subseteq T$ allora $T^\perp\subseteq S^\perp$;

$S^{\perp\perp}=\langle S\rangle$; $W^{\perp\perp}=W$; $S^{\perp\perp\perp}=S^\perp$;

$(W\cap W')^\perp=W^\perp+W'^\perp$ e $(W+W')^\perp=W^\perp\cap W'^\perp$;

(ove W e W' sono sottospazi di V); in particolare il passaggio all'ortogonale induce un antiisomorfismo involutorio tra i reticoli di sottospazi di V e V^*; inoltre $\dim_C(W^\perp)=n-\dim_C W$.

Se $\varphi{:}V\longrightarrow W$, allora $\mathrm{im}(\varphi^*)=\ker(\varphi)^\perp$ e $\ker(\varphi^*)=\mathrm{im}(\varphi)^\perp$.

Dato un sottospazio W di V, la dualità canonica $V\times V^*\longrightarrow C$ induce una mappa con analoghe proprietà $(V/W)\times W^\perp\longrightarrow C$, da cui si deduce che $(V/W)^*\cong W^\perp$ e $\left(V^*/W^\perp\right)^*\cong W$. Inoltre $W^*\cong V^*/W^\perp$.

Forme Bilineari. Siano V e W spazi vettoriali su C; una applicazione bilineare è una applicazione $\varphi{:}V\times W\longrightarrow C$ tale che $\varphi(v+v',w)=\varphi(v,w)+\varphi(v',w)$, $\varphi(v,w+w')=\varphi(v,w)+\varphi(v,w')$ e $\varphi(\lambda v,w)=\lambda\varphi(v,w)=\varphi(v,\lambda w)$.

Una forma bilineare determina dua applicazioni lineari, una trasposta dell'altra, $\varphi_1{:}V\to W^*$ e $\varphi_2{:}W\to V^*$ tramite $\varphi_1(v)(w)=\varphi(v,w)=\varphi_2(w)(v)$.

Si definisce $N_1(\varphi)=\ker(\varphi_1)$ (nucleo sinistro di φ) e $N_2(\varphi)=\ker(\varphi_2)$ (nucleo destro di φ). La forma si dice non degenere se i nuclei sono nulli. Se gli spazi vettoriali hanno dimensione finita, la forma è non degenere se e solo se le applicazioni φ_1 e φ_2 sono isomorfismi.

Siano $v_1,\dots,v_n$ e $w_1,\dots,w_m$ basi di V e W rispettivamente; allora la matrice $A=(\varphi(v_i,w_j))$ si dice associata a φ nelle basi date. Se $v\in V$ ha coordinate (x_i) nella base scelta di V e $w\in W$ ha coordinate (y_i) nella base scelta di W allora $\varphi(v,w)=x^tAy$. Cambiamenti di base di matrici P $(x=Px')$ e Q $(y=Qy')$ rispettivamente in V e W cambiano la matrice di φ in P^tAQ.

Una forma bilineare φ su uno spazio vettoriale V è una applicazione bilineare $\varphi{:}V\times V\longrightarrow C$; è non degenere sse una (e dunque ogni) matrice associata è invertibile; si dice simmetrica (risp. alternante) se $\varphi(v,w)=\varphi(w,v)$ per ogni $v,w\in V$ (risp. $\varphi(v,v)=0$ per ogni $v\in V$). Se il corpo C ha caratteristica diversa da 2, allora φ è alternate se e solo se $\varphi(v,w)=-\varphi(w,v)$ per ogni $v,w\in V$.

Se la forma è simmetrica o alternante, allora i due nuclei coincidono, e la dimensione del nucleo $N(\varphi)$ coincide con la nullita di una qualunque matrice associata. Inoltre se U è un complementare di $N(\varphi)$ in V, allora $\varphi_{|U}$ è una forma bilineare (simmatrica o alternante) non degenere su U. In particolare esiste una base di V tale cha la matrice associata ha forma $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)$ con B matrice non degenere.

Due matrici A e B si dicono congruenti se esiste $P\in\mathrm{GL}(N,C)$ tale che $B=P^tAP$. Si tratta di una relazione di equivalenza.

Aggiunzione. Data $f{:}V\to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali su C dotati di forme bilineari non degeneri φ e ψ, definiamo l'applicazione aggiunta $f^a{:}W\to V$ tramite la posizione: $\psi(fv,w)=\varphi(v,f^aw)$ per ogni $v\in V$. Se A, B, F sono le matrici rispettivamente di φ, psi, f in fissate basi di V e W, allora matrice di f^a risulta $A^{-1}F^tB$. Risulta $(gf)^a=f^ag^a$, $\mathrm{id}_V^a=\mathrm{id}_V$, $f^{aa}=f$.

Ortogonalità. Una base di V si dice ortogonale per la forma φ se $\varphi(v_i,v_j)=0$ se $i\neq j$; di dice ortonormale se $\varphi(v_i,v_j)=\delta_{i,j}$.

Dato un sottospazio U di V, si definiscono gli ortogonali sinistro e destro di U per la forma φ tramite ${}^\perp U=\{v\in V|\varphi(v,U)=0\}$ e $U^\perp=\{v\in V|\varphi(U,v)=0\}$. Se la forma è simmetrica o alternante, i due ortogonali coincidono; se la forma è non degenere, si hanno le usuali regole: $U\leqslant U'$ implica $U^\perp\geqslant U'^\perp$, $U^{\perp\perp}=U$, $(U+U')^\perp=U^\perp\cap U'^\perp$, $(U\cap U')^\perp=U^\perp+U'^\perp$; inoltre $\dim_C U+\dim_C U^\perp=\dim_C V$. Per un sottospazio U di V risulta: $U\cap U^\perp=0$ sse $\varphi_{|U}$ è non degenere, sse $V=U\oplus U^\perp$ (se φ è non degenere è ancora equivalente che $V=U+U^\perp$).

Un vettore $v\in V$ si dice isotropo se $\varphi(v,v)=0$. La forma ammette vettori isotropi se e solo se esistono sottospazi U di V con $U\cap U^\perp\neq\varnothing$. Se la caratteristica del corpo C non è 2, e la forma φ non è nulla, allora esistono vettori non isotropi; ed esistono basi ortogonali rispetto a φ. In particolare, se C è algebricamente chiuso, per ogni matrice simmetrica A esiste un cambiamento di base P tale che $P^tAP=\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{I}_m&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$.

Se $C=\mathbb{R}$, allora per ogni matrice simmetrica A esiste un cambiamento di base P tale che $P^tAP=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_p&0&0\\0&-\mathbb{I}_q&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ (teorema di Sylvester o regola di inerzia). In particolare nel caso reale una forma simmetrica non degenere ammette una base ortonormale se e solo se $\varphi(v,v)>0$ per ogni $v\neq0$; in tal caso la forma si dice *definita positiva*; si dice *definita negativa* se la sua opposta è definita positiva.

Una matrice reale simmetrica A è definita positiva sse $A=P^tP$ con $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (i.e. se è congruente alla matrice identica), o anche sse esiste una catena di minori principali positivi, e in tal caso ogni minore principale è positivo; una matrice simmetrica è definita negativa sse esiste una catena di minori principali con segni alterni (iniziando con un valore negativo).

Endomorfismi simmetrici. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di una forma bilineare φ non degenere. Un endomorfismo f di V si dice simmetrico se $\varphi(fv,w)=\varphi(v,fw)$ per ogni $v,w\in V$; ciò succede sse $f=f^a$ (f è autoaggiunto), ovvero sse $F^tA=AF$ se A e F sono le matrici di φ e f in una fissata base (in particolare sse le matrici associate a f in basi ortonormali per φ sono simmetriche).

Ogni endomorfismo simmetrico ammette una base di autovettori ortogonali; in particolare ogni matrice reale simmetrica è ortogonalmente diagonalizzabile.

Sistemi di Equazioni Lineari.

Notazioni. Un sistema lineare di m equazioni ed n incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1+\cdots+a_{1,n}X_n=b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m,1}X_1+\cdots+a_{m,n}X_n=b_m \end{cases}$$

si rappresenta in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e in forma compatta con $AX=b$ ove $A\in\mathcal{M}_{m,n}(C)$, $X=(X_1\dots,X_n)^t$ e $b\in C^m$.

La matrice A si dice la matrice incompleta del sistema, la matrice $(Ab)\in\mathcal{M}_{m,n+1}(C)$ si dice la matrice completa del sistema. Il sistema si dice quadrato se $m=n$. Omogeneo se b è il vettore nullo.

Soluzioni del sistema sono le n-ple $(x_1,\dots,x_n)^t\in C^n$ per cui valgono tutte le uguaglianze. Nel caso sia vuoto il sistema si dice impossibile. Geometricamente si tratta di trovare l'antimmagine di $b\in C^m$ per l'applicazione $C^n\longrightarrow C^m$ che è rappresentata dalla matrice A nelle basi canoniche.

Se il sistema è omogeneo si tratta di un sottospazio vettoriale di C^n (il nucleo della suddetta applicazione lineare).

Sistemi equivalenti. Due sistemi $AX=b$ e $A'X=b'$ con $A,A'\in\mathcal{M}_{m,n}(C)$ si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Se $H\in\mathcal{M}_m(C)$ è una matrice invertibile, allora $AX=b$ è equivalente a $(HA)X=Hb$.

Rouché-Capelli. Il sistema $AX=b$ con $A\in\mathcal{M}_{m,n}(C)$ ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta, sia r, e in tal caso se x è una tale soluzione, l'insieme di tutte le soluzioni si scrive come $x+W$ dove W è il sottospazio vettoriale di C^n delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato, i.e. $AX=0$; si ha che $\dim_C W=n-r$.

Riduzione di Gauss. Tramite operazioni elementari sulle righe della matrice completa si può trasformare il sistema in un sistema equivalente in forma a scalini, da cui si leggono subito i ranghi delle matrici, e si scrivono le eventuali soluzioni.

Cramer. Il sistema $AX=b$ con $A\in\mathcal{M}_n(C)$ (sistema quadrato) ha un'unica soluzione se e solo se $\det A\neq0$, i.e. se la matrice A è invertibile, e in tal caso la soluzione è $x=A^{-1}b$. Se $A(i)$ è la matrice che si ottiene da A sostituendo la i-sima colonna con la colonna b dei termini noti, si ha che $x_i=|A(i)|\Big/|A|$.